

附件五之一

# 彰化縣 112 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

## 作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

組別：

國小組

數學類

自然、科技類

國中組

人文社會類

作品名稱：真的公平嗎？

-超級井字棋不同版本規則的公平性探究

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

# 彰化縣 112 年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

## 作品說明書

### 第一階段 研究訓練階段

#### 一、近二年學校獨立研究課程之規劃

年級 學期	三年級	四年級	五年級	六年級
上學期	專題研究	獨立研究	獨立研究	獨立研究
下學期	專題研究	獨立研究	獨立研究	獨立研究

#### 二、學校如何提供該生獨立研究訓練

1. 三年級上學期安排專題研究，由老師安排適合學生程度之主題進行探索，並將未來進行獨立研究所需之相關技能安排於課程中，希望學生能透過探索主題的過程學會發現問題、解決問題、尋求資源、資料的歸納延伸、相關資訊處理等能力。
2. 三年級下學期進行專題研究，藉由討論決定研究主題，運用三年級上學期所學之能力完成專題研究。
3. 四年級進行獨立研究，過程中除更加熟悉研究所需相關能力外，更強調獨立研究所需之主動性與問題解決。
4. 五、六年級依據學生特質、研究性質採分組或個別形式進行獨立研究，除強調研究產出外，更加強檢討與批判，對於完成作品與研究進行反思。

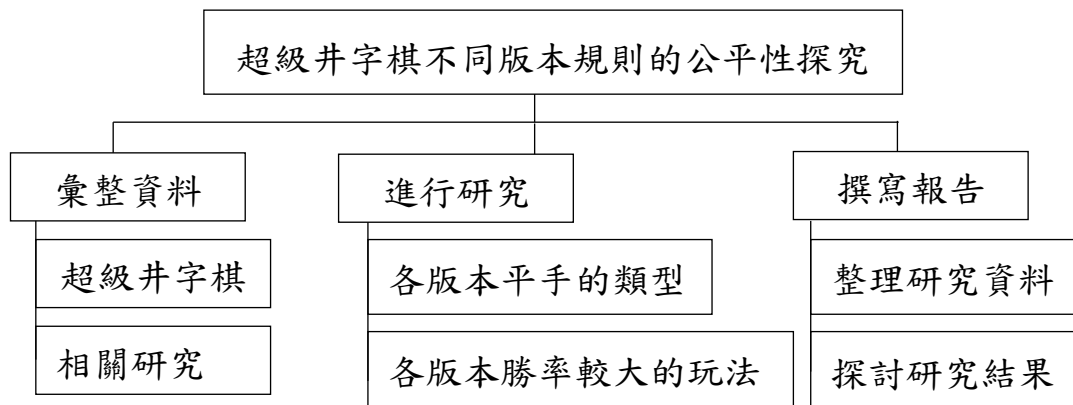
## 壹、研究動機

我們本身就對井字棋十分有興趣，無聊時就會玩這個遊戲。有一次，無意間在網站上看到一個叫超級井字棋的遊戲，它比井字棋更複雜也更有趣，會依版本不同而有不同規則和勝利條件，但都是第一人可先隨意下子，第二人依第一人下子位置下在對應的宮內，不斷重複此過程，直到有人獲勝或所有地方都無法下子。在網路上都說這個遊戲是公平的，且不易平手，使我們很好奇這個遊戲是否像網路上說的一樣，公平且不易平手，於是我們決定進行本次的研究。

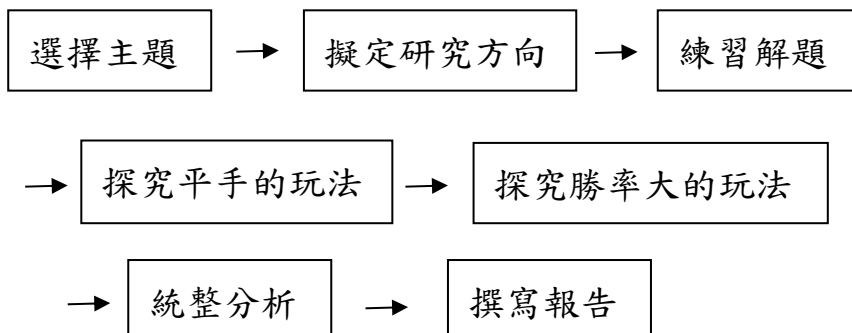
## 貳、擬定正式計畫、研究問題、工作進度表

### 一、擬定正式計畫

#### (一) 研究架構



#### (二) 研究流程



## 二、工作進度表

	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月
討論研究方向	◎								
訂定主題	◎	◎	◎						
查詢資料		◎	◎						
練習下棋		◎	◎						
進行研究				◎	◎	◎	◎		
整理研究結果						◎	◎	◎	
修改並完成報告							◎	◎	◎
交稿									◎

時間	研究進度
三月	討論研究方向
三月、四月、五月	訂定主題
四月、五月	查詢資料
四月、五月	練習下棋
六月、七月、八月、九月	進行研究
八月、九月、十月	整理研究結果
九月、十月、十一月	修改並完成報告
十一月	交稿

## 三、研究問題

- (一) 什麼是超級井字棋？
- (二) 超級井字棋的規則有哪些版本？
- (三) 超級井字棋各版本是否有平手的情況？
- (四) 超級井字棋各版本是否有較高勝率的方法？

## 參、彙整相關文獻

### 一、超級井字棋：

超級井字棋是一種棋盤遊戲，由 9 個井字遊戲板組成，並以 3x3 的網格排列。玩家輪流使用較小的井字遊戲板，直到其中一個贏得較大的井字遊戲板。與傳統的井字遊戲相比，此遊戲中的策略從概念上講更加困難也更具挑戰性。

### 二、各種版本的超級井字棋

	棋盤	規則	獲勝條件 能否平手
版本一	9 個大宮 每大宮為 3x3 的小宮	雙方輪流將一枚己棋放在某區域的任一空格。除先手方第一棋可放在任意區域，其他放的區域方位需與敵方上著放的棋格方位相同。若區域無法下子（如已被填滿），才可下在其他任意區域。區域方位以棋盤的中心區域為基準。棋格方位以該區域的中心格為基準。同色棋子在某區域內先以縱橫斜方向三子連線時，該玩家取得該區域的勝利，此區域以後不能再下子。	先獲得任一直、橫排、對角線上所有區域的勝利者，或區域的勝利較多者獲勝。  平手：能
版本二	9 個大宮 每大宮為 3x3 的小宮	雙方輪流將一枚己棋放在某區域的任一空格。除先手方第一著可放在任意區域，其他著放的區域方位需與敵方上著放的棋格方位相同。若區域無法下子（如已被填滿），才可下在其他任意區域。區域方位以棋盤的中心區域為基準。棋格方位以該區域的中心格	先獲得任一直、橫排、對角線上所有區域的勝利者獲勝  平手：未知

		為基準。同色棋子在某區域內先以縱橫斜方向三子連線時，該玩家取得該區域的勝利，此區域以後能下子。	
版本三	9 個大宮 每大宮為 3x3 的小宮	雙方輪流將一枚己棋放在某區域的任一空格。除先手方第一著可放在任意區域，其他著放的區域方位需與敵方上著放的棋格方位相同。若區域無法下子（如已被填滿），才可下在其他任意區域。區域方位以棋盤的中心區域為基準。棋格方位以該區域的中心格為基準。同色棋子在某區域內先以縱橫斜方向三子連線時，該玩家取得該區域的勝利，此區域以後能再下子，但不再計勝利。	區域的勝利較多者獲勝。  平手:否
版本四	9 個大宮 每大宮為 3x3 的小宮	雙方輪流將一枚己棋放在某區域的任一空格。除先手方第一著可放在任意區域，其他著放的區域方位需與敵方上著放的棋格方位相同。若區域無法下子（如已被填滿），才可下在其他任意區域。區域方位以棋盤的中心區域為基準。棋格方位以該區域的中心格為基準。同色棋子在某區域內先以縱橫斜方向三子連線時，該玩家取得該區域的勝利，此區域以後能在下子，也可再計勝利。	勝利較多者獲勝  平手:未知

### 三、井字棋相關研究

研究主題	研究者	研究內容	與本研究比較
中華民國第 58 屆 中小學科學展覽會 棋盤上的奇蹟-奇 「雞」連連	楊皓程、 吳承瀚、 王元峻、 李秉謙、 曾元庠、 楊健志	了解井字 棋、奇雞連 連及棋蹟連 連的遊戲邏 輯。	用窮舉來找出遊戲邏 輯。本研究也是用窮舉 來找出較高勝率的方法，但本研究主題是超 級井字棋
中華民國第 61 屆 中小學科學展覽會 探討多人玩的井字 棋 Otrio 是否有必 勝方法	黃鼎祐、 陳彥程	探討 2、3、4 人玩 Otrio 的必勝方 法。	設計了下棋機器人，依 場上狀況自動評估得 分。本研究是用窮舉來 找出較高勝率的方法，且本研究主題是超 級井字棋

### 肆、資料分析

為了方便討論，我們把棋盤每個大宮編號成 ABCDEFGHI，小宮裡的小格是 abcdefghi，如下圖：



一、超級井字棋各版本的平手的情況

只要不符合獲勝條件即為平手，我們發現有 2 種平手情況，分別是無連線和小宮有連線。

(一)無連線

四個版本規則的差異在連線後的獲勝條件，能不能繼續連線與能不能繼續畫，所以無連線的情況四個版本沒有差別，總共有 42 種(不含翻轉)。

算法是  $3 \times 5 + 32 - 5 = 42$

3:小宮內的平手局面數

5:可以任選位置

5:整體大宮重複出現的局面數

32:E 宮內的下法

X	0	X
0	0	X
0	X	0

可替換成其它平手下法

無連線的 42 種情形可以以 6 種為代表。這 6 種又可分為兩類。

類別	圖示	說明																											
一		<p>列出 1 個小宮內平手方法</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>0</td><td>X</td><td>0</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>X</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>0</td><td>X</td><td>0</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>0</td><td>X</td><td>0</td></tr> </table> <p>用這個方式，找到 4 格的格子對照成宮，那 4 個宮是先手要畫 5 格的宮，還要再任選 1 宮畫 5 格，(皆是一開始選的平手方式)照著畫。若選到任選的位置，也是先手畫比較多，但使對手去別的宮，不是任選的宮，之後盡量別選到會使對手去任選宮的位置，除非格子滿，只能下會使對手去任選宮的格子，重複</p>	0	X	0	X	X	0	0	0	X	X	0	X	0	0	X	0	X	0	X	0	X	X	0	X	0	X	0
0	X	0																											
X	X	0																											
0	0	X																											
X	0	X																											
0	0	X																											
0	X	0																											
X	0	X																											
X	0	X																											
0	X	0																											





直到填滿。

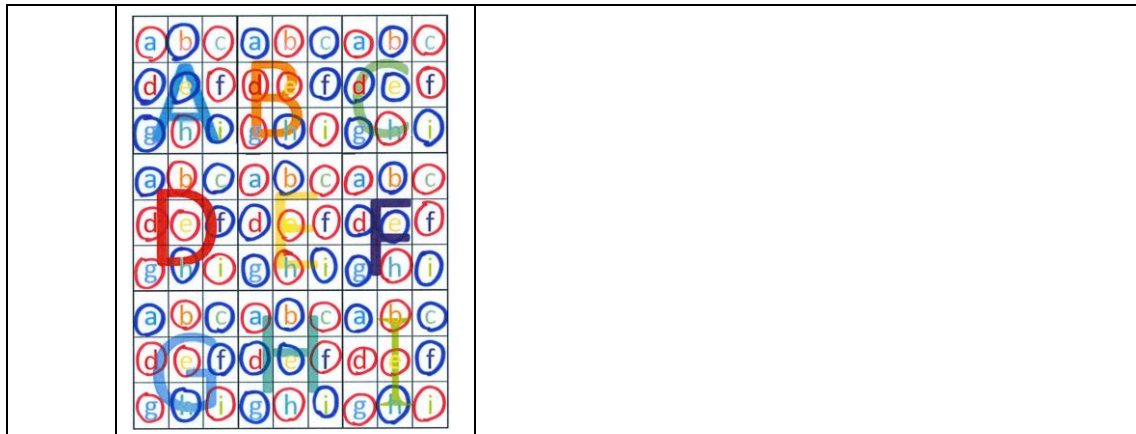
二



用這個圖的方式

X	0	X
0	0	X
0	X	0

找到 4 格的格子對照成宮，那 4 個宮是先手要畫 5 格的宮，還要再 E 宮畫 5 格，(皆是一開始選的平手方式)照著畫。若選到 E 宮，選 1 種平手方式下在 E 宮，也是先手畫比較多，但使對手去別的宮，不是 E 宮，之後盡量別選到會使對手去 E 宮的位置，除非格子滿，只能下會使對手去任選宮的格子，重複直到填滿。



(二)小宮有連線

平手是指雙方皆不符合獲勝條件，只要找到每個版本中皆不符合獲勝條件的情況就好了。

	圖示	說明																											
版本一		<p>一開始先完成一個小宮內的平手，後來雙方連線數一樣，且已完成連線的小宮沒有完成大宮連線。</p> <p>如左圖，有一宮是平手的，並且連線的宮沒呈一條線，雙方連線數一樣。</p>																											
版本二		<p>大宮的連線跟小宮的平手模式一樣，最後就算小宮連線，大宮也無法完成連線。</p> <p>如左圖，照著小宮內平手模式進行。</p> <p>例如：</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>0</td><td>X</td><td>0</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>X</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>0</td><td>X</td><td>0</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr> <tr><td>0</td><td>X</td><td>0</td></tr> </table>	0	X	0	X	X	0	0	0	X	X	0	X	0	0	X	0	X	0	X	0	X	X	0	X	0	X	0
0	X	0																											
X	X	0																											
0	0	X																											
X	0	X																											
0	0	X																											
0	X	0																											
X	0	X																											
X	0	X																											
0	X	0																											

<p>版本三</p>		<p>先出現一個平手的小宮，雙方連線數一樣，就會平手。</p> <p>如左圖，有一宮平手，並且雙方連線數一樣。</p>
<p>版本四</p>		<p>雙方連線數一樣，就會平手。</p> <p>如左圖，有兩宮平手，並且雙方連線數一樣。</p>

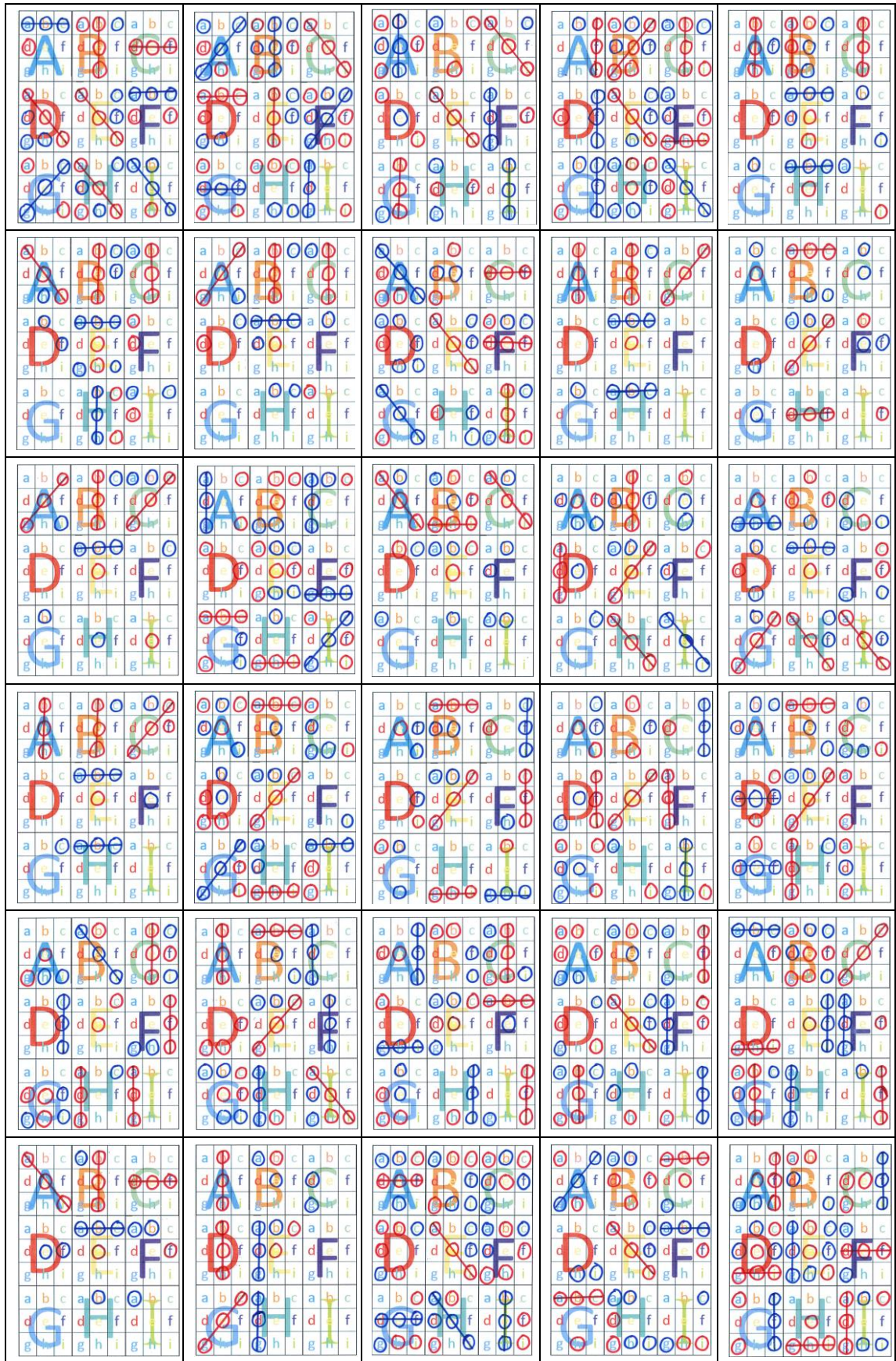
## 二、超級井字棋各版本較高勝率的方法

### (一)版本一

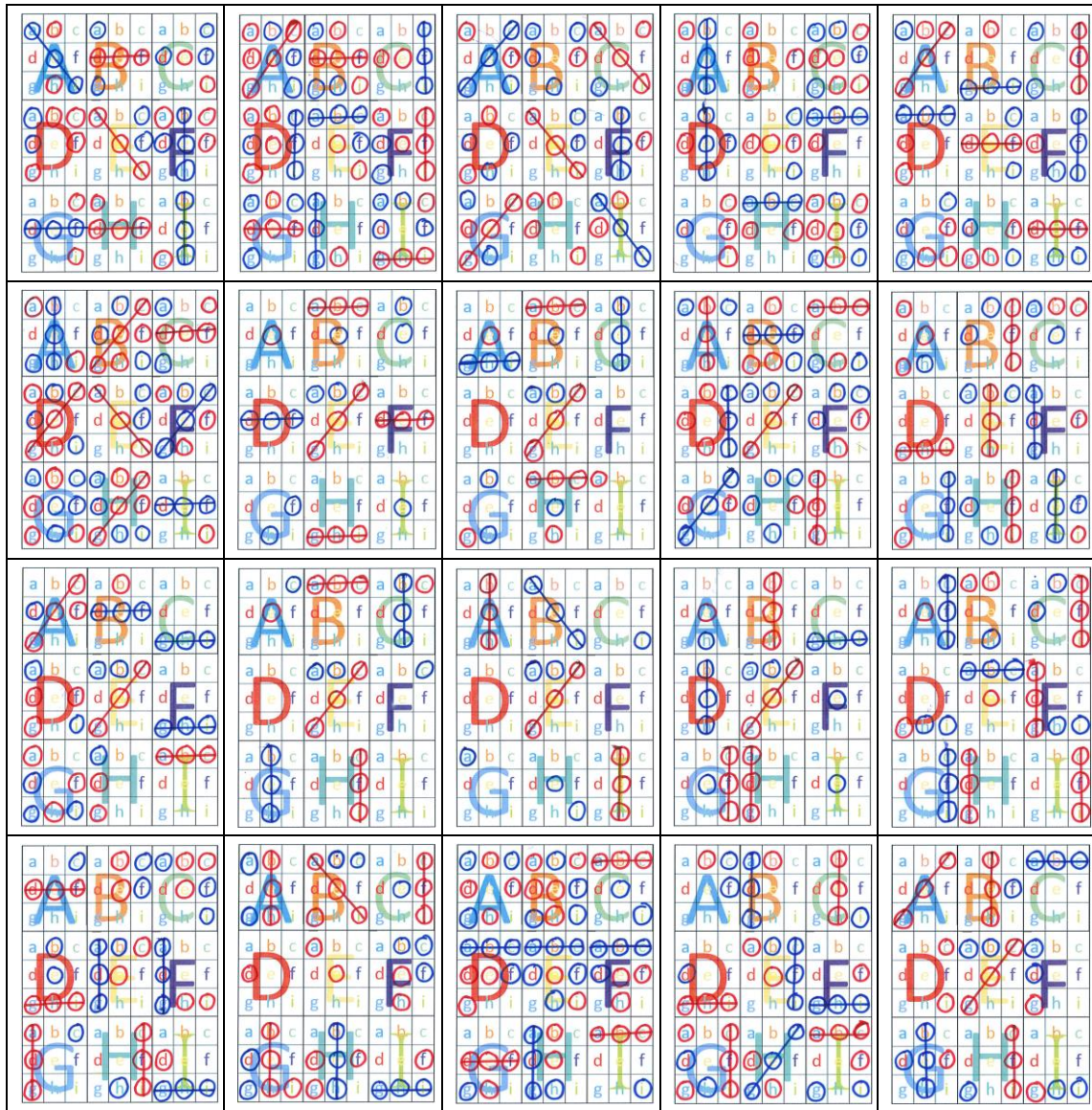
先下 Ee，之後對手不論下哪格都下 e 格，直到對手快連線，再下能讓對手去到他下的宮的格子，之後對手不論下哪格都下能使對手去他剛才下的宮，直到對手快連線，在下其他格，之後盡量別下之前下的宮。重複 3 次對手易連線。

我們用這個玩法對戰 50 次來計算勝率，50 次中獲勝 46 次，勝率是 92/100，遠大於一半，以下是我們的對戰紀錄。









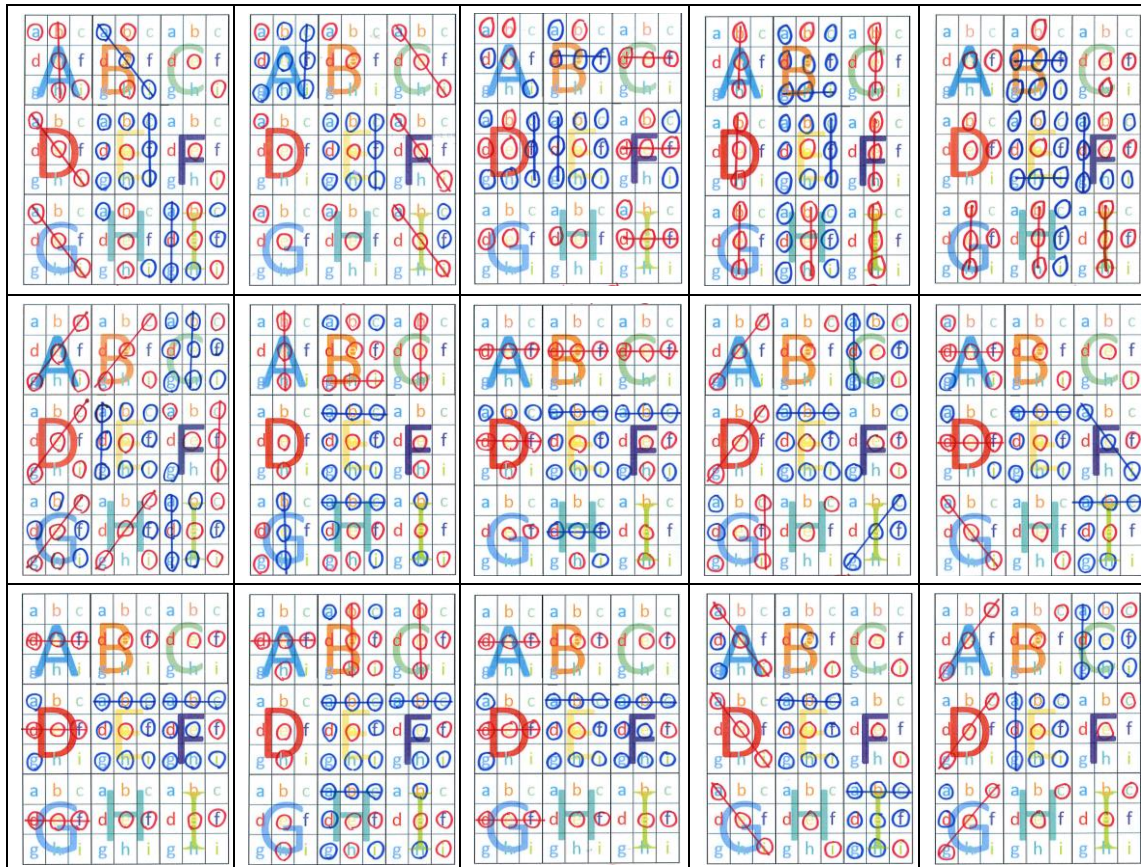
## (二)版本二

先下 Ee，之後對手不論下 E 宮哪格，都下 e 格，直到對手下到 E 宮的最後一格，再下能讓對手去到他下的宮的格子，如 Aa、Ii、Dd，再一直使對手在那宮，直到對手下 e 格，然後選 2 個宮連成線會通過 E 格且不含剛才宮，之後選其中一宮，若那宮還有能讓對手去他剛才下 e 格的宮的格子，例：剛才對手下在 I 宮，那宮裡面有下 i，就直接選在剛才決定下的宮裡能使對手去那宮的格子，如 Bb、Hh、Ff，若無則選剛才能讓對手去他剛才下 e 格的宮的格子，例：剛才下 I 宮，就下 i，直到對手選中這宮，再下能讓對手去到他下的宮的格子，如

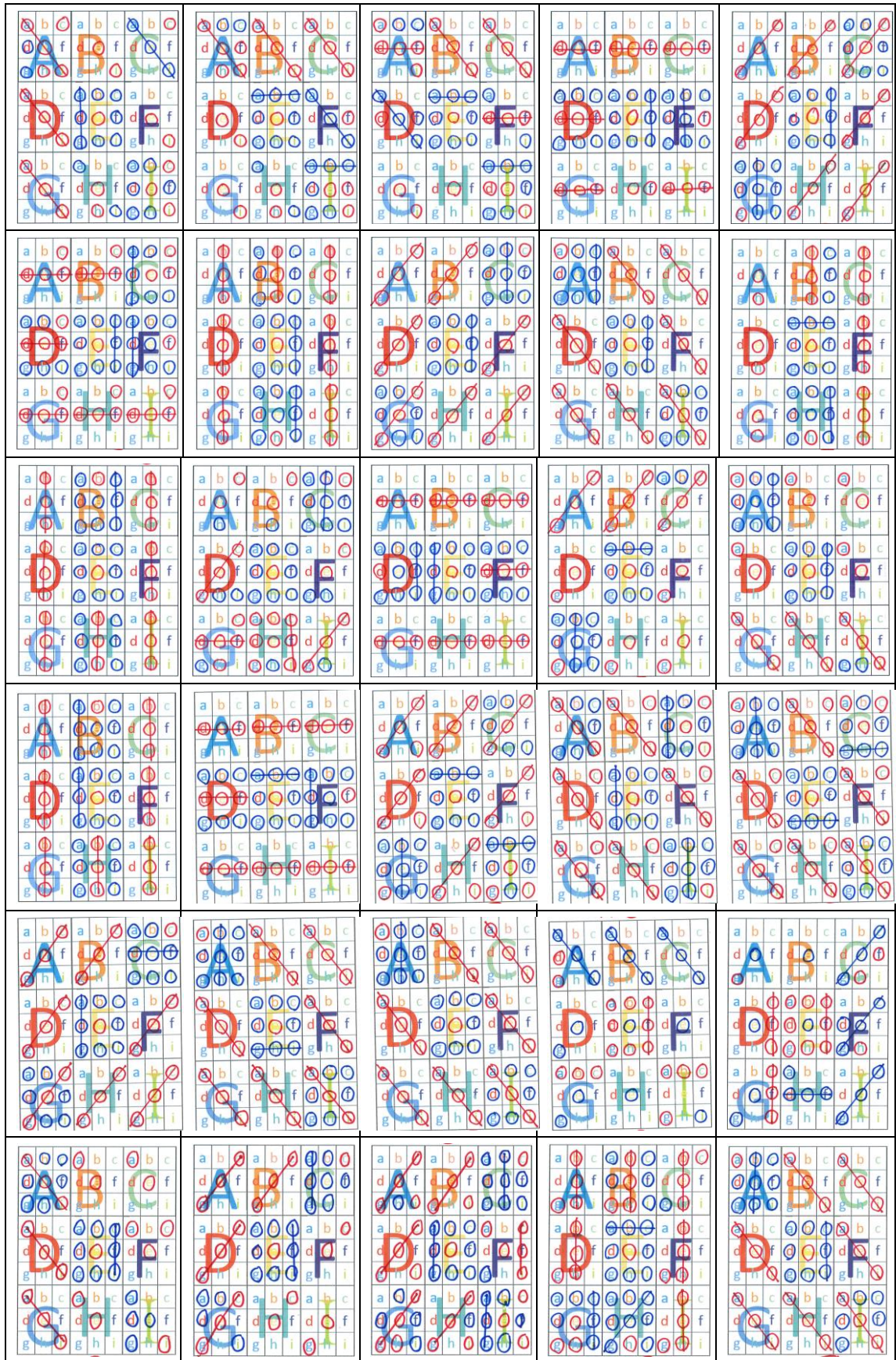


Aa、Ii、Dd，然後一直選使對手去這宮的格子，例：剛才下 I 宮，就下 i，直到他選這宮的最後一格。再看那宮有沒有能使對手去第二個要下的宮的格子。如果有就下能讓對手去到他下的宮的格子。若無則下能使對手去第二個要下的宮的格子，直到他選到這宮，再一直選能讓對手去到他下的宮的格子，直到他選能重新選的位置，再選之前想選的宮，若有下 2 個能使對手去之前他下過的宮的格子，就選在剛才決定下的宮裡能使對手去那宮的格子，如 Bb、Hh、Dd，若無則選能使對手去之前他下過的宮的格子，例：剛才下 I 宮，就下 i，直到他選這宮，再選能讓對手去到他下的宮的格子，如 Bb、Ii、Dd。再一直使對手在那宮。

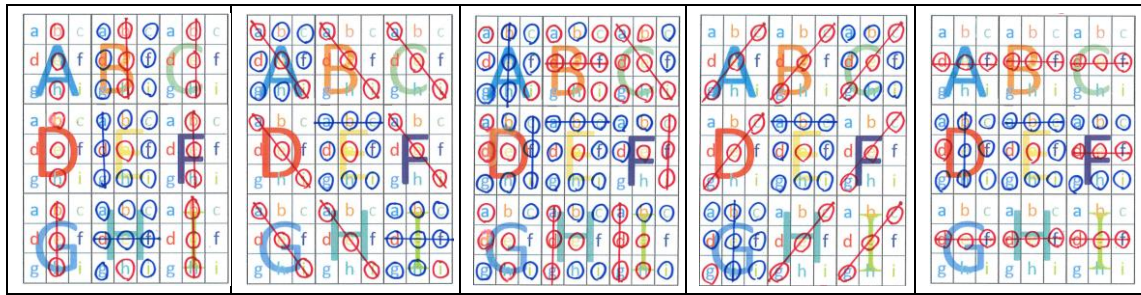
我們用這個玩法對戰 50 次來計算勝率，50 次中獲勝 50 次，勝率是 100/100，遠大於一半，以下是我們的對戰紀錄。









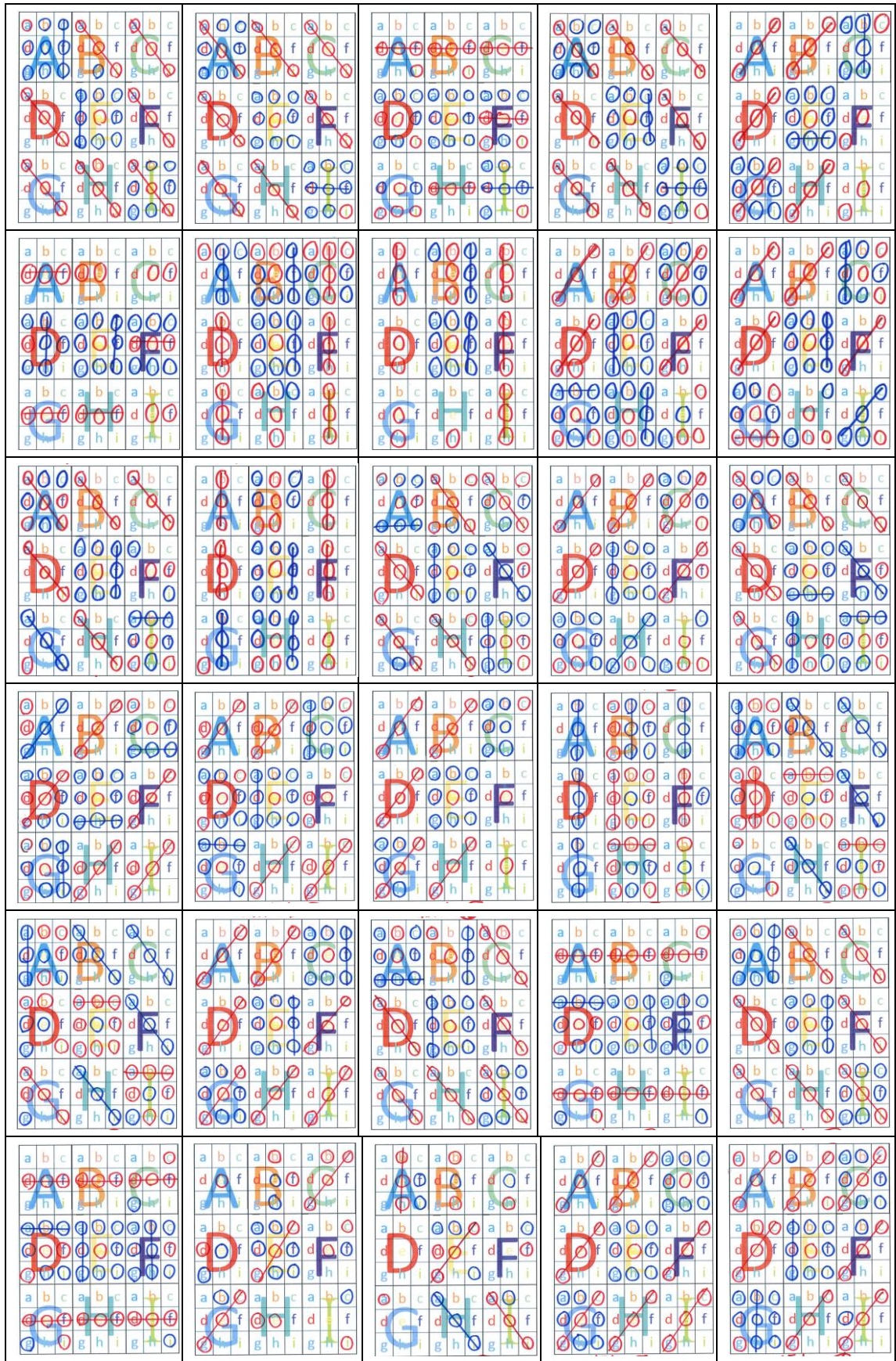


### (三)版本三

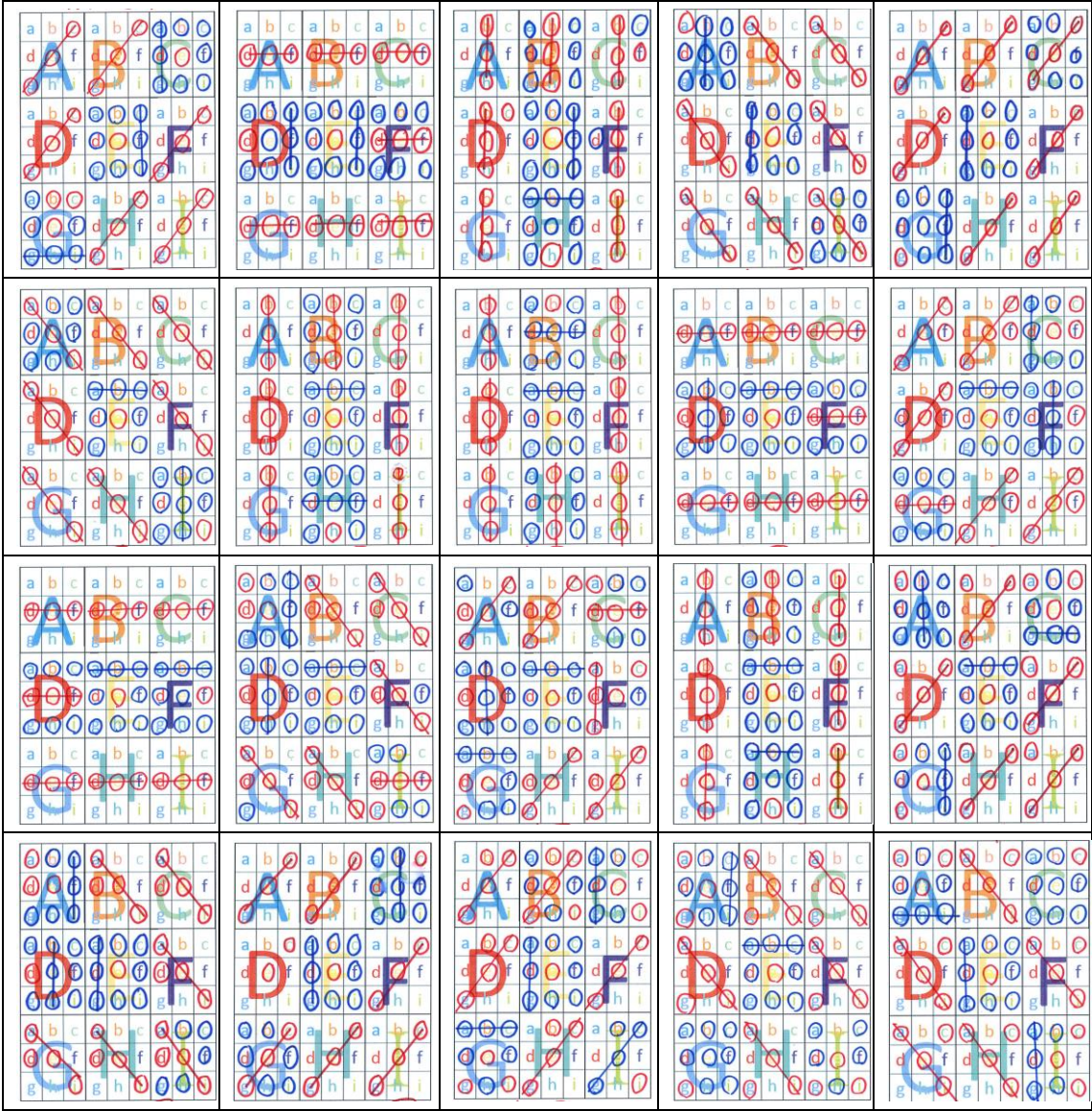
先下 Ee，之後對手不論下 E 宮哪格，都下 e 格，直到對手下到 E 宮的最後一格，再下能讓對手去到他下的宮的格子，如 Aa、Ii、Dd，再一直使對手在那宮，直到對手下 e 格然後選 2 個宮連成線會通過 E 格且不含剛才宮，之後選其中一宮，若那宮還有能讓對手去他剛才下 e 格的宮的格子，例：剛才對手下在 I 宮，那宮裡面有下 i，就直接選在剛才決定下的宮裡能使對手去那宮的格子，如 Bb、Hh、Ff，若無則選剛才能讓對手去他剛才下 e 格的宮的格子，例：剛才下 I 宮，就下 i，直到對手選中這宮，再下能讓對手去到他下的宮的格子，如 Aa、Ii、Dd，然後一直選使對手去這宮的格子，例：剛才下 I 宮，就下 i，直到他選這宮的最後一格。再看那宮有沒有能使對手去第二個要下的宮的格子。如果有就下能讓對手去到他下的宮的格子。若無則下能使對手去第二個要下的宮的格子，直到他選到這宮，再一直選能讓對手去到他下的宮的格子，直到他選能重新選的位置，再選之前想選的宮，若有下 2 個能使對手去之前他下過的宮的格子，就選在剛才決定下的宮裡能使對手去那宮的格子，如 Bb、Hh、Dd，若無則選能使對手去之前他下過的宮的格子，例：剛才下 I 宮，就下 i，直到他選這宮，再選能讓對手去到他下的宮的格子，如 Bb、Ii、Dd。再一直使對手在那宮。

我們用這個玩法對戰 50 次來計算勝率，50 次中獲勝 50 次，勝率是 100/100，遠大於一半，以下是我們的對戰紀錄。





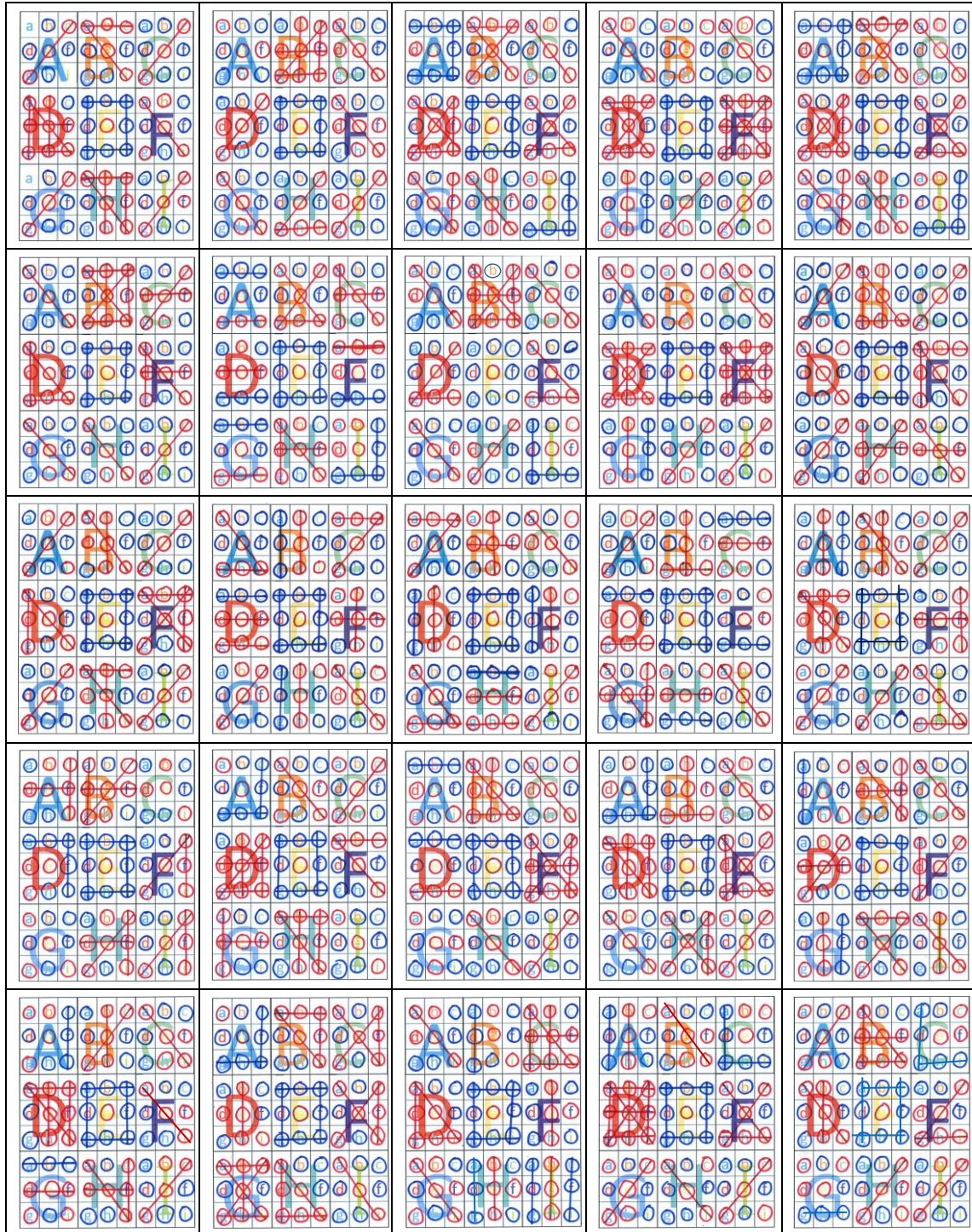




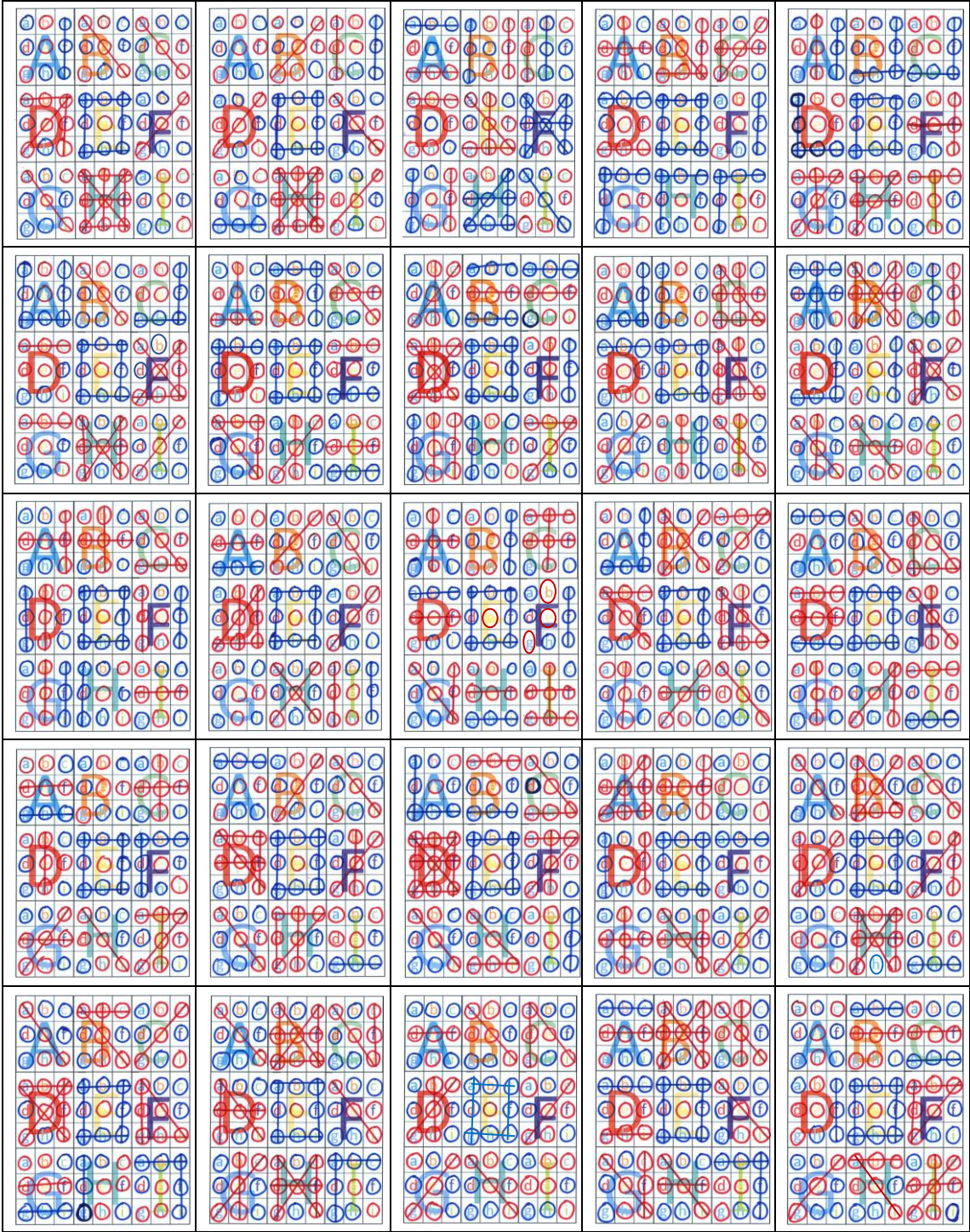


#### (四)版本四

先下 Ee 之後一直下 e 格，直到讓對手重新選，之後儘量斜著連。  
我們用這個玩法對戰 50 次來計算勝率，50 次中獲勝 47 次，勝率是 94/100，遠大於一半，以下是我們的對戰紀錄。







## 伍、研究結果與討論

### 一、超級井字棋各版本是否有平手的情況

- (一)平手是指雙方皆不符合獲勝條件，各版本中平手情況有全無連線與小宮有連線兩種情況。
- (二)全無連線的平手情形共有 42 種，其中可以六種為代表，這六種依據小宮內的平手模式又可分為二類。
- (三)小宮內有連線情況，依據各版本的規則最後還是會有平手的情形。
- (四)網路資料介紹超級井字棋有些沒有平手情形，但經過研究後發現四個版本都有平手的情形。

### 二、超級井字棋各版本是否有較高勝率的方法

- (一)版本一較高勝率的下法，先手盡量使後手只能下在 E 宮，幫自己爭取較多 e 格，因為通過 E 宮可以有 4 條連線，所以也要盡量防止後手完成 E 宮連線。
- (二)版本二、版本三、版本四較高勝率的下法，都是先手控制後手只能下在 E 宮，幫自己爭取較多 e 格。
- (三)超級井字棋 e 格通過的連線數最多，連線數多更容易獲勝，使對手一直在 E 宮便可讓自己佔領更多 e 格，所以四個版本的獲勝方法都是佔領更多 e 格。
- (四)四個版本都有先手優勢，只要先手下 Ee，後續就能一直下各小宮內的 e 格，便容易獲勝。
- (五)網路資料介紹超級井字棋的公平性很高，但經過研究發現，不管是哪一個版本的規則都有先手優勢，掌握關鍵下法就能有較高的勝率，所以此遊戲並沒有資料中所說的公平性很高。

## 陸、評鑑與檢討

### 一、尋找主題

在尋找研究主題的時候，我們透過網頁找到了超級井字棋，試玩一下認為很有趣。因為在這個階段花太多時間去尋找跟確認要做的主題，一再地選擇，所以壓縮了很多研究過程的時間，時間壓力很大，差點無法完成，所以我們學到了決定研究主題雖然很重要的，但也不要浪費太多時間在這部分。

### 二、尋找資料

尋找資料時資料的數量非常少，而且很多資料都是重複的，很難判斷哪些是需要的，花了很多時間檢視資料。所以我們了解到尋找資料時需要範圍明確。

### 三、進行研究

一開始進行研究的時候覺得很有趣，因為我們對下棋很有興趣，但後來開始大量重複的下棋，令我們厭煩，發現錯誤或重複還要再下，也因為來自不同學校而難以討論，得抽空討論或在群組上討論，但群組上討論沒有比面對面討論清楚，所以我們學到有困難得花更多時間想辦法，及在檢查時不可懈怠，否則會事倍功半。

### 四、綜合部分

在進行這次研究，我們學到時間掌控、整理資料及解決問題的能力，也了解了不要在研究時懈怠和尋找資料的要點。跨校讓研究很不方便，在不同學校能使用 LINE 和 MEET 溝通討論，但訊息不一定會看到，所以我們找時間相聚一起討論。有時發派事情可能不做，所以自己會先做一點。

本研究探討了超級井字棋的公平性及能否平手，我們在過程中有想到透過修改規則提高公平性，但因時間的關係未能做到，下次有機會一定會再做。

## 柒、參考資料

1. 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連
2. 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會探討多人玩的井字棋 Otrio 是否必有必勝方法
3. <https://www.youtube.com/watch?v=qiiQF6fs8kQ>  
小學生瘋玩、難倒大人的「超級井字棋」遊戲玩法說明與示範
4. <https://amathing.world/tic-tac-ku/>  
超級井字棋 ~Tic-Tac-Ku~
5. <https://www.geogebra.org/m/aghraxfy>  
終極井字遊戲 Ultimate tic-tac-toe
6. <https://www.youtube.com/watch?v=wu0RSp36mEk>  
終極井字遊戲
7. <http://zoyo.tw/game-20210603/>  
終極井字遊戲：把圈叉棋變得難一點，玩久一點
8. <https://forum.gamer.com.tw/Co.php?bsn=18673&sn=642955>  
「Ultimate tic tac toe - 終極井字遊戲」