第一階段　研究訓練階段

一、 近二年學校獨立研究課程之規劃

近二年，獨立研究已發展成本校資優生的必修課程，並由輔導室負責規劃課程，其具體內容如下：

（一）上課時段

國一：每週一下午第五節彈性課程時間。

國二：每週三下午第五節彈性課程時間。

國三：每週三下午第五節彈性課程時間。

（二）上課地點

國一：資優教室。

國二：生物實驗室、理化實驗室、電腦教室、圖書館、資源教室、語文藝術教室。

國三：資優教室。

（三）核心能力

1. 國一

在老師的引導下：

(1) 能學會發現問題並積極蒐集相關資料。

(2) 能學會擬定架構與分析資料。

(3) 能統整研究資料與撰寫報告。

2. 國二

資優生自己選定數學、自然與生活科技、人文社會中，感興趣的主題，依據發現問題、資料蒐集、分析、統整、撰寫報告之能力，完成一份獨立研究報告。

3. 國三

(1) 發現問題、資料蒐集、分析、統整、撰寫報告之經驗傳承。

(2) 根據獨立研究主題，培養高中科學班人才。

（四）上課方式

1. 針對資優生的類別及特殊需要，將其學習經驗加以系統化組織。
2. 採分組教學，以安排適當的學習課程及活動，俾利資優生學習，獨立研究強調學生經由引導後，能根據自己的興趣，選擇研究主題，擬定研究計畫，並以適切的研究方法，進行資料蒐集、分析與解釋，以培養其獨立研究的能力。
3. 每週安排一節，邀請校內各領域教師指導資優生。
4. 安排兩次校外專家學者蒞校指導。
5. 配合校慶舉辦成果發表。

（五）檢核機制

每位資優生必須完成獨立研究作品，並在期末進行成果報告，期間，校方也積極鼓勵資優生將其作品參與獨立研究競賽。

二、 學校如何提供該生獨立研究訓練

（一）指導資優生訂定研究主題與資料蒐集

指導資優生從日常生活或各領域的學習內容中，覺察自己較感興趣的主題，接著訓練資優生自行訂定題目，與教師討論並確認題目後，著手進行資料蒐集與研讀討論資料內容。

（二）指導資優生擬定研究架構與分析資料

首先引導資優生思考研究動機，進而訂出研究目的以及待答問題，並討論以何種研究法進行研究，最後歸納研究心得，並能將各項討論過程系統記錄。

（三）指導資優生統整研究資料與撰寫報告

指導資優生能依獨立研究之摘要、主題、工作進度、研

究問題、尋找資源、研究發現、擬定正式計畫及研究問題、提出研究結果，以及對整個研究的評鑑與檢討，作一系統地撰寫，提出完整研究報告。

（四）提供行政支援

1. 場地支援

校方於每日課後或假日，提供教室、討論室、實驗室，協助研究團隊進行獨立研究。

2. 設備支援

因應獨立研究主題，提供必要實驗設備、模型與電腦等研究器材，以方便研究團隊進行獨立研究。

3. 經費支援

專款支付校外專家學者蒞校演講獨立研究相關主題之演講費與差旅費。

第二階段　獨立研究階段

一、研究動機

前一陣子，看到學長學姊為了去參加由九九文教基金會所舉辦的 JHMC 數學競賽，練習了許多歷屆試題，看到他們如此的認真，我們也湊過去看了看題目，看幾題後覺得很有趣，所以就跟老師拿了幾屆試題來練習，其中在 2019 年第 17 屆 JHMC 國中數學競賽個人賽第三回的題目，有一題引起我們的興趣，原題目內容如下：若一等差數列，其「前 4n 項的和」比「前 n 項的和」多 180，則前 5n 項和為多少？我們原本利用暴力解法花了很多時間才解出，後來老師提醒我們一句話:「等差數列第 1 項到第 n 項的和，第 n+1 項到第 2n 項的和，第 2n+1 項到第 3n 項的和…依此類推可得一個新的等差數列。」從這個方向思考解題較簡單又快速，不到五秒就解開了題目，為了更加了解數列的奧妙，於是展開了本次的獨立研究。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

我們的研究問題如下

1. 一個等差(比)數列的每一項乘上一個(非 0)常數後，新數列是否仍然是等差(比)數列，公差(比)有何變化？
2. 一個等差數列的每一項加上一個常數後，新數列是否仍然是等差數列，公差有何變化？
3. 將二個等差數列的第 n 項相加後，新數列是否仍然是等差數列，公差有何變化？
4. 將二個等比數列的第 n 項相乘後，新數列是否仍然是等比數列，公比有何變化？
5. 將一個等差數列的第 1~m 項相加，第(m+1)~(2m)項相加，第(2m+1)~(3m)項相加……形成一個新數列，新數列是否仍然是等差數列，公差有何變化？
6. 將一個等比數列的第 1~m 項相乘，第(m+1)~(2m)項相乘，第

(2m+1)~(3m)項相乘……形成一個新數列，新數列是否仍然是等比數列，公比有何變化？

7. 我們將一個等差(比)數列重新排列成矩形的形狀，從中找尋新的等差(比)數列，並探討公差(比)有何變化？
8. 我們將一個等差(比)數列重新以 S 形的排列方式，排列成矩形的形狀，從中找尋新的等差(比)數列，並探討公差(比)有何變化？

（一） 第 1 週：2020 年 3 月 1 日~2020 年 3 月 7 日之進度為
確定研究方向與主題。

（二） 第 2 週：2020 年 3 月 8 日~2020 年 3 月 14 日之進度為
上網收集相關資料與文獻探討。

（三） 第 3 週：2020 年 3 月 15 日~2020 年 3 月 21 日之進度為
學習等差(比)數列的基本性質。

（四）第 4 週：2020 年 3 月 22 日~2020 年 3 月 28 日之進度為
繼續上網收集相關資料與學習等差(比)數列的基本性質。

（五）第 5 週：2020 年 3 月 29 日~2020 年 4 月 4 日之進度為
與同學討論分享一週來的收穫。

（六）第 6 週：2020 年 4 月 5 日~2020 年 4 月 11 日之進度為
與老師討論大家找到的新數列。

（七）第 7 週：2020 年 4 月 12 日~2020 年 4 月 18 日之進度為
繼續與老師討論大家找到的新數列。

（八）第 8 週：2020 年 4 月 19 日~2020 年 4 月 25 日之進度為
學習、練習用 word 打出各種數學符號。

（九）第 9 週：2020 年 4 月 26 日~2020 年 5 月 2 日之進度為
打字整理目前所發現的性質、定理。

（十）第 10 週：2020 年 5 月 3 日~2020 年 5 月 9 日之進度為
探討將數列重新排成矩形的情形。

（十一）第 11 週：2020 年 5 月 10 日~2020 年 5 月 16 日之進度為

探討將數列以S形排列方式，重新排成矩形的情形。

（十二）第12週：2020年5月17日~2020年5月23日之進度為
彙整研究成果、撰寫獨立研究報告。

（十三）第13週：2020年5月24日~2020年5月30日之進度為
學校段考休息一週，進度暫停。

（十四）第14週：2020年5月31日~2020年6月6日之進度為
彙整研究成果、撰寫獨立研究報告。

（十五）第15週：2020年6月7日~2020年6月13日之進度為
評鑑、檢討、省思與收穫。

（十六）第16週：2020年6月14日~2020年6月20日之進度為
校內成果發表。

工作進度甘特圖如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
形成研究問題	■	■														
文獻探討		■	■													
資料分析				■	■	■	■	■	■	■	■	■	■			
推導一般情形結果												■	■	■		
撰寫研究報告											■	■	■	■		
評鑑、檢討、省思															■	
校內成果發表																■

三、彙整相關文獻

在寒假決定做這相關問題的研究時，我們利用網路搜尋了許多資料，但並無發現相關的研究報告。也查了許多科展作品，同樣並無相關的研究報告，也許我們是最早研究此問題的人。在參考網路上一些等差(比)數列的知識後，便著手本獨立研究，尋求出新數列並找出其公差(比)。

四、資料分析

定理 1

如果數列a_1、a_2 、$a_3 \cdots a_n$ 是等差數列，公差是 d，$c \in R$

則數列ca_1、ca_2、$ca_3 \cdots ca_n$　也是等差數列，其公差為 cd。

證明:

$ca_{k+1} - ca_k$

$=c[(a_k + d) - a_k]$

$=c(a_k + d - a_k)$

$=cd$

定理 1.1

如果數列a_1、a_2 、$a_3 \cdots a_n$　是等比數列，公比是 r，$c \in R$

則數列ca_1、ca_2、$ca_3 \cdots ca_n$　也是等比數列，其公比為 r。

證明:

$$\frac{ca_{k+1}}{ca_k} = \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = r$$

定理 2

如果數列a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$是等差數列，公差d_a；數列b_1、b_2、$b_3 \cdots b_n$是等差數列公差d_b。

令$c_1=a_1 + b_1$ 、$c_2=a_2 + b_2$ 、$c_3=a_3 + b_3$ $\cdots c_n=a_n + b_n$ 則數列c_1、c_2、$c_3 \cdots c_n$也是等差數列，公差為d_a+d_b。

證明:

$c_{k+1}-c_k$

$=(a_{k+1}+b_{k+1})-(a_k+b_k)$

$=(a_{k+1}-a_k)+(b_{k+1}-b_k)$

$=[(a_k+d_a)-a_k]+[(b_k+d_b)-b_k]$

$=d_a+d_b$

推論 2.1

如果數列a_1、a_2、$a_3\cdots a_n$是等差數列公差 d;b 是個常數。令 $c_1=a_1+b$、$c_2=a_2+b$、$c_3=a_3+b\cdots c_n=a_n+b$ 則數列c_1、c_2、$c_3\cdots c_n$也是等差數列,公差為 d。

證明:由定理 2 令等差數列$b_1=b$、$b_2=b$、$b_3=b\cdots b_n=b$。則可得證。

推論 2.2

如果數列a_{11}、a_{12}、$a_{13}\cdots a_{1n}$是等差數列公差d_{a1},數列a_{21}、a_{22}、$a_{23}\cdots a_{2n}$是等差數列公差d_{a2},數列a_{31}、a_{32}、$a_{33}\cdots a_{3n}$是等差數列公差$d_{a3}\cdots$ 數列a_{k1}、a_{k2}、$a_{k3}\cdots a_{kn}$是等差數列公差d_{ak},令$c_1=a_{11}+a_{21}+a_{31}+\cdots+a_{k1}$,$c_2=a_{12}+a_{22}+a_{32}+\cdots+a_{k2}$,$c_3=a_{13}+a_{23}+a_{33}+\cdots+a_{k3}$ $\cdots$則數列c_1、c_2、$c_3\cdots c_n$也是等差數列,公差為$d_{a1}+d_{a2}+d_{a3}+\cdots+d_{ak}$。

定理 2.3

如果數列a_1、a_2、$a_3\cdots a_n$是等比數列公比r_a;數列b_1、b_2、$b_3\cdots b_n$是等比數列公比r_b。令$c_1=a_1b_1$ 、$c_2=a_2b_2$ 、$c_3=a_3b_3$ $\cdots c_n=a_nb_n$ 則數列c_1、c_2、$c_3\cdots c_n$也是等比數列,公比為r_ar_b。

證明:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{a_kb_k}=\frac{a_{k+1}}{a_k}\times\frac{b_{k+1}}{b_k}=r_ar_b$$

推論 2.4

如果數列a_{11}、a_{12}、$a_{13}\cdots a_{1n}$是等比數列公比r_{a1}，數列a_{21}、a_{22}、$a_{23}\cdots a_{2n}$是等比數列公比r_{a2}，數列a_{31}、a_{32}、$a_{33}\cdots a_{3n}$是等比數列公比$r_{a3}\cdots$ 數列a_{k1}、a_{k2}、$a_{k3}\cdots a_{kn}$是等比數列公比r_{ak}，

令c_1=$a_{11}\times a_{21}\ \times a_{31}\times\cdots\times a_{k1}$，$c_2$=$a_{12}\times a_{22}\ \times a_{32}\times\cdots\times a_{k2}$，$c_3$=$a_{13}\times a_{23}\ \times a_{33}\times\cdots\times a_{k3}$ …則數列c_1、c_2、$c_3\cdots c_n$也是等比數列，公比為$r_{a1}\times r_{a2}\times r_{a3}\times\cdots\times r_{ak}$。

定理 3

如果數列a_1、a_2 、$a_3\cdots a_n$ 是等差數列公差是 d，則數列

a_p、a_{p+m}、a_{p+2m}、$a_{p+3m}\cdots$ 是等差數列，其公差 md。

證明:

$a_{p+(k+1)m}-a_{p+km}$

$=[a_1+(p+km+m-1)d]+[a_1+(p+km-1)d]$

$=md$

定理 3.1

如果數列a_1、a_2 、$a_3\cdots a_n$ 是等比數列公比是 r，則數列

a_p、a_{p+m}、a_{p+2m}、$a_{p+3m}\cdots$ 是等比數列，其公比為r^m。

證明:

$\frac{a_{p+(k+1)m}}{a_{p+km}}=\frac{a_1\cdot r^{p+(k+1)m-1}}{a_1\cdot r^{p+km-1}}=r^m$

定理 4

如果數列a_1、a_2 、$a_3\cdots a_n$ 是等差數列公差是 d。

我們令$b_1=a_1+a_2+\cdots+a_m$，即原等差數列前 m 項的和。

$b_2=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}$，即原等差數列第 m+1 項到 2m 項的和。$b_3=a_{2m+1}+a_{2m+2}+\cdots+a_{3m}$，即原等差數列第 2m+1

項到 3m 項的和。依此類推，第 s 項$b_s = a_{(s-1)m+1} + a_{(s-1)m+2} + \cdots + a_{sm}$，即原等差數列第(s-1)m+1 項到 sm 項的和。則數列b_1、b_2、$b_3 \cdots b_p$是等差數列，公差為$m^2 d$。

證明:

$b_{k+1} - b_k = [a_{km+1} + a_{km+2} + \cdots + a_{(k+1)m}] - [a_{(k-1)m+1} + a_{(k-1)m+2} + \cdots + a_{km}] =$

$[a_{km+1} - a_{(k-1)m+1}] + [a_{km+2} - a_{(k-1)m+2}] + \cdots + [a_{(k+1)m} - a_{km}]$

$= md + md + md + \cdots + md = m^2 d$

定理 4.1

如果數列a_1、a_2 、$a_3 \cdots a_n$ 是等比數列公比是 r。

我們令$b_1 = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_m$，即原等比數列前 m 項的積。

$b_2 = a_{m+1} \times a_{m+2} \times \cdots \times a_{2m}$，即原等比數列第 m+1 項到 2m 項的積。$b_3 = a_{2m+1} \times a_{2m+2} \times \cdots \times a_{3m}$，即原等數列第 2m+1 項到 3m 項的積。依此類推，第 k 項$b_k = a_{(k-1)m+1} \times a_{(k-1)m+2} \times \cdots \times a_{km}$，即原等比數列第(k-1)m+1 項到 km 項的積，則數列b_1、b_2、$b_3 \cdots b_p$是等比數列，公比為r^{m^2}。

證明:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{a_{km+1} \times a_{km+2} \times \cdots \times a_{(k+1)m}}{a_{(k-1)m+1} \times a_{(k-1)m+2} \times \cdots \times a_{km}} = \frac{a_{km+1}}{a_{(k-1)m+1}} \times \frac{a_{km+2}}{a_{(k-1)m+2}} \times \cdots \times \frac{a_{(k+1)m}}{a_{km}}$$

$= r^m \times r^m \times \cdots \times r^m = r^{m^2}$

若數列a_1、a_2 、$a_3 \cdots a_n$是一個公差為 d 的等差數列，我們將它重新排列成下面矩形的形狀(此矩形每列有 m 行)，我們發現這裡面隱藏許多等差數列。

a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 $\cdots$ a_m

a_{m+1} 、 a_{m+2} 、 a_{m+3} 、 a_{m+4} $\cdots$ a_{2m}

a_{2m+1} 、 a_{2m+2} 、 a_{2m+3} 、 a_{2m+4} $\cdots$ a_{3m}

$$\vdots$$

a_{pm+1} 、 a_{pm+2} 、 a_{pm+3} 、 a_{pm+4} ⋯ $a_{(p+1)(m)}$

$$\vdots$$

為了方便討論，我們將此等差數列所形成的矩形稱為:「矩形[A]」並將矩形[A]的元素重新命名。

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 = a_{1,1} & a_2 = a_{1,2} & a_3 = a_{1,3} & \cdots & a_m = a_{1,m} \\
a_{m+1} = a_{2,1} & a_{m+2} = a_{2,2} & a_{m+3} = a_{2,3} & \cdots & a_{2m} = a_{2,m} \\
a_{2m+1} = a_{3,1} & a_{2m+2} = a_{3,2} & a_{2m+3} = a_{3,3} & \cdots & a_{3m} = a_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{pm+1} = a_{(p+1),1} & a_{pm+2} = a_{(p+1),2} & a_{pm+3} = a_{(p+1),3} & \cdots & a_{(p+1)m} = a_{(p+1),m} \\
 & & \vdots & &
\end{array}
$$

定理 5.1

矩形[A]的任一列，都是一個等差數列，其公差為 d。

證明：以第 s 列為例。第 s 列是$a_{s,1}$、$a_{s,2}$、$a_{s,3}$、⋯、$a_{s,m}$

$a_{s,k+1} - a_{s,k} = a_{(s-1)m+(k+1)} - a_{(s-1)m+k} = d$。

定理 5.2

矩形[A]的任一行，都是一個等差數列，其公差為 md。

證明：由定理 3 可證明[A]的第 j 行$a_{1,j}$、$a_{2,j}$、$a_{3,j}$⋯是一等差數列。

證明：$a_{k+1,j} - a_{k,j} = a_{km+j} - a_{(k-1)m+j} = md$

定理 5.3 從矩形[A]的左上角向右下 45 度畫一線，經過的數成等差數列，即$a_{1,1}$、$a_{2,2}$、$a_{3,3}$、$a_{4,4}$⋯成等差數列，其公差為(m+1)d。

證明：$a_{k+1,k+1} - a_{k,k} = a_{km+k+1} - a_{(k-1)m+k} = (m+1)d$

推論 5.4 從矩形[A]的右上角向左下 45 度畫一線，經過的數成等差數列，即$a_{1,m}$、$a_{2,(m-1)}$、$a_{3,(m-2)}$、$a_{4,(m-3)}$⋯成等差數列，其公差為

(m-1)d。

證明：$a_{k+1,m-k}-a_{k,m-k+1}=a_{km+m-k}-a_{(k-1)m+m-k+1}=(m-1)d$

推論 5.5

從矩形[A]的第 i 列 j 行$a_{i,j}$開始，每隔(p-1)列，取一個數，即$a_{i,j}$、$a_{(i+p),j}$、$a_{(i+2p),j}$、$a_{(i+3p),j}$…是等差數列。其公差為 pmd。

證明：由定理 5.2 及定理 3 可推出。

$a_{(i+(k+1)p),j}-a_{(i+kp),j}=a_{[(i+(k+1)p)-1]m+j}-a_{[(i+kp)-1]m+j}=pmd$

推論 5.6

從矩形[A]的第 i 列 j 行$a_{i,j}$開始，每隔(q-1)行，取一個數，即$a_{i,j}$、$a_{i,(j+q)}$、$a_{i,(j+2q)}$、$a_{i,(j+3q)}$…是等差數列。其公差為 qd。

證明：由定理 5.1 及定理 3 可推出。

$a_{i,j+(k+1)q}-a_{i,j+kq}=a_{(i-1)m+j+(k+1)q}-a_{(i-1)m+j+kq}=qd$

推論 5.7

從矩形[A]的第 i 列 j 行$a_{i,j}$開始，每隔(p-1)列(q-1)行，取一個數，即$a_{i,j}$、$a_{(i+p),(j+q)}$、$a_{(i+2p),(j+2q)}$、$a_{(i+3p),(j+3q)}$…是等差數列。其公差為(pm+q)d。

證明：由推論 5.5 及推論 5.6 可推出。

$a_{(i+(k+1)p),(j+(k+1)q)}-a_{(i+kp),(j+kq)}=a_{(i+(k+1)p-1)m+(j+(k+1)q)}-a_{(i+kp-1)m+(j+kq)}=(pm+q)d$

若數列b_1、b_2、b_3…b_n是一個公比為 r 的等比數列，我們將此等比數列重新排列成下面矩形的形狀(此矩形每列有 m 行)，我們發現這裡面隱藏許多等比數列。

b_1 、 b_2 、 b_3 、 b_4 … b_m

b_{m+1} 、 b_{m+2} 、 b_{m+3} 、 b_{m+4} … b_{2m}

b_{2m+1} 、 b_{2m+2} 、 b_{2m+3} 、 b_{2m+4} ⋯ b_{3m}

⋮

b_{pm+1} 、 b_{pm+2} 、 b_{pm+3} 、 b_{pm+4} ⋯ $b_{(p+1)(m)}$

⋮

為了方便討論，我們將此等比數列所形成的矩形稱為：「矩形[B]」並將矩形[B]的元素重新命名。

$$
\begin{array}{ccccc}
b_1 = b_{1,1} & b_2 = b_{1,2} & b_3 = b_{1,3} & \cdots & b_m = b_{1,m} \\
b_{m+1} = b_{2,1} & b_{m+2} = b_{2,2} & b_{m+3} = b_{2,3} & \cdots & b_{2m} = b_{2,m} \\
b_{2m+1} = b_{3,1} & b_{2m+2} = b_{3,2} & b_{2m+3} = b_{3,3} & \cdots & b_{3m} = b_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{pm+1} = b_{(p+1),1} & b_{pm+2} = b_{(p+1),2} & b_{pm+2} = b_{(p+1),3} & \cdots & b_{(p+1)m} = b_{(p+1),m}
\end{array}
$$

⋮

定理 6.1

矩形[B]的任一列，都是一個等比數列。

證明：以第 s 列為例。第 s 列是 $b_{s,1}$、$b_{s,2}$、$b_{s,3}$、⋯、$b_{s,m}$

$\frac{b_{s,k+1}}{b_{s,k}} = \frac{b_{(s-1)m+k+1}}{b_{(s-1)m+k}} = r$。

定理 6.2

矩形[B]的任一行，都是一個等比數列。

證明：由定理 3.1 可證明[B]的第 j 行 $b_{1,j}$、$b_{2,j}$、$b_{3,j}$⋯是一等比數列，其公比是 r^m

$\frac{b_{k+1,j}}{b_{k,j}} = \frac{b_{km+j}}{b_{(k-1)m+j}} = r^m$。

定理 6.3

從矩形[B]的左上角向右下 45 度畫一線，經過的數成等比數列，即 $b_{1,1}$、$b_{2,2}$、$b_{3,3}$、$b_{4,4}$⋯等比數列，其公比為r^{m+1}。

證明：$\frac{b_{k+1,k+1}}{b_{k,k}}=\frac{b_{km+k+1}}{b_{(k-1)m+k}}=r^{m+1}$。

推論 6.4

從矩形[B]的右上角向左下 45 度畫一線，經過的數成等比數列，即 $b_{1,m}$、$b_{2,(m-1)}$、$b_{3,(m-2)}$、$b_{4,(m-3)}$⋯ 是等比數列，其公比為r^{m-1}。

證明：$\frac{b_{k+1,m-k}}{b_{k,m-k+1}}=\frac{b_{km+m-k}}{b_{(k-1)m+m-k+1}}=r^{m-1}$。

推論 6.5

從矩形[B]的第 i 列 j 行$b_{i,j}$開始，每隔(p-1)列，取一個數，即b_{ij}、$b_{(i+p),j}$、$b_{(i+2p),j}$、$b_{(i+3P),j}$⋯是等比數列，其公比為r^{pm}。

證明：由定理 6.2 及定理 3.1 可推出。

$\frac{b_{i+(k+1)p,j}}{b_{i+kp,j}}=\frac{b_{[i+(k+1)p-1]m+j}}{b_{[i+kp-1]m+j}}=r^{pm}$。

推論 6.6

從矩形[B]的第 i 列 j 行$b_{i,j}$開始，每隔(q-1)行，取一個數，即$b_{i,j}$、$b_{i,(j+q)}$、$b_{i,(j+2q)}$、$b_{i,(j+3q)}$⋯是等比數列，其公比為r^{q}。

證明：由定理 6.1 及定理 3.1 可推出。

$\frac{b_{i,j+(k+1)q}}{b_{i,j+kq}}=\frac{b_{(i-1)m+(k+1)q}}{b_{(i-1)m+kq}}=r^{q}$。

推論 6.7

從矩形[B]的第 i 列 j 行b_{ij}開始，每隔(p-1)列(q-1)行，取一個數，即$b_{i,j}$、$b_{(i+p),(j+q)}$、$b_{(i+2p),(j+2q)}$、$b_{(i+3p),(j+3q)}$⋯是等比數列，其公比為r^{pm+q}。

證明：由推論 6.5 及推論 6.6 可推出。

$$\frac{b_{i+(k+1)p,j+(k+1)q}}{b_{i+kp,j+kq}}=\frac{b_{[i+(k+1)p-1]m+(k+1)q}}{b_{[i+kp-1]m+kq}}=r^{pm+q}$$

若數列c_1、c_2 、$c_3\cdots c_n$是一個公差為 d 的等差數列，我們將它重新以 S 形的排列方式排成下面矩形的形狀(此矩形每列有 m 行)，我們發現這裡面隱藏許多等差數列。

$$\begin{array}{llllll}
c_1 、 & c_2 、 & c_3 & \cdots & c_{m-1} 、 & c_m \\
c_{2m} 、 & c_{2m-1} 、 & c_{2m-2} & \cdots & c_{m+2} 、 & c_{m+1} \\
c_{2m+1} 、 & c_{2m+2} 、 & c_{2m+3} & \cdots & c_{3m-1} 、 & c_{3m} \\
c_{4m} 、 & c_{4m-1} 、 & c_{4m-2} & \cdots & c_{3m+2} 、 & c_{3m+1} \\
 & & & \vdots & & \\
c_{2(k-1)m+1} 、 & c_{2(k-1)m+2} 、 & c_{2(k-1)m+3} & \cdots & c_{(2k-1)m-1} 、 & c_{(2k-1)m} \\
c_{2km} 、 & c_{2km-1} 、 & c_{2km-2} & \cdots & c_{(2k-1)m+2} 、 & c_{(2k-1)m+1} \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

為了方便討論，我們將此等差數列所形成的矩形稱為：「矩形[C]」並將矩形[C]的元素重新命名。

$$\begin{array}{ccccc}
c_1=c_{1,1} & c_2=c_{1,2} & c_3=c_{1,3} & \cdots & c_m=c_{1,m} \\
c_{2m}=c_{2,1} & c_{2m-1}=c_{2,2} & c_{2m-2}=c_{2,3} & \cdots & c_{m+1}=c_{2,m} \\
c_{2m+1}=c_{3,1} & c_{2m+2}=c_{3,2} & c_{2m+3}=c_{3,3} & \cdots & c_{3m}=c_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{2(k-1)m+1}=c_{(2k-1),1} & c_{2(k-1)m+2}=c_{(2k-1),2} & c_{2(k-1)m+3}=c_{(2k-1),3} & \cdots & c_{(2k-1)m}=c_{(2k-1),m} \\
c_{2km}=c_{2k,1} & c_{2km-1}=c_{2k,2} & c_{2km-2}=c_{2k,3} & \cdots & c_{(2k-1)m+1}=c_{2k,m} \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

定理 7.1

矩形[C]的任一列，都是一個等差數列，奇數列公差為 d，偶數列公差為-d。

證明：

奇數列為

$c_{2(k-1)m+1}$ 、$c_{2(k-1)m+2}$ 、$c_{2(k-1)m+3}$ $\cdots$ $c_{(2k-1)m-1}$ 、 $c_{(2k-1)m}$

明顯的公差為 d

偶數列為c_{2km} 、c_{2km-1} 、c_{2km-2} $\cdots$ $c_{(2k-1)m+2}$ 、$c_{(2k-1)m+1}$

明顯的公差為-d

定理 7.2

從矩形[C]的第 i 列 j 行$c_{i,j}$開始，每隔一列，取一個數，即$c_{i,j}$、$c_{(i+2),j}$ 、$c_{(i+4),j}$ 、$c_{(i+6),j}$ $\cdots$是等差數列。其公差為 2md。

證明：當 i 是奇數時

$$c_{(i+2(k+1)),j}-c_{(i+2k),j}=c_{\left(\frac{i+2k+1}{2}\right)\cdot 2m+j}-c_{\left(\frac{i+2k-1}{2}\right)\cdot 2m+j}$$

$$=c_{(i+2k+1)m+j}-c_{(i+2k-1)m+j}=2md$$

當 i 是偶數時

$$c_{(i+2(k+1)),j}-c_{(i+2k),j}=c_{\left(\frac{i+2k+2}{2}\right)\cdot 2m-j+1}-c_{\left(\frac{i+2k}{2}\right)\cdot 2m-j+1}$$

$$=c_{(i+2k+2)m-j+1}-c_{(i+2k)m-j+1}=2md$$

推論 7.3

由定理 7.2 可知從矩形[C]的第 i 列 j 行$c_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列，取一個數，即$c_{i,j}$ 、$c_{(i+2p),j}$ 、$c_{(i+4p),j}$ 、$c_{(i+6p),j}$ $\cdots$是等差數列。其公差為 2pmd。

證明： 明顯由定理 7.2 可知

此數列的第 k+1 項為$c_{(i+k\cdot 2p),j}$，第 k 項為$c_{(i+(k-1)\cdot 2p),j}$

當 i 是奇數時，

$$c_{(i+k(2p)),j}-c_{(i+(k-1)(2p)),j}=c_{\left(\frac{i-1+k(2p)}{2}\right)\cdot 2m+j}-c_{\left(\frac{i-1+(k-1)2p}{2}\right)\cdot 2m+j}$$

$=c_{(i-1+k(2p))m+j}-c_{(i-1+(k-1)2p)m+j}=2pmd$

當 i 是偶數時，

$c_{(i+k(2p)),j}-c_{(i+(k-1)(2p)),j}=c_{\left(\frac{i+k(2p)}{2}\right)\cdot 2m-j+1}-c_{\left(\frac{i+(k-1)(2p)}{2}\right)\cdot 2m-j+1}$

$=c_{(i+k(2p))m-j+1}-c_{(i+(k-1)2p)m-j+1}=2pmd$

推論 7.4

從矩形[C]的第 i 列 j 行$c_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列(q-1)行，取一個數，即$c_{i,j}$、$c_{(i+2p),(j+q)}$、$c_{(i+4p),(j+2q)}$、$c_{(i+6p),(j+3q)}$…是等差數列。當 i 是奇數時其公差為(2pm+q)d，當 i 是偶數時其公差為(2pm-q)d。

證明：

此數列的第 k+1 項為$c_{(i+k\cdot 2p),(j+kq)}$，第 k 項為$c_{(i+(k-1)\cdot 2p),(j+(k-1)q)}$

當 i 是奇數時，

$c_{(i+k(2p)),(j+kq)}-c_{(i+(k-1)(2p)),(j+(k-1)q)}$

$=c_{\left(\frac{i-1+k(2p)}{2}\right)\cdot 2m+j+kq}-c_{\left(\frac{i-1+(k-1)2p}{2}\right)\cdot 2m+j+(k-1)q}$

$=c_{(i-1+k(2p))m+j+kq}-c_{(i-1+(k-1)2p)m+j+(k-1)q}=(2pm+q)d$

當 i 是偶數時，

$c_{(i+k(2p)),(j+kq)}-c_{(i+(k-1)(2p)),(j+(k-1)q)}$

$=c_{\left(\frac{i+k(2p)}{2}\right)\cdot 2m-j-kq+1}-c_{\left(\frac{i+(k-1)(2p)}{2}\right)\cdot 2m-j-(k-1)q+1}$

$=c_{(i+k(2p))m-j-kq+1}-c_{(i+(k-1)2p)m-j-(k-1)q+1}$

$=(2pm-q)d$

若數列d_1、d_2 、d_3…d_n是一個公比為 r 的等比數列，我們將它重新

以 S 形的排列方式排成下面矩形的形狀(此矩形每列有 m 行)，我們發現這裡面亦隱藏許多等比數列。

d_1 、 d_2 、 d_3 $\cdots$ d_{m-1} 、 d_m

d_{2m} 、 d_{2m-1} 、 d_{2m-2} $\cdots$ d_{m+2} 、 d_{m+1}

d_{2m+1} 、 d_{2m+2} 、 d_{2m+3} $\cdots$ d_{3m-1} 、 d_{3m}

d_{4m} 、 d_{4m-1} 、 d_{4m-2} $\cdots$ d_{3m+2} 、 d_{3m+1}

$\vdots$

$d_{2(k-1)m+1}$ 、$d_{2(k-1)m+2}$ 、$d_{2(k-1)m+3}$ $\cdots$ $d_{(2k-1)m-1}$ 、 $d_{(2k-1)m}$

d_{2km} 、 d_{2km-1} 、 d_{2km-2} $\cdots$ $d_{(2k-1)m+2}$ 、$d_{(2k-1)m+1}$

$\vdots$

為了方便討論，我們將此等比數列以 S 形的排列方式所形成的矩形稱為：「矩形[D]」

並將矩形[D]的元素重新命名。

$$
\begin{array}{ccccc}
d_1 = d_{1,1} & d_2 = d_{1,2} & d_3 = d_{1,3} & \cdots & d_m = d_{1,m} \\
d_{2m} = d_{2,1} & d_{2m-1} = d_{2,2} & d_{2m-1} = d_{2,3} & \cdots & d_{m+1} = d_{2,m} \\
d_{2m+1} = d_{3,1} & d_{2m+2} = d_{3,2} & d_{2m+3} = d_{3,3} & \cdots & d_{3m} = d_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d_{2(k-1)m+1} = d_{(2k-1),1} & d_{2(k-1)m+2} = d_{(2k-1),2} & d_{2(k-1)m+3} = d_{(2k-1),3} & \cdots & d_{(2k-1)m} = d_{(2k-1),m} \\
d_{2km} = d_{2k,1} & d_{2km-1} = d_{2k,2} & d_{2km-2} = d_{2k,3} & \cdots & d_{(2k-1)m+1} = d_{2k,m}
\end{array}
$$

$\vdots$

定理 8.1

矩形[D]的任一列，都是一個等比數列，奇數列公比為 r，偶數列公比為$\frac{1}{r}$。

證明：

奇數列為

$d_{2(k-1)m+1}$ 、$d_{2(k-1)m+2}$ 、$d_{2(k-1)m+3}$ $\cdots$ $d_{(2k-1)m-1}$ 、 $d_{(2k-1)m}$

明顯的公比為 r

偶數列為d_{2km}、d_{2km-1}、d_{2km-2} $\cdots$ $d_{(2k-1)m+2}$、$d_{(2k-1)m+1}$

明顯的公比為$\frac{1}{r}$

定理 8.2

從矩形[D]的第 i 列 j 行$d_{i,j}$開始，每隔一列，取一個數，即$d_{i,j}$、$d_{(i+2),j}$、$d_{(i+4),j}$、$d_{(i+6),j}\cdots$是等比數列。其公比為r^{2m}。

證明：當 i 是奇數時

$$\frac{d_{(i+2k+2),j}}{d_{(i+2k),j}}=\frac{d_{\left\lceil\frac{i+2k+1}{2}\right\rceil 2m+j}}{d_{\left\lceil\frac{i+2k-1}{2}\right\rceil 2m+j}}=\frac{d_{(i+2k+1)m+j}}{d_{(i+2k-1)m+j}}=r^{2m}$$

當 i 是偶數時

$$\frac{d_{(i+2k+2),j}}{d_{(i+2k),j}}=\frac{d_{(i+2k+2)m-j+1}}{d_{(j+2k)m-j+1}}=r^{2m}$$

推論 8.3

由定理 8.2 可知從矩形[D]的第 i 列 j 行$d_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列，取一個數，即$d_{i,j}$、$d_{(i+2p),j}$、$d_{(i+4p),j}$、$d_{(i+6p),j}\cdots$是等比數列。其公比為r^{2pm}。

證明：此數列的第 k+1 項為$d_{(i+k\cdot 2p),j}$，第 k 項為$d_{(i+(k-1)\cdot 2p),j}$

當 i 是奇數時

$$\frac{d_{(i+k\cdot 2p),j}}{d_{(i+(k-1)2p),j}}=\frac{d_{\left(\frac{i-1+k\cdot 2p}{2}\right)\cdot 2m+j}}{d_{\left(\frac{i-1+(k-1)\cdot 2p}{2}\right)2m+j}}=\frac{d_{(i-1+k\cdot 2p)m+j}}{d_{(i-1+(k-1)\cdot 2p)m+j}}=r^{2pm}$$

當 i 是偶數時

$$\frac{d_{(i+k\cdot 2p),j}}{d_{(i+(k-1)2p),j}}=\frac{d_{\left(\frac{i+k\cdot 2p}{2}\right)\cdot 2m-j+1}}{d_{\left(\frac{i+(k-1)\cdot 2p}{2}\right)2m-j+1}}=\frac{d_{(i+k\cdot 2p)m-j+1}}{d_{(i+(k-1)\cdot 2p)m-j+1}}=r^{2pm}$$

推論 8.4

從矩形 [D]的第 i 列 j 行$d_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列(q-1)行，取一個數，即$d_{i,j}$、$d_{(i+2p),(j+q)}$、$d_{(i+4p),(j+2q)}$、$d_{(i+6p),(j+3q)}$⋯是等比數列。當 i 是奇數時其公比為r^{2pm+q}，當 i 是偶數時其公比為r^{2pm-q}。

證明：

此數列的第 k+1 項為$d_{(i+k\cdot 2p),(j+kq)}$，第 k 項為$d_{(i+(k-1)\cdot 2p),(j+(k-1)q)}$

當 i 是奇數時，

$$\frac{d_{(i+k\cdot 2p),(j+kq)}}{d_{(i+(k-1)2p),(j+(k-1)q)}}=\frac{d_{\left(\frac{i-1+k\cdot 2p}{2}\right)\cdot 2m+j+kq}}{d_{\left(\frac{i-1+(k-1)\cdot 2p}{2}\right)2m+j+(k-1)q}}$$

$$=\frac{d_{(i-1+k\cdot 2p)m+j+kq}}{d_{(i-1+(k-1)\cdot 2p)m+j+(k-1)q}}=r^{2pm+q}$$

當 i 是偶數時，

$$\frac{d_{(i+k\cdot 2p),(j+kq)}}{d_{(i+(k-1)2p),(j+(k-1)q)}}=\frac{d_{\left(\frac{i+k\cdot 2p}{2}\right)\cdot 2m-j-kq+1}}{d_{\left(\frac{i+(k-1)\cdot 2p}{2}\right)2m-j-(k-1)q+1}}$$

$$=\frac{d_{(i+k\cdot 2p)m-j-kq+1}}{d_{(i+(k-1)\cdot 2p)m-j-(k-1)q+1}}=r^{2pm-q}$$

五、研究結果與討論

經由上述研究，本研究發現：

1. 一個等差數列其公差為 d，它的每一項乘上一個(非 0)常數 c 後，新數列仍然是等差數列，新數列公差變為 cd。
2. 一個等比數列其公比為 r，它的每一項乘上一個(非 0)常數 c 後，新數列仍然是等比數列，新數列公比不變仍然是 r。
3. 將 m 個等差數列的相對應第 n 項分別相加後，新數列仍然是等差數列，新數列公差是 m 個原數列公差之和。

4. 將 m 個等比數列的相對應第 n 項分別相乘後，新數列仍然是等比數列，新數列公比是 m 個原數列公比之積。

5. 將一個等差數列(公差 d)的第 1~m 項相加，第(m+1)~(2m)項相加，第(2m+1)~(3m)項相加……形成一個新數列，新數列仍然是等差數列，新數列公差是 md。

6. 將一個等比數列(公比 r)的第 1~m 項相乘，第(m+1)~(2m)項相乘，第(2m+1)~(3m)項相乘……形成一個新數列，新數列仍然是等比數列，新數列公比為r^m。

7. 將一個等差數列，我們將它重新排列成矩形的形狀，我們發現這裡面隱藏許多等差數列。

   此矩形的每一列、每一行都形成等差數列。從此矩形的第 i 列 j 行$a_{i,j}$開始，此矩形每隔(p−1)列(q−1)行，取一個數，即$a_{i,j}$、$a_{(i+p),(j+q)}$、$a_{(i+2p),(j+2q)}$、$a_{(i+3p),(j+3q)}$…是等差數列。其公差為(pm+q)d。

8. 將一個等比數列我們將它重新排列成矩形的形狀，我們發現這裡面隱藏許多等比數列。

   此矩形的每一列、每一行都形成等比數列。從此矩形的第 i 列 j 行b_{ij}開始，每隔(p−1)列(q−1)行，取一個數，即$b_{i,j}$、$b_{(i+p),(j+q)}$、$b_{(i+2p),(j+2q)}$、$b_{(i+3p),(j+3q)}$…是等比數列，其公比為r^{pm+q}。

9. 將一個等差數列，我們將它以 S 形排列，形成矩形的形狀，我們發現這裡面隱藏許多等差數列。此矩形的任一列，都是一個等差數列，奇數列公差為 d，偶數列公差為-d。從矩形[C]的第 i 列 j 行$c_{i,j}$開始，每隔(2p−1)列(q−1)行，取一個數，即$c_{i,j}$、$c_{(i+2p),(j+q)}$、$c_{(i+4p),(j+2q)}$、$c_{(i+6p),(j+3q)}$…是等差數列。當 i 是奇數時其公差為(2pm+q)d，當 i 是偶數時其公差為(2pm−q)d。

10. 將一個等比數列，我們將它以 S 形排列，形成矩形的形狀，我們發現這裡面隱藏許多等比數列。此矩形的任一列，都是一個等

比數列，奇數列公比為 r，偶數列公比為$\frac{1}{r}$。從矩形 [D]的第 i 列 j 行$d_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列(q-1)行，取一個數，即$d_{i,j}$、$d_{(i+2p),(j+q)}$、$d_{(i+4p),(j+2q)}$、$d_{(i+6p),(j+3q)}$…是等比數列。當 i 是奇數時其公比為r^{2pm+q} ，當 i 是偶數時其公比為r^{2pm-q}。

六、評鑑與檢討

(一)尋找研究動機的出發點

發覺問題：

因為我們對獨立研究十分陌生，在尋找研究題目的同時，我們從各屆的獨立研究、科展作品找尋靈感，但全國科展的作品有一定的難度，我們很多看不懂。花了很多時間和精力尋找相關的資料和文獻，都找不到可以作為研究題目的資料。

解決方法：

老師建議我們可從國小組的科展下手。也可從各種數學競賽的試題找尋靈感，讓我們挖掘題目，並試著和大家討論哪些適合，哪些不適合。

心得收穫:

我們學會了先討論、分享各自想法，以免大家尋的方向都不同，到頭來一無所獲，果然，『皇天不負苦心人』，經過我們一步步的探討，就在那份神聖的試題中，找到了我們研究的主題。老師便讓我們利用寒假將他印出來的參考資料讀完，並試著練習題目，提升熟悉度。

(二)擬定正是計畫及研究問題的困難及解決方法

發覺問題：

獨立研究剛開始時，有許多觀念、定義要統整，滿頭問號的我們只能一味聆聽老師的想法，毫無頭緒。

解決方法：

老師讓我們欣賞其他人的研究報告，再請各位一一發表意見，意外地是，我們竟因此突破了考驗。而老師也運用了各種的數學符號，讓我們輕鬆、簡單地理解等差數列的定義。

心得收穫：

對於獨立研究，應該要擁有對數學的熱情和好奇，才會有想要完成研究報告的毅力與堅持。

(三)彙整相關文獻資料

發覺問題：

確定研究主題後，老師開始讓我們在課堂上找一些相關的資料，並在課堂結束前五分鐘，讓我們說說那堂課找到了哪些有用的資料，哪些沒用的資料，之後再彙整所有對我們有用的資料，不過我們發現光是找資料，就花了好幾堂課的時間。

解決方法：

我們決定在家裡就先查好資料，來到學校再一起討論，這樣節省了許多時間，也有時間可以討論關於本主題的相關定理，效率變得更好了。

心得收穫:

古人曾說:『君子之道，或出或處，或默或語，二人同心，其利斷金。』在大家同心協力下，可以更快速的求得方向，在課餘時間思考也可以不讓自己減緩思緒，並且省下其他時間，在討論時，才能有更多方法，經由組員討論，找到最合適的。

(四)整理統計資料與資料分析

發覺問題：

一開始在驗證舉出來的例子是正確的，於是用 Excel 當驗證的工具，不過發現我們都不太會用，打沒幾數字就花了好幾分鐘。

解決方法：

老師看我們打很久，馬上親自教我們程式裡面的一些常用算

式，並且自己驗證給我們看，這讓我們使用這個程式的速度突飛猛進。

心得收穫：

我們學到了如何快速使用 Excel 這個文件，另外還有用來打報告的 Word 程式理面的一些方程式，以及許多電腦的使用方式，在打報告上，節省了很多時間。

(五)提出研究成果與討論

發覺問題:

撰寫報告時，有時也會意見相左，一言不合之時，導致無法匯集大家想法及以前的成果，不知如何撰寫報告的我們，又停頓了一段時間。

解決方法:

統整大家意見，並且團結一條心，已打出完美的報告為目標，共同討論，發現盲點，並且給予修正，分工合作，達成目標。

心得收穫:

學會了要尊重對方的想法，接納和自己進度不同的同學，並給予幫助，不以自我為中心，不管是對於研究，或是對你我的人際關係，都將有很大的幫助。

(六)心得省思和未來展望

在這項研究中，最重要的不外乎是團隊合作，我們一起跌跌撞撞的完成了這項考驗，真是一段美好的回憶。由於時間緊迫，來不及尋找更多的等差(比)數列，未來可繼續研究：

1. 有沒有其他圖形能排成一個完美的等差數列。
2. 加入更多樣變化各種形狀的編排，增加內容，使內容不會太過枯燥乏味，令人無感。
3. 研究其它不同的數列。

七、參考資料

(一)九九文教基金會第 17 屆 JHMC 國中數學競賽個人賽試題

(二)民國 108 年翰林國中數學第四冊第一章數列與級數

(三)民國 108 年龍騰高中數學第二冊第一章數列與級數

(四)中華民國第 42 屆中小學科學展覽會 國中-數學科

等差數列外一章

https://twsf.ntsec.gov.tw/Article.aspx?a=41&lang=1&p=2