

郵票助你一「幣」之力



用1元或5元的硬幣湊成200元
，有幾種湊法？

$$200 \div 5 = 40, 40 + 1 = 41$$

有41種湊法

活動一

用1元、5元或10元的硬幣湊成
200元，有幾種湊法？

表一

10-14

10 元的個數	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5 元的個數	0	1	2	0	0	1	2	0	0	1
1 元的個數	10	5	0	0	11	6	1	1	12	7
湊成的錢數	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12

10 元的個數	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
5 元的個數	2	0	0	1	2	0	0	1	2	0
1 元的個數	2	2	13	8	3	3	14	9	14	14
湊成的錢數	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14

15—19

10 元的個數	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5 元的個數	0	1	2	3	0	1	0	1	2	3
1 元的個數	15	10	5	0	5	0	16	11	6	1
湊成的錢數	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16

10 元的個數	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
5 元的個數	0	1	0	1	2	3	0	1	0	1
1 元的個數	6	1	17	12	7	2	7	2	18	13
湊成的錢數	16	16	17	17	17	17	17	17	18	18

10 元的個數	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
5 元的個數	2	3	0	1	0	1	2	3	0	1
1 元的個數	8	3	8	3	19	14	9	4	9	4
湊成的錢數	18	18	18	18	19	19	19	19	19	19

把10元到25元的方法數列成表二

錢 數	10元	10元
10元的個數	0 個	1 個
用5元或1元 湊成的方法數	3	1
總 數	$3+1=4$	

錢 數	15元	15元
10元的個數	0 個	1 個
用5元或1元 湊成的方法數	4	2
總 數	$4+2=6$	

把10元到25元的方法數列成表二

錢 數	20元	20元	20元
10元的個數	0 個	1 個	2 個
用5元或1元 湊成的方法數	5	3	1
總 數	$5+3+1=9$		

錢 數	25元	25元	25元
10元的個數	0 個	1 個	2 個
用5元或1元 湊成的方法數	6	4	2
總 數	$6+4+2=12$		

分析整理表二中的規律

湊成 10 元－14 元的方法數	$3 + 1 = (3 + 1) \times 2 \div 2 =$	2×2
湊成 15 元－19 元的方法數	$4 + 2 = (4 + 2) \times 2 \div 2 =$	2×3
湊成 20 元－24 元的方法數	$5 + 3 + 1 = (5 + 1) \times 3 \div 2 =$	3×3
湊成 25 元－29 元的方法數	$6 + 4 + 2 = (6 + 2) \times 3 \div 2 =$	3×4
湊成 30 元－34 元的方法數	$7 + 5 + 3 + 1 = (7 + 1) \times 4 \div 2 =$	4×4
湊成 35 元－39 元的方法數	$8 + 6 + 4 + 2 = (8 + 2) \times 4 \div 2 =$	4×5
湊成 40 元－44 元的方法數	$9 + 7 + 5 + 3 + 1 = (9 + 1) \times 5 \div 2 =$	5×5
湊成 45 元－49 元的方法數	$10 + 8 + 6 + 4 + 2 = (10 + 2) \times 5 \div 2 =$	5×6

我們的發現

- 湊成10元—14元、20元—24元的方法數都是由奇數相加的和，稱為奇數列。
- 湊成15元—19元、25元—29元的方法數都是由偶數相加的和，稱為偶數列。
- 發現奇數列的和都為 $A \times A$ 的形式，
偶數列的和都為 $A \times (A + 1)$ 的形式。

活動二

用1元、5元或10元的硬幣湊成
某錢數時，我們找到
有規律的數列法及簡便公式法

用1元、5元或10元湊成某錢數， 有規律的數列法

$$\text{錢數} \div 5 = a \cdots \cdots c \quad b = a + 1$$

如果b是奇數 則由b開始往下累加所有的奇數到1

$$b + (b-2) + (b-4) + \cdots + 3 + 1$$

(奇數列)

如果b是偶數 則由b開始往下累加所有的偶數到2

$$b + (b-2) + (b-4) + \cdots + 4 + 2$$

(偶數列)

簡便的公式法

$$\text{錢數} \div 10 = B \cdots \cdots C$$

$$A = B + 1$$

$$(1) 0 \leq C \leq 4 \quad \rightarrow \text{總方法數為 } A \times A$$

$$(2) 5 \leq C \leq 9 \quad \rightarrow \text{總方法數為 } A \times (A + 1)$$

舉例

用1元、5元或10元的硬幣湊成150元，
有（256）種湊法。

$$\begin{aligned} \text{（解題）} \quad 150 \div 10 &= 15 \cdots \cdots 0 & 15 + 1 &= 16 \\ & & 16 \times 16 &= 256 \end{aligned}$$

活動三

A元和B元郵票無法組合成的郵資有哪些？

如何找到不能組成郵資的最大數字？

先假設兩種郵票A元、B元的面額互質時，同學分工合作，把可以組合的郵資和無法組合成的郵資紀錄下來。如下表

用3元和8元的郵票， 不能湊成的郵資

3 元的張數			1			2		0
8 元的張數			0			0		1
湊成的郵資	1	2	3	4	5	6	7	8

3 元的張數	3		1	4		2	5	0
8 元的張數	0		1	0		1	0	2
湊成的郵資	9	10	11	12	13	14	15	16

用4元和9元的郵票，不能湊成的郵資

4 元的張數	/	/	/	1	/	/	/	2
9 元的張數				0				0
湊成的郵資	1	2	3	4	5	6	7	8

4 元的張數	0	/	/	3	1	/	/	4
9 元的張數	1			0	1			0
湊成的郵資	9	10	11	12	13	14	15	16

4 元的張數	2	0	/	5	3	1	/	6
9 元的張數	1	2		0	1	2		0
湊成的郵資	17	18	19	20	21	22	23	24

4 元的張數	4	2	0	7	5	3	1	8
9 元的張數	1	2	3	0	1	2	3	0
湊成的郵資	25	26	27	28	29	30	31	32

用5元和11元的郵票，不能湊成的郵資

5 元的張數					1			
11 元的張數					0			
湊成的郵資	1	2	3	4	5	6	7	8

5 元的張數		2	0				3	1
11 元的張數		0	1				0	1
湊成的郵資	9	10	11	12	13	14	15	16

5 元的張數				4	2	0		
11 元的張數				0	1	2		
湊成的郵資	17	18	19	20	21	22	23	24

5 元的張數	5	3	1			6	4	2
11 元的張數	0	1	2			0	1	2
湊成的郵資	25	26	27	28	29	30	31	32

5 元的張數	0		7	5	3	1		8
11 元的張數	3		0	1	2	3		0
湊成的郵資	33	34	35	36	37	38	39	40

郵票面額	無法組成的郵資	無法組成郵資的最大數字
2 元、3 元	1 元	1
2 元、5 元	1、3 元	3
2 元、7 元	1、3、5 元	5
2 元、9 元	1、3、5、7 元	7
3 元、4 元	1、2、5 元	5
3 元、5 元	1、2、4、7 元	7
3 元、7 元	1、2、4、5、8、11 元	11
3 元、8 元	1、2、4、5、7、10、13 元	13
4 元、5 元	1、2、3、6、7、11 元	11
4 元、7 元	1、2、3、5、6、9、10、13、17 元	17
4 元、9 元	1、2、3、5、6、7、10、11、14、15、 19、23 元	23
5 元、6 元	1、2、3、4、7、8、9、13、14、 19 元	19
5 元、7 元	1、2、3、4、6、8、9、11、13、16 18、23 元	23
5 元、8 元	1、2、3、4、6、7、9、11、12、14 17、19、22、27 元	27
5 元、9 元	1、2、3、4、6、7、8、11、12、13、 16、17、21、22、26、31 元	31
5 元、11 元	1、2、3、4、6、7、8、9、12、13、 14、17、18、19、23、24、28、29、 34、39 元	39

我們用4元和9元為例：

將所有的整數分成四類，分別為除以4餘1、餘2、餘3、整除，而無法用4元和9元組合成的郵資用紅色數字表示。

【1、5、9、13、17、21、25……】

【2、6、10、14、18、22、26……】

【3、7、11、15、19、23、27……】

【4、8、12、16、20、24、28……】

除以4餘1的數：

【1、5、9、13、17、21、25、29、33、37、41……】

所有餘1的數都可表示成 $4k+1$ ，

$$4k+1=4\times(k-2)+4\times2+1=4\times(k-2)+9\times1$$

所以當 $k \geq 2$ 時可用4、9組成。

除以4餘2的數：

【2、6、10、14、18、22、26、30、34、38、42……】

所有餘2的數都可表示成 $4k+2$ ，

$$4k+2=4\times(k-4)+4\times4+2=4\times(k-4)+9\times2$$

所以當 $k \geq 4$ 時可用4、9組成。

除以4餘3的數：

【3、7、11、15、19、23、27、31、35、39、43……】

所有餘3的數都可表示成 $4k+3$ ，

$$4k+3=4\times(k-6)+4\times6+3=4\times(k-6)+9\times3$$

所以當 $k \geq 6$ 時可用4、9組成。

我們的發現：

餘1的：【**1、5、9**、13、17、21、25、...

餘2的：【**2、6、10、14、18**、22、26、30、34、38、42.....】

餘3的：【**3、7、11、15、19、23、27**、31、35、39、43.....】

所以可知4元、9元不能組成郵資的最大數字是**23**。

$27=3\times 9$ ，而以這個數27所在的數列中的前一個數

$27-4=23$ ，就是4、9不能組成的最大數，

也就是 $(4-1)\times 9-4=4\times 9-4-9$ 。

我們的發現：

若 $(A, B) = 1$ ， $A < B$ ， $B \times (A-1)$ 這個數所在的數列中的前一個數，就是 A 、 B 不能組成的最大數，也就是 $(A-1) \times B - A = \underline{A \times B - B - A}$ 。

用5元和11元的郵票不能湊成的郵資

除以5餘1：【1、6、11……】

除以5餘2：【2、7、12、17、22……】

除以5餘3：

【3、8、13、18、23、28、33……】

除以5餘4：

【4、9、14、19、24、29、34、39、44……】

用5元和11元的郵票不能湊成的郵資

有20個為：

【1、2、3、4、6、7、8、9、12、
13、14、17、18、19、23、24、28
、29、34、39】，

無法組成郵資的最大數是

$$5 \times 11 - 5 - 11 = 39。$$

5-11創意市集

有虛擬貨幣5元，11元，市集的物品如果標價40元以上都可以用5元和11元組合，

未滿40元的有5，10，11，15，16，20，21，22，25，26，27，30，31，32，33，35，36，37，38，可以用5元和11元組合。



評鑑與檢討

如果再增加一種硬幣50元，
用1元、5元、10元或50元的硬幣
湊成某錢數時，是否也能找到
有規律及簡便的算法？

評鑑與檢討

在「5-11創意市集」買57元的商品，能快速的完成交易，5元用7張，11元用2張。

「解題」

$$57 = 5 \times 11 + 2 \text{ (餘2類)}$$

餘2類中11的最小倍數是22，所以

$$57 = 57 - 22 + 22$$

$$= 35 + 22 = 5 \times 7 + 11 \times 2$$

A stylized, low-poly illustration of a church with a steeple, surrounded by trees with autumn-colored foliage. The church is light yellow with a dark roof and a steeple. The trees are in various shades of brown, orange, and purple. The overall style is modern and abstract.

謝謝大家

Thanks For Listening