

彰化縣112學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選  
作品說明書

作品編號：

組別：  
國小組  
數學類  
自然與生活科技類  
國中組  
人文社會類

作品名稱：海洋保衛戰-分析大小戰艦擺在海戰棋棋盤的最高分數



## 第一階段 研究訓練階段

### 壹、近二年學校獨立研究課程之規劃

#### 一、中年級

- (一)文書處理軟體的使用。
- (二)相片編輯。
- (三)文章閱讀摘要技巧。
- (四)文章、圖片等著作財產權觀念及引用方法。
- (五)研究方法的認識與應用。
- (六)與數理課、人文課橫向聯繫及基礎課程之連貫。

#### 二、高年級

- (一)閱讀與評析歷屆獨立研究得獎作品。
- (二)選定有興趣的研究主題，並擬定計畫。
- (三)依研究主題蒐集與分析各種資料。
- (四)研究報告的撰寫與反思。
- (五)與數理課、人文課橫向聯繫，加深加廣之延伸。

### 貳、學校如何提供該生獨立研究訓練

#### 一、中年級：

本校資優巡迴班每週安排兩節專題研究，訓練基礎的研究技巧、閱讀歷屆獨立研究作品，學校也在寒暑假安排學生參與科展製作，讓學生了解研究方法及研究架構的撰寫。學生參與彰化縣資優巡迴組舉辦的資優方案課程或戶外教育活動，再透過資優巡迴班的跨領域課程讓學生多元接觸各種主題，發掘自身有興趣的議題，為將來銜接高年級的獨立研究課程做準備。

#### 二、高年級：

資優巡迴班每週安排兩節獨立研究，學生利用在中年級所學習的各類研究方法來進行研究主題探索，並將蒐集到的資料進行歸納與分析，從中學習解決問題、反思的能力，並能在動態歷程中完成研究報告。

## 第二階段 獨立研究階段

### 一、研究動機

我們其中一位成員在三年級時翻看他姊姊六年級下學期的數學課本，發現題目上有6 x 6的格子及一些圓圈和玩法，按照玩法必須將限定的圈圈數放進格子裡，這是一個需要大量用腦的題目。於是他發現這改編自「海戰棋」這個遊戲，因此我們想探討戰艦放在正方形棋盤上能達到最高分的情況，並運用想像及創造力把枯燥乏味的題目改成有趣的對抗遊戲。

### 二、研究問題及工作進度表

#### (一) 工作進度表

	2023年 7月	2023年 8月	2023年 9月	2023年 10月	2023年 11月	2023年 12月
主題確定						
文獻搜集與整理						
想出和算出最高分的公式						
規劃海洋保衛戰						
研究問題與討論						
編撰作品書和校稿完成						

#### (二) 研究問題

1. 海戰棋歷史背景及由來。
2. 研究n階正方形棋盤的最高分排法的規律。
3. 推理n階正方形棋盤達最高分的公式。
4. 設計兩個人玩的桌遊-海洋保衛戰。

### 三、彙整相關文獻

#### (一) 海戰棋玩法

1. 需要的物品：兩張10 x 10格子的遊戲紙、兩枝筆。
2. 玩家兩人。
3. 遊戲時間約二十分鐘。
4. 規則：
  - (1)先在紙上畫五艘船，每一艘占2~5格，5格一艘，4格一艘，3格一艘，2格兩艘，如圖3-1-4黑色格子。
  - (2)如圖3-1-4所示，決定順序後，開始輪流射擊，如果對方射中了船，則在自己的紙上畫圈，沒射中畫叉，如果有一方戰艦被打完了，遊戲就結束。

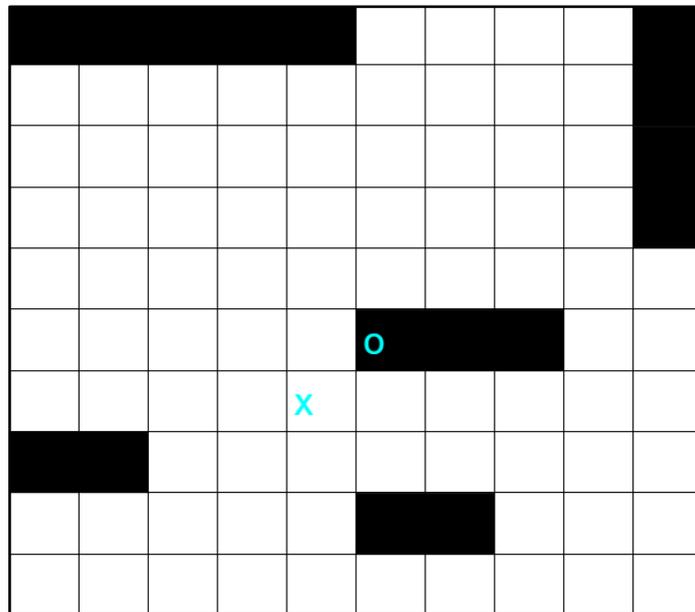


圖3-1-4 海戰棋遊戲紙

- (二) 鯨魚的長度是34公尺，成功級巡防艦是138公尺，成功級巡防艦大約是鯨魚的4倍。
- (三) 在scratch編輯器中設定四個變數，分別是除數、被除數、商、餘數。設定商為被除數/除數，設定餘數為被除數%除數，其中「/」符號代表除法，「%」符號代表只取餘數，而「\」符號代表只取商到整數位。

#### 四、資料分析

##### (一) 海戰棋歷史背景及由來：

Clifford Von Wickler在20世紀初發明海戰棋，由美國的遊戲公司Milton Bradley帶領而流行的。

##### (二) 研究n階正方形棋盤的最高分排法的規律：

###### 1. 分數算法：

四格戰艦	三格戰艦	兩格戰艦	一格戰艦
10分	5分	3分	1分

###### 2. 擺放規則：

(1) 可以擺放四、三、二、一格戰艦。

(2) 擺放上去之後，它周圍的格子都不能放戰艦，如圖4-2-2，圈圈表示戰艦擺放的位置，叉叉表示這個位置不能擺放戰艦。

(3) 擺放到不能放為止。

	x	x	x	x	
x	o	o	o	o	x
	x	x	x	x	

圖4-2-2

### 3. 擺放規律與最高分關係

#### (1) 6階格子

先用四格的戰艦為主 $10 \times 4 + 3 \times 1 = 43$ 分						沒有先用四格戰艦 $5 \times 4 + 3 \times 2 + 2 = 28$ 分					
O	X	O	O	O	O	O	X	X	O	O	O
O	X	X	X	X	X	O	X	O	X	X	X
O	X	X	X	X	O	O	X	O	X	O	X
O	X	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O
X	X	X	X	X	O	X	X	X	O	X	O
O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	X	O

#### (2) 9階格子

有規律 $10 \times 10 + 4 = 104$ 分									無規律 $10 \times 8 + 5 + 3 + 1 = 89$ 分								
O	O	O	O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	X	O	O	O	O
X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
O	O	O	O	X	O	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	X	O
X	X	X	X	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	O	O	X
O	O	O	O	X	O	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	X	O
X	X	X	X	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	O
O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	X	O
X	X	X	X	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O
O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X

規律是由左上第一格開始四個○一列，下面四個×一列，下面再四個○一列，完成左半部後，換從右上第一格開始，依照相同方式放完後，中間會剩一行格子，然後以×○×○的順序排下去。第一張就符合這個條件，但是第二張圖就不符合。

(3) 13階格子

有規律 $10 \times 20 + 6 = 206$ 分													無規律 $11 \times 10 + 5 \times 4 + 3 \times 3 + 1 \times 8 = 147$ 分												
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	O	O	X	O					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	O	X	O	X					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	O	X	O	X					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	O	X	X					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	O	X	O					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	O	X	O					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	O	X	O					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	O					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	X	X	X					
X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	O					
O	O	O	O	X	X	X	X	O	O	O	O	X	O	O	O	O	X	O	O	O					

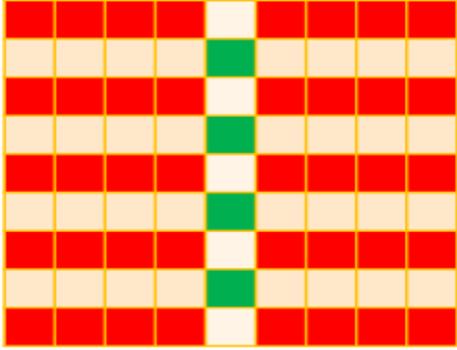
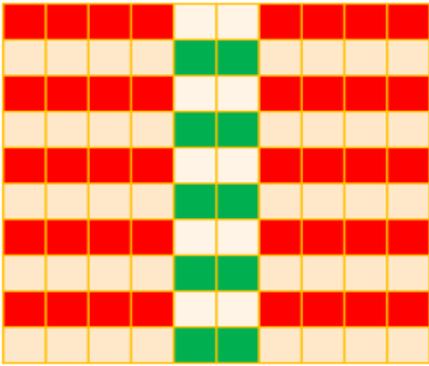
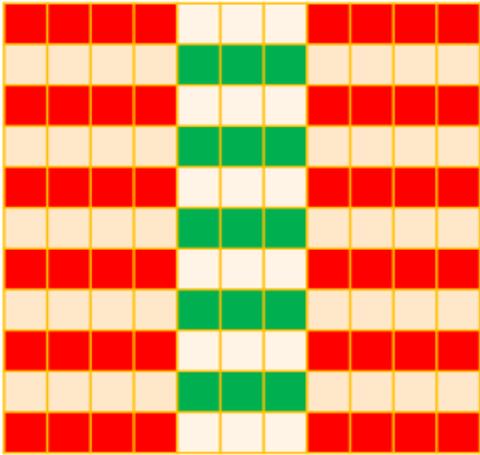
由左到右以四行為一欄，奇數欄的四個戰艦都排在奇數列，偶數欄的四格戰艦排在偶數列，最後剩下的空行，如果前一行是空格，就可以擺戰艦；反之則不能擺戰艦。

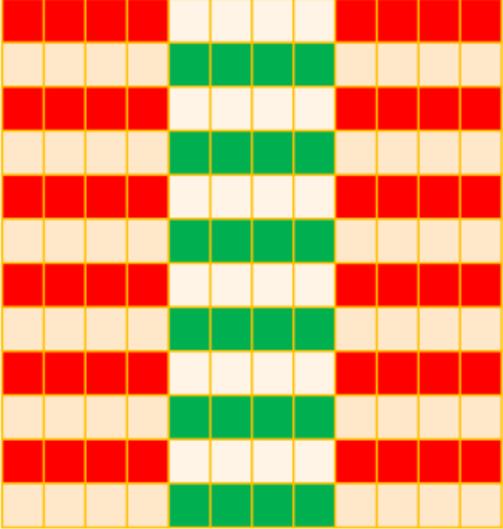
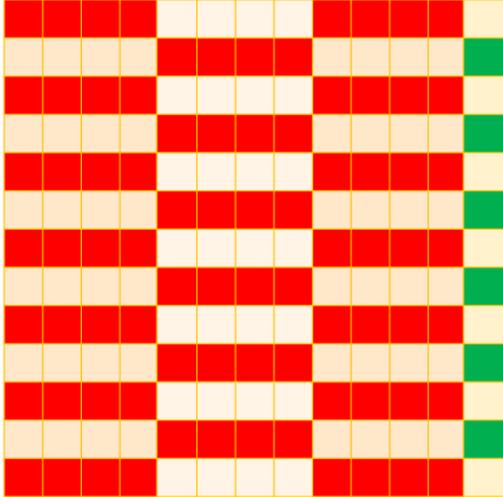
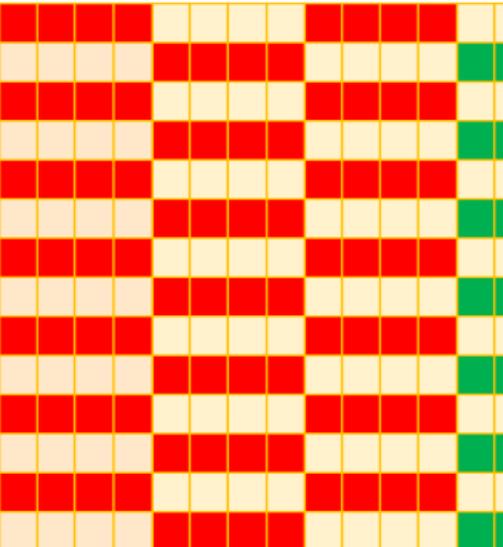
(三) 推理 n 階正方形棋盤達最高分的公式

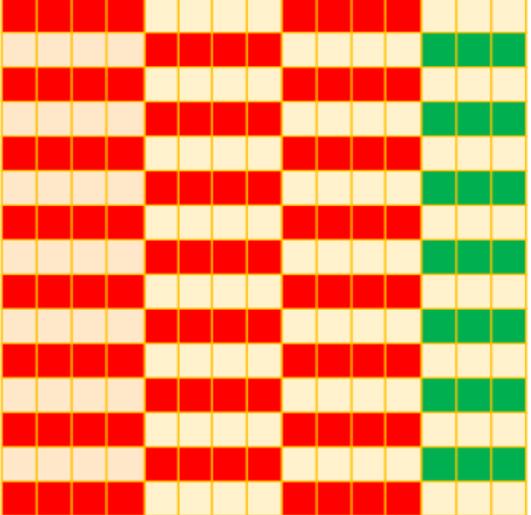
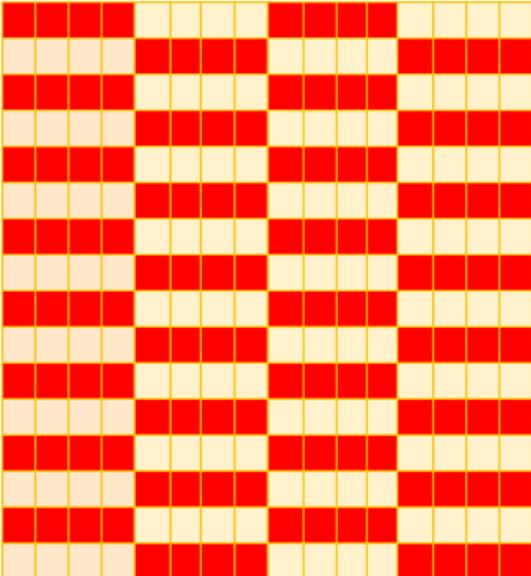
1. 列出戰艦擺放圖與最高分數的關係

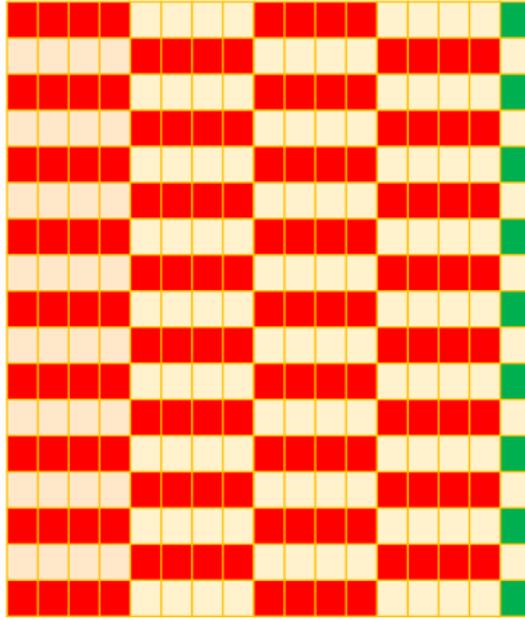
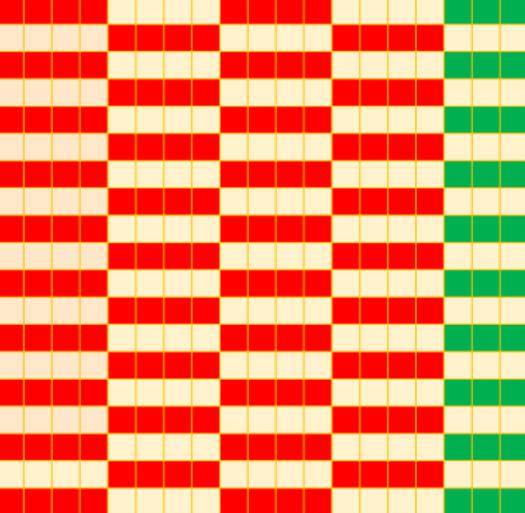
(1) 表4-3-1中，最高分數算法以藍色表示一艘四格戰艦分數，紅色代表一艘一格戰艦分數，黃色表示一艘兩格戰艦的分數，橘色表示一艘三格戰艦的分數，綠色表示一欄有幾艘戰艦，紫色表示有幾欄都是擺放四格戰艦。

(2) 表4-3-1中的圖片顏色，紅色代表四格擺放戰艦位置，綠色代表一格或兩格或三格戰艦擺放位置。

階數	圖片	最高分數算法
9 x 9		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 5 \times 2 = 100</math>            一格戰艦的分數  <math>4 \times 1 = 4</math>            總分  <math>100 + 4 = 104</math>分</p>
10 x 10		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 5 \times 2 = 100</math>            兩格戰艦的分數  <math>3 \times 5 = 15</math>            總分  <math>100 + 15 = 115</math>分</p>
11 x 11		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 6 \times 2 = 120</math>            三格戰艦的分數  <math>5 \times 5 = 25</math>            總分  <math>120 + 25 = 145</math>分</p>

<p>12 x 12</p>		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 6 \times 3 = 120</math>分          總分120分</p>
<p>13 x 13</p>		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 7 \times 2 + 10 \times 6 = 200</math>          一格戰艦的分數  <math>1 \times 6 = 6</math>          總分  <math>200 + 6 = 206</math>分</p>
<p>14 x 14</p>		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 7 \times 3 = 210</math>          兩格戰艦的分數  <math>3 \times 7 = 21</math>          總分  <math>210 + 21 = 231</math>分</p>

<p>15 x 15</p>		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 8 \times 2 + 10 \times 7 = 230</math>          三格戰艦的分數  <math>5 \times 7 = 35</math>          總分  <math>230 + 35 = 265</math>分</p>
<p>16 x 16</p>		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 8 \times 4 = 320</math>分          總分 320分</p>

17 x 17		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 9 \times 2 + 10 \times 8 \times 2 = 340</math></p> <p>一格戰艦的分數  <math>1 \times 9 = 9</math></p> <p>總分  <math>340 + 9 = 349</math>分</p>
18 x 18		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 9 \times 4 = 360</math></p> <p>兩格戰艦的分數  <math>3 \times 9 = 27</math></p> <p>總分  <math>360 + 27 = 387</math>分</p>
19 x 19		<p>四格戰艦的分數  <math>10 \times 10 \times 2 + 10 \times 9 \times 2 = 380</math></p> <p>三格戰艦的分數  <math>5 \times 10 = 50</math></p> <p>總分  <math>380 + 50 = 430</math>分</p>

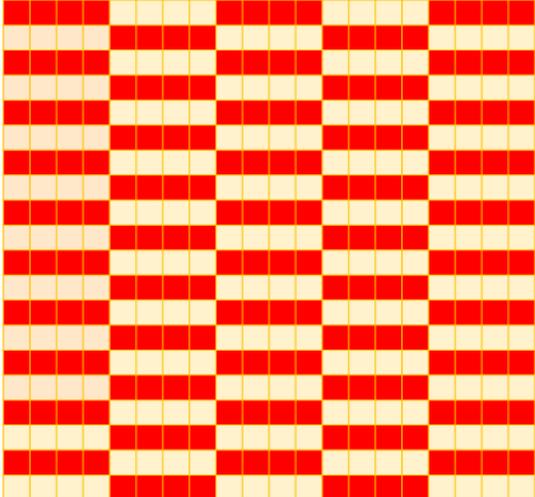
20 x 20		四格戰艦的分數 $10 \times 10 \times 5 = 500$ 分 總分500分
---------	------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------

表4-3-1

由表4-3-1表示，我們從九階開始觀察，因為它的最高分需要兩欄四格戰艦以上配上一、二或三格戰艦一行。13階第一欄有7個四格戰艦，下一階是6個四格戰艦，但是9階第一欄是5個四格戰艦，剩下的空行只能放一格戰艦4個，和13階的形式不吻合。我們想公式時，只能適用13階梯。以四格戰艦來看，10階以上的偶數階每行四格戰艦的數量都一樣，但是奇數階從13階開始就會不一樣。

2. 以奇數階來看四格戰艦數量，假設從左邊數來第一欄有n艘，下一欄n-1艘，再下一欄又變回n艘，依此類推，且每多一階，綠色的格子數就會增加一個，如果左欄四格戰艦放完後右欄還剩下四格以上，就會變成減四格，如五格，變成一格。

3. 用偶數階來分析

(1) 4格戰艦數量

A. 每多一個偶數階每欄四格戰艦就會多一艘，如16階與18階，16階每欄8艘，18階每欄9艘，因此 $16/2=8$ ， $18/2=9$ ，只要求商。

B. 每多兩個偶數階，四格戰艦會多一欄，如16階與20階，16階只有4欄，20階有5欄。

(2) 1到3格戰艦數量

- A. 假設18階， $18/4=4\cdots 2$ ，餘數是2，那麼剩下那部分就只能放兩格戰艦，數量是 $18/2=9$ ，一欄有九艘兩格戰艦。假設20階， $20/4=5\cdots 0$ ，餘數是0，那麼就只能有四格戰艦，數量是 $20/2=10$ ，一欄有十艘。

4. 用奇數階來分析

(1) 4格戰艦數量

- A. 每多一個奇數階每欄四格戰艦就會多一艘，如15階與17階，15階有的一欄8艘，有的一欄7艘，17階有的一欄9艘，有的一欄8艘，因此 $15/2=7$ ， $17/2=8$ ，只要求商到整數。
- B. 每多兩個奇數階，四格戰艦多一欄，如15階和19階，15階只有3欄，19階有4欄。

(2) 1到3格戰艦數量

- A. 假設15階， $15/4=3\cdots 3$ ，餘數是3，那麼剩下那部分就只能放三格戰艦，數量是 $15/2=7\cdots 1$ ，一欄有7艘，取商即可。

(四) 設計兩個人玩的桌遊-海洋保衛戰



圖4-4-1 自製桌遊-海洋保衛戰

1. 故事：茫茫大海上，有很多隻可愛的藍鯨，過著平凡的生活，但是最近很不平凡，因為有許多戰艦開啟了偉大的航道，他們經過許多征服與悲劇，這就是大航海時代。

2. 人數：2人

3. 遊戲時間：約30分

4. 年齡：7歲以上

5. 玩法：

(1) 每個玩家有一、二、三、四格戰艦各六艘和四隻一格的鯨魚。

(2) 首先玩家依序在棋盤上任意位置擺放鯨魚，每個玩家的鯨魚跟另一隻鯨魚放在一起的機會只有一次，其他三隻鯨魚周圍不可放戰艦也不能放鯨魚，擺放規則與戰艦的規則相同，範例如圖4-4-2。

(3) 接下來玩家依序輪流放戰艦，擺放規則與圖4-4-2相同。

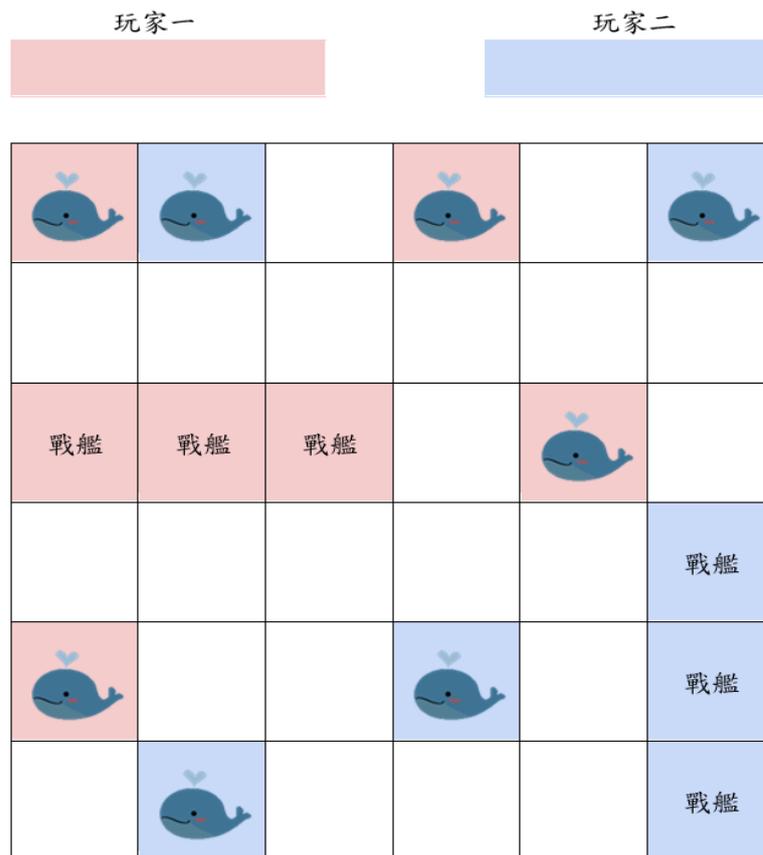


圖4-4-2

- (4) 戰艦的放法：剛開始可以放其中一種戰艦，遊戲過程中，玩家可以用大的戰艦蓋掉小的戰艦，如四格戰艦可蓋三格、兩格或一格；三格戰艦可蓋兩格或一格，兩格戰艦只能蓋一格戰艦。

如果玩家有一方無法再擺戰艦，遊戲即結束，根據棋盤上擺放的戰艦算分數，沒出完的也要扣分，分數計算表如下：

戰艦種類	四格	三格	兩格	一格
加分/扣分的分數	10分	5分	3分	1分

## 五、研究結果與討論

### (一) 海戰棋歷史背景及由來

海戰棋在20世紀初就被發明，但為何不能像撲克牌一樣歷久彌新？我們推測因為撲克牌方便攜帶，而且人數比較不受限制，但海戰棋因為要筆、紙、還要自己畫圖，又只能兩個人玩，因此**遊玩便利**是主要讓遊戲流傳很久的因素。

### (二) 研究 n 階正方形棋盤的最高分排法的規律(9階以上適用)

我們發現由格子的左上開始，**奇數欄的奇數列放四個 O**，**偶數列放四個 x**；**偶數欄的奇數列放四個 x**，**偶數列放四個 O**；最後剩下的空行，如果前一行是空格，**就可以擺一至三格戰艦**，反之則不能擺戰艦，以此規律擺放的四格戰艦最多，分數也最高。

### (三) 推理 n 階正方形棋盤達最高分的公式(13階以上適用)

1. **奇數階公式**：有兩種情況，**得先確認  $[n-(n \bmod 4)]/8$  有沒有餘數**

- (1) **有餘數**，最高分數的公式為  $n \times [n-(n \bmod 4)] \setminus 8 \times 10 + (n \setminus 2 + 1) \times 10 + n \setminus 2 \times (n \bmod 4)$  格戰艦分數。

【例】21階， $[21-(21 \bmod 4)]/8$  有餘數，算法就是2

$1 \times [21 - (21 \bmod 4)] \div 8 \times 10 + (21 \div 2 + 1) \times 10 + 21 \div 2 \times (21 \bmod 4)$  格戰艦分數=645分。

(2) 沒有餘數，最高分數的公式為  $n \times [n - (n \bmod 4)] \div 8 \times 10 + (n \div 2 + 1) \times (n \bmod 4)$  格戰艦分數。

【例】25階， $[25 - (25 \bmod 4)] \div 8$  沒有餘數，算法就是  $25 \times [25 - (25 \bmod 4)] \div 8 \times 10 + (25 \div 2 + 1) \times (25 \bmod 4)$  格戰艦分數=763分。

2. 偶數階公式： $n \div 4 \times 10 \times (n \div 2) + (n \bmod 4)$  格戰艦的分數  $\times (n \div 2)$

【例】22階的算法： $22 \div 4 \times 10 \times (22 \div 2) + (22 \bmod 4)$  格戰艦的分數  $\times (22 \div 2) = 583$ 分。

(四) 設計兩個人玩的桌遊-海洋保衛戰

1. 我們發現試玩的玩家會先放四格戰艦，因為可以減少最後因剩下四格戰艦而被扣分的情況。
2. 大部分的玩家一開始會先亂放，以為空格很多，但是最後兩格戰艦剩下最多。因為先放四格戰艦、再放三格戰艦後，剩下的位置很少，只能再勉強放一格戰艦，導致兩格戰艦剩最多。

## 六、評鑑與檢討

(一) 在設計遊戲棋盤、戰艦及鯨魚大小的時候要用到六下數學比例尺的概念，因為我們有Google地圖使用的經驗，所以我們可以連結生活經驗來應用到遊戲中。

(二) 由於我們沒有3D列印機做，所以我們上網學習做紙船的方式，還要自己不斷的嘗試各種大小才能做出符合比例的戰艦和棋盤。

(三) 不斷測試遊戲的過程中，我們發現一些遊戲bug，所以花很多時間討論、處理、再次測試。

- (四) 希望未來可以給更多玩家來玩，經過玩家們的建議，改良遊戲，或設計出三個人及四個人的玩法。
- (五) 我們的執行進度比原本的計畫還慢，所以我們常需要犧牲下課時間加快進度。
- (六) 我們經過這次經驗，學習了整理資料的方式，讓整個資料看起來更有系統、更明瞭。
- (七) 在想公式的過程中，奇數階的公式比較麻煩，每欄的戰艦有的是 $n^2$ 艘，有的是 $n^2+1$ 艘，第一次想出公式後還要用不同題型測試正確性，發現錯誤還要再討論盲點，並繼續思考。在這次的經驗中，我們學習到在正式發表前，要不斷推敲和驗證。

## 七、資料來源

- (一) 海戰遊戲。維基百科。

<https://reurl.cc/x65MML>

- (二) 經典海戰棋。宅媽科學玩具趣味館。

<https://reurl.cc/Y0g421>

- (三) 綠色和平(2023/9/23)。今天就可以為海洋做的十件事。綠色和平。

<https://reurl.cc/E1R8Mm>

- (四) (2019年5月20日) 奧秘海洋:小小吸管大大危機

<https://reurl.cc/Xm1ZdR>

- (五) 小宮山博仁(2021)。數學實用定理。晨星出版社。