壹、　研究訓練階段

我非常喜歡帶領學生進行「獨立研究」！因為「獨立研究」最重要的功能，就是能夠激發學生的好奇心，進而投入科學研究，並開發潛能的活動。然而，凡事起頭難，獨立研究最難的就是「主題」的尋找，此時即可訓練孩子觀察日常生活中一些有趣的現象，從中找尋有興趣的題材來研究。最精彩的部份，就是研究的過程！過程比結果更重要，因為從中可以培養研究態度與思考力，做中學進而學以致用，且可以增進師生互動。

一、近二年學校獨立研究課程之規畫

Ⅰ、教學目標

(1)培養學生主動學習、主動探索知識的態度。(2)培養學生蒐集資料、組織知識的能力。(3)培養學生自主學習的能力。(4)培養學生研究、撰寫研究報告及發表研究成果的能力。

Ⅱ、教學理念

(1)讓學生了解他們才是學習的主角，學習態度一定要積極認真、自動自發。(2)重視學習歷程，從學習歷程中得到啟發與省思。(3)尊重個別差異，提供多元選擇、多元學習的機會。

Ⅲ、實施方式

<table>
<tr><th colspan="5">(1)時間規畫</th><th>(2)課程規畫</th><th>(3)授課方式</th></tr>
<tr><th>學年</th><th>學期</th><th>課程安排</th><th>授課節數</th><th>學生數</th><td rowspan="3">本校提供的獨立研究訓練分為「訓練」及「研究」兩個階段。108 學年上學期為訓練階段，教導學生獨立研究必備的基本技能與態度。108 學年下學期為研究階段，讓學生挑選主題進行研究，並製作簡報，練習口頭發表</td><td rowspan="3">訓練階段的進行方式，主要是教師邊講解，學生邊進行實際演練。在研究階段，則讓學生以個人或小組為單位，針對感興趣的主題進行深度探討，教師扮演輔助者的角色，留意學生的學習狀況，適時給予建議。</td></tr>
<tr><td>108</td><td>一</td><td>抽離</td><td>每週兩節</td><td>3</td></tr>
<tr><td>108</td><td>二</td><td>抽離</td><td>每週兩節</td><td>3</td></tr>
</table>

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

教學階段	授課單元	授課內容摘要
訓練階段 (108.9.1~109.1.11)	獨立研究的意義	1.獨立研究的意義。 2.研究者須具備的能力與態度。
	研究法簡介	認識並判別實驗研究、歷史研究、敘述研究等三種研究法。
	資料蒐集與篩選	1.認識圖書編目。 2.網路資源及工具書的使用。 3.參考資料的選擇、歸類與統整。
研究階段 (109.3.22~109.9.20)	找尋研究主題	找尋 3~5 個感興趣的主題，分析其可行性，最後從中選擇一個較合適的主題進行研究。
	研究報告撰寫	1.研究動機與目的。 2.文獻探討。 3.研究方法。 4.研究結果分析與歸納。 5.提出結論與建議。 6.修改作品說明書。
	研究成果發表	1.研究報告簡報製作。 2.口頭發表練習。

貳、獨立研究階段

一、研究動機

某學校在106學年科學班甄選實驗實作試題中，有一個題目在分析與討論的過程中，發生了**「認知衝突」！**

就因為如此，便引起了我們極大的好奇心，想要去探討與研究它…題目是關於絕對值題型，如下：

14. 已知 x 為實數，若 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+......+|9x-1|+|10x-1|$，當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值為 m，試求序對 $(a, m)=$__________。

國中階段「絕對值」之概念，是「某數到原點的距離」。而這道題目，必須對「絕對值」有進階的了解，才能夠求出函數 $f(x)$ 之最小值（極值），我們可以從「代數」與「幾何」這兩方面來探討。

在分析與研究的過程中發現，最小值（極值）發生的地方有兩種情況，一種為 $f(x)$ 在「一點」發生極值，另一種為 $f(x)$ 在「一區間」發生極值。以幾何圖形來看，在「一點」發生極值之圖形為「尖的」，在「一區間」發生極值之圖形為「水平的」。

結果，當我們以「代數法」分析，即可容易地求出上列第14題之 a 值及m值；再畫出其函數圖形，驗證發生極值之處為「尖的」。

當 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|\cdots+|11x-1|$時，亦可容易地求出 a 值及m值；接著根據過往的經驗，我們臆測發生極值之處應為「水平的」。

結果，發生了「認知衝突」！

當我們使用 GEOGEBRA 軟體工具協助畫出該函數圖形時，發現「發生極值之處」竟然也是「尖的」！

這與我們平常的認知不同！我們馬上再試試其他十幾種情況，極值發生之處，竟然也都是「尖的」！

於是，這個**「認知衝突」**太大了！當然也就引起了我們高度的**好奇心及興趣！**

我們最想問的是：

$f(x)$ 到底在什麼條件下，其極值發生之處，才會是「水平的」？

其中的「規則」又是什麼呢？或者，其實是沒有規則的？

這些種種的疑問，引起我們極大的興趣！當投入研究後，發現有很多地方，很值得研究與探討，我們不只是想要它的答案，而是想要了解答案的背後的全貌及奧秘。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

A.擬定正式計畫：

討論研究題目 ⇒ 確定研究題目 ⇒ 搜尋相關資料 ⇒ 以代數法分析問題 ⇒
以幾何法研究問題 ⇒ 發現規律 ⇒ 求出數列一般項 ⇒
紀錄及分析討論結論 ⇒ 撰寫「作品說明書」 ⇒ 檢討及修正「作品說明書」

B.研究問題：

$$\boldsymbol{f(x)} = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$$

1. $x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。
2. $n=$ ？時，$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一點（尖的）。
3. $n=$ ？時，$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間（水平的）
4. 若 $n \leq 100000$，$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間（水平的）的 n 值有幾個？
5. 若 $f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間，n 是否有規則？
6. 承上，若 n 有規則，規則是什麼？
7. 遞迴數列的遞迴關係表示是唯一的嗎？
8. 如何求遞迴數列 a_n 之「一般項」？
9. 此種遞迴數列有何特別之處嗎？
10. $f(x)$ 之函數圖形是否可以分類？

C.擬定工作進度表：

１０８－１０９年	9-10月	11-12月	1-2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月
獨立研究認識與態度										
研究法介紹										
資料搜集與篩選										
討論研究題目										
確定研究題目										
搜尋相關資料										
以代數法分析問題										
以幾何法研究問題										
發現規律										
求出數列一般項										
紀錄及分析討論結論										
撰寫「作品說明書」										
檢討及修正「作品說明書」										

三、 彙整相關文獻

(一)絕對值：

數線上一數的絕對值等於此數與原點的距離。絕對值可以用來表達數線上的兩點距離。

(二)中位數：

中位數是將資料排序後,前後各切成一半的中間位置資料值，中位數是個數的平衡。

(三)遞迴數列：

遞迴就是：「每一項可以由前面幾項所決定」。

所以兩個關鍵：

第一個關鍵，此數列的規則（遞迴關係 recurrence relation)。

第二個關鍵，首幾項是已經知道的（初始值 initial values)。

四、資料分析

(一) 型態一： $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$

討論 1： $f(x)=|x-1|$，$x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值)。

Sol：

- 代數分析：

(1) 若 $x<1$，則 $f(x)=|x-1|=-(x-1)=-x+1$

$\Rightarrow f(x)>0$ ，$\forall\, x<1$

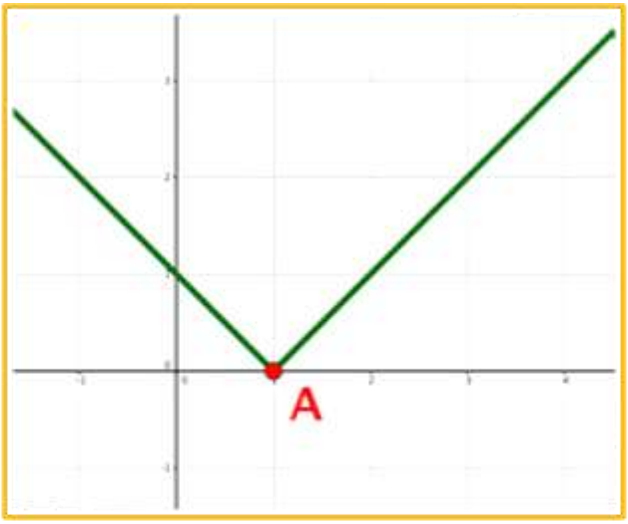
(2) 若 $1\le x$，則 $f(x)=|x-1|=(x-1)=x-1$

$\Rightarrow f(x)\ge 0$ ，$\forall\, x\ge 1$。

由 (1) 及 (2) 得知 $\Rightarrow f(x)\ge 0$ ，$\forall\, x\in\mathbb{R}$，且 $f(1)=0$

- 幾何圖形分析：

GGB 程式軟體



結論：當 $x = 1$時，$f(1) = 0$ 為最小值（極值）。

$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一點（尖的）。

討論2： $f(x) = |x-1| + |x-2|$，則$x = ?$時，$f(x)$ 有最小值。（極值）

Sol：

➢ 代數分析：

(1) 若 $x < 1$，則

$$f(x) = |x-1| + |x-2| = -(x-1) - (x-2) = -2x + 3$$

$$\Rightarrow f(x) > 1 \text{，} x < 1$$

(2) 若 $1 \le x < 2$，則

$$f(x) = |x-1| + |x-2| = (x-1) - (x-2) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 \text{，} 1 \le x < 2$$

(3) 若 $2 \le x$，則

$$f(x) = |x-1| + |x-2| = (x-1) + (x-2) = 2x - 3$$

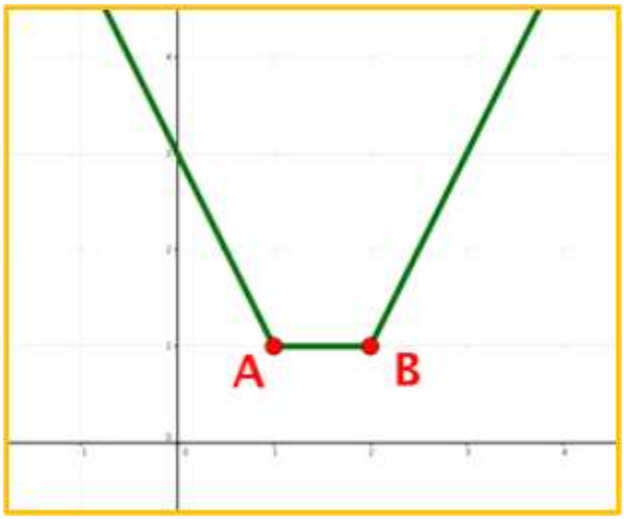
$$\Rightarrow f(x) \ge 1 \text{，} 2 \le x$$

由 (1) (2) (3) 得知 $\Rightarrow f(x) \ge 1$，$\forall x \in \mathbb{R}$，

且 $f(x) = 1$，$1 \le x \le 2$

➢ 幾何圖形分析：

GGB 程式軟體



結論： 當 $1 \le x \le 2$ 時，$f(x) = 1$ 為最小值（極值）。

$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間（水平的）。

討論 3： $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$，則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有

最小值（極值）。

Sol：

➢ 代數分析：

(1) 若 $x < 1 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = -3x + 6$

$\Rightarrow f(x) > 3$ ， $x < 1$

(2) 若 $1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = -x + 4$

$\Rightarrow 3 \ge f(x) > 2$ ， $1 \le x < 2$

(3) 若 $2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = x$

$\Rightarrow 3 > f(x) \ge 2$ ， $2 \le x < 3$

(4) 若 $3 \le x \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = 3x - 6$

$\Rightarrow f(x) \ge 3$ ， $3 \le x$

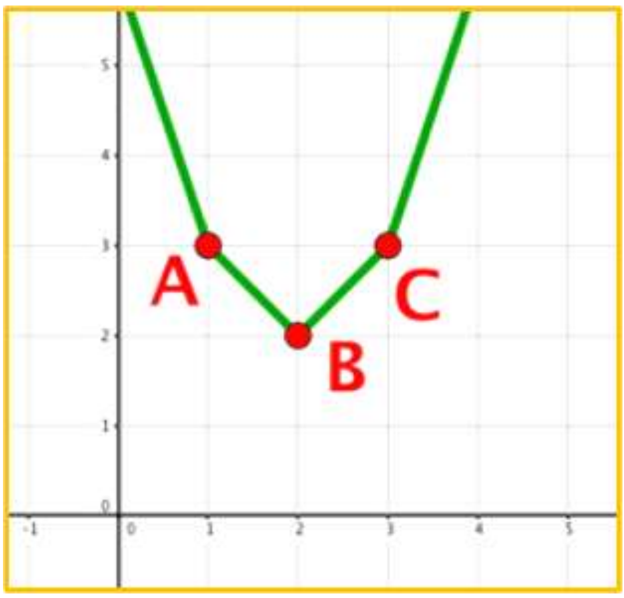
由 (1) (2) (3) (4) 得知 $\Rightarrow f(x) \ge 2$ ，$\forall x \in \mathbb{R}$，且 $f(2) = 2$

➢ 幾何圖形分析：

GGB 程式軟體

$x = 1$ ， 2 ， 3

$\Rightarrow$ 中位數為 2



結論： 當 $x=2$時，$f(2)=2$ 為最小值（極值）。

$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一點（尖的）。

討論4： $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$，

則 $x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

➢ 代數分析：

(1) 若 $x<1 \Longrightarrow f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

$=-4x+10 \Longrightarrow f(x)>6$ ，$x<1$

(2) 若 $1\le x<2 \Longrightarrow f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

$=-2x+8 \Longrightarrow 6\ge f(x)>4$ ，$1\le x<2$

(3) 若 $2\le x<3 \Longrightarrow f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

$=4 \Longrightarrow f(x)=4$ ，$2\le x<3$

(4) 若 $3\le x<4 \Longrightarrow f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

$=2x-2 \Longrightarrow 6>f(x)\ge 4$ ，$3\le x<4$

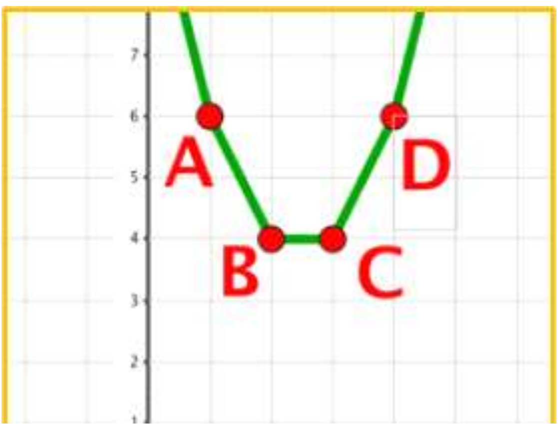
(5) 若 $4\le x \Longrightarrow f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

$=4x-10 \Longrightarrow f(x)\ge 6$ ，$4\le x$

由 (1) (2) (3) (4) (5) 得知 $\Longrightarrow f(x)\ge 4$ ，$\forall\, x\in\mathbb{R}$

且 $f(x)=4$，$2\le x\le 3$

➢ 幾何圖形分析：GGB程式軟體



x = 1 ， 2 ， 3 ， 4

$\Longrightarrow$中位數為 2 及 3 之間。

結論： 當 $2 \leq x \leq 3$ 時，$f(x) = 4$ 為最小值（極值）。

$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間（水平的）。

★推論 1：$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \cdots + |x-n|$

n $= (2k+1) \Longrightarrow$ $x = \frac{1+(2k+1)}{2} = k+1$時，$f(x)$ 有最小值（尖的）。

★推論 2：$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \cdots + |x-n|$

n $= 2k \Longrightarrow$ $k \leq x \leq k+1$時，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

即 <u>x為中位數</u> 時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

（二）型態二： $f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

討論 5： $f(x) = |x-1| + 2|x-2|$，則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有最小值

Sol：

（極值）

➢ 代數分析：

(1) 若 $x < 1 \Longrightarrow f(x) = |x-1| + 2|x-2| = -3x + 5$

$\Longrightarrow f(x) > 2$ ， $x < 1$

(2) 若 $1 \leq x < 2 \Longrightarrow f(x) = |x-1| + 2|x-2| = -x + 3$

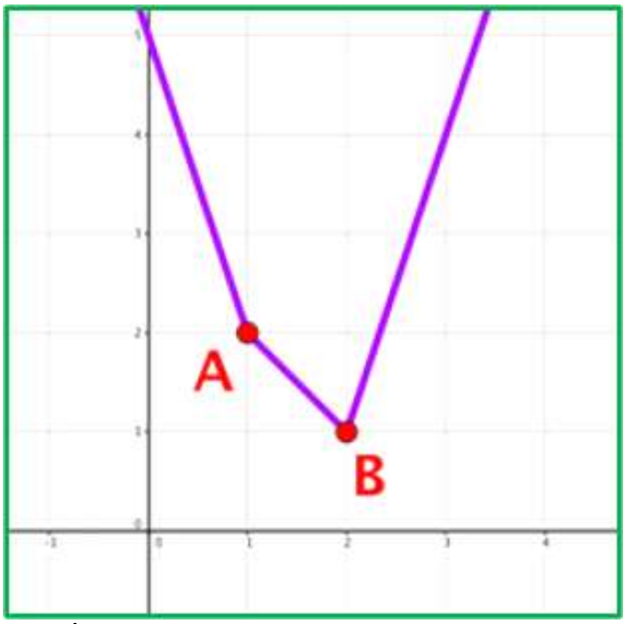
$\Longrightarrow 2 \geq f(x) > 1$ ， $1 \leq x < 2$

(3) 若 $2 \leq x \Longrightarrow f(x) = |x-1| + 2|x-2| = 3x - 5$

$\Longrightarrow f(x) \geq 1$ ， $2 \leq x$

由 (1) (2) (3) 得知 $\Longrightarrow f(x) \geq 1$ ，$\forall x \in \mathbb{R}$，且 $f(2) = 1$

➢ 幾何圖形分析：GGB 程式軟體



x = 1 ， 2 ， 2

⟹**中位數為 2**

結論：當 $x=2$，$f(2)=1$ 為最小值

$f(x)$ 在一點發生最小值（尖的）。

討論 6： $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|$，

則 $x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

Sol：

➢ 代數分析：

(1) $x<1 \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|=-6x+14$

$\Rightarrow f(x)>8$ ， $x<1$

(2) 若 $1\leq x<2 \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|$

$=-4x+12 \Rightarrow 8\geq f(x)>4$ ， $1\leq x<2$

(3) 若 $2\leq x<3 \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|=4$

$\Rightarrow f(x)=4$ ， $2\leq x<3$

(4) 若 $3\leq x \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|=6x-14$

$\Rightarrow f(x)\geq 4$ ， $3\leq x$

由 (1) (2) (3) (4) 得知 $\Rightarrow f(x)\geq 4$ ，$\forall x\in\mathbb{R}$，

且 $f(x)=4$，$2\leq x\leq 3$

➢ 幾何圖形分析：

GGB 程式軟體

$x = 1，2，2，3，3，3$

$\Longrightarrow$中位數為 2 及 3 之間

結論：當 $2 \leq x \leq 3$ 時，$f(x) = 4$

為最小值。

$f(x)$在一區間發生最小值（水平的）。

★推論3：$f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

$x = 1、2、2、3、3、3\cdots、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n$

$\boldsymbol{N = \frac{(1+n)n}{2} =}$ **奇數** $\boldsymbol{\Rightarrow x = m}$，$f(x)$ 有最小值（尖的）。

其中**第 $\boldsymbol{\frac{N+1}{2}}$ 個 $\boldsymbol{x}$ 值為 $\boldsymbol{m}$**

★推論4：$f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

$x = 1、2、2、3、3、3\cdots、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n$

$\boldsymbol{N = \frac{(1+n)n}{2} =}$**偶數**$\boldsymbol{\Rightarrow m \leq x \leq m+1}$，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

其中 **第 $\boldsymbol{\frac{N+1}{2}}$ 個 $\boldsymbol{x}$ 值為 $\boldsymbol{m}$ 且 第 $\boldsymbol{(\frac{N+1}{2}+1)}$個 $\boldsymbol{x}$ 值為 $\boldsymbol{(m+1)}$**

即 **<u>x為中位數</u>（ 最中間的數 ）**時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

討論7：$f(x) = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-3| + \cdots + 10|x-10|$

Sol：用上述的**<u>推論</u>**來解題：即 **<u>$x =$中位數</u>** 時，$f(x)$ 有最小值.

$x = 1、2、2、\cdots、10、10、10、10、10、10、10、10、10、10$

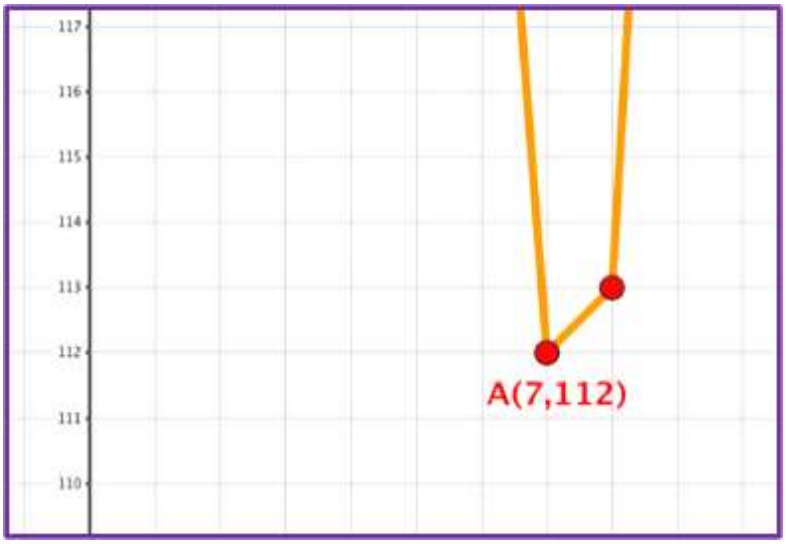
$\because N = \frac{(1+10)10}{2} = 55 \Longrightarrow x = 7$(第28個$x$值)，$f(x)$ 有最小值**（尖的）**$\Longrightarrow f(7)$為最小值。

➢ 幾何圖形分析：

GGB 程式軟體

$f(7) = 112 =$ *minimum* !

右圖最低點是「尖的」！



討論8：$f(x) = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-3| + \cdots + 11|x-11|$

Sol：用上述的推論來解題：即 $x=$中位數 時，$f(x)$ 有最小值.

1、2、2、⋯ 、11、11、11、11、11、11、11、11、11、11、11

$\because N = \frac{(1+11)11}{2} = 66$，第 33 個 x 值為 8 且 第 34 個 x 值為 9

$\Rightarrow m = 8$，$8 \leq x \leq 9$，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

推測 $f(8) = f(9) =$ *minimum*

➢ 幾何圖形分析：

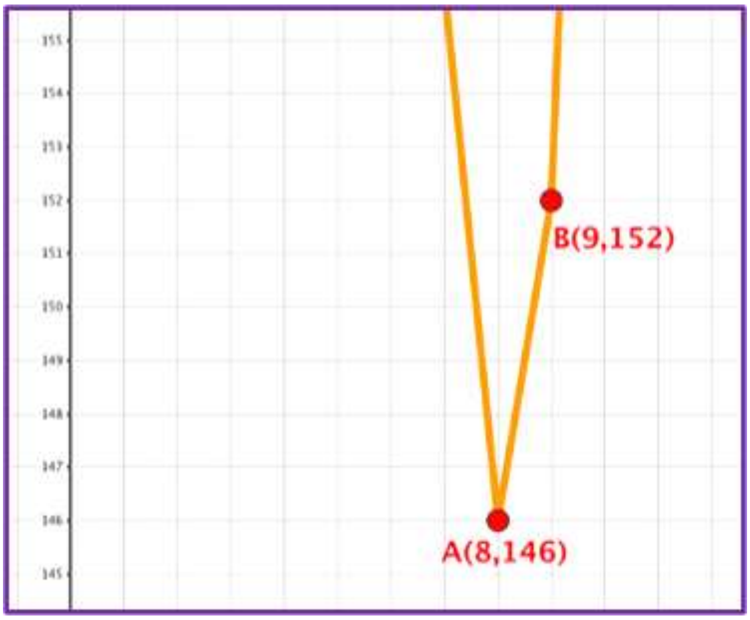
GGB 程式軟體

$f(8) = 146$ *and* $f(9) = 152$

$f(8) < f(9)$

右圖最低點也是「尖的」！

（ 認知衝突1 ）!!!



驗 證：

n	圖形	n	圖形	n	圖形	n	圖形
1	尖的	6	尖的	11	尖的	16	尖的
2	尖的	7	尖的	12	尖的	17	尖的
3	水平的	8	尖的	13	尖的	18	尖的
4	尖的	9	尖的	14	尖的	19	尖的
5	尖的	10	尖的	15	尖的	20	水平的

哪裡出錯了!!!

討論９：$f(x) = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

提問１：n ＝？時，$f(x)$ 在一區間發生最小值（水平的）

條件１：$N = \frac{(1+n)n}{2}$ ＝ **偶數** $\Rightarrow$ **還需要什麼其他條件？**

Note：

✧ 若$f(x)$ 在「**一點**」發生**最小值** $\Rightarrow$ **稱$f(x)$之極值是「尖的」**。

✧ 若$f(x)$ 在「**一區間**」發生**最小值** $\Rightarrow$ **稱$f(x)$極值是「水平的」**。

思考１：若$f(x) = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$之極值是水平的！

✓ **條件１**：

$x = 1$、2、2、3、3、$3\cdots$、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n

$$\Rightarrow N = \frac{(1+n)n}{2} = \text{偶數} \qquad \text{———（公式1）}$$

✓ **條件２**：

(1) $x = 1$、2、2、3、3、$3\cdots m$、「$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{m+1}$(**最中間的兩個數**)」、

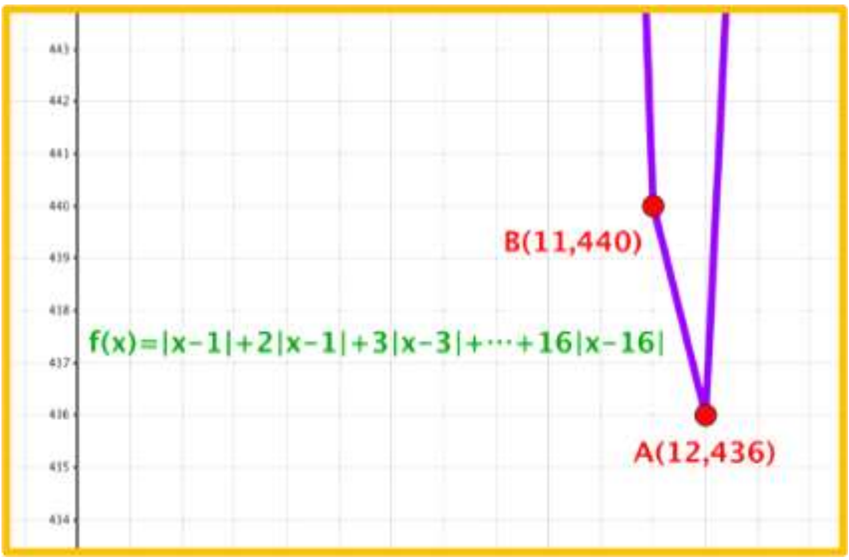
$(m+1)\cdots(m+1)$、$(m+1)$、$(m+1)\cdots n$、n、n、n、n、n

$\Longrightarrow$ ***f*(*x*)之極值是「水平的」。**

(2) $x = 1$、2、2、3⋯m、***m*(最中間的數**

)、$m\cdots n$、n、n、n、n、n

N = 奇數　$\Longrightarrow$ ***f*(*x*)之極值是「尖的」。**



思考2：

若 $x = 1$、2、2、3、3、3⋯m、**「m、$m+1$(最中間的兩個數)」**、

⋯$(m+1)$、$(m+1)$、$(m+1)$、$(m+1)\cdots n$、n、n、n、n、n

即 $\{1$、2、2、3、3、3⋯m、m、m、m、m (m個)$\}$ 的 **「總個數」**

= $\{(m+1)、(m+1)\cdots n、n、n、n、n、n、n(n個)\}$ 的「**總個數**」

$$\Rightarrow \quad 2 * \frac{(1+m)m}{2} = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\Rightarrow \ 2 * (m^2 + m) = (n^2 + n) \qquad \text{———— （公式2）}$$

提問２：$f(x) = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

若 $n \leq 100000$， $f(x)$之極值是「**水平的**」之 n 值有幾個？

猜測１：至少有2成吧！即至少有 20000 個$f(x)$之極值是「水平的」

我們只能先用 Excell 直接計算<u>公式 2</u> 之 n 與 m 之解，如下表…

m	n
2	3
14	20
84	119
492	696
2870	4059
16730	23660

竟然 $n \leq 100000 \Rightarrow f(x)$之極值是「**水平的**」之 n 值只有 6 個！

（ **認知衝突２** ）!!!

怎麼會如此少！！！

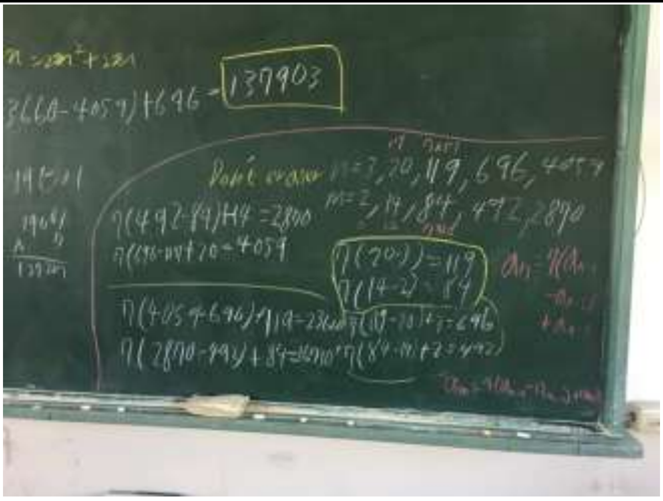
想問，$n \leq 1000000$， $f(x)$之極值是「**水平的**」之 n 值有幾個？

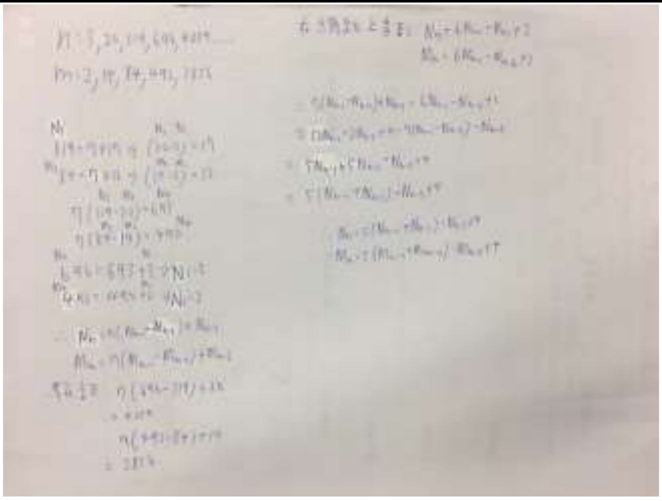
由於計算量太大了，我們希望從<u>**代數分析**</u>去求 n 值的解。

思考３： 已知 $f(x)$之極值是「**水平的**」

$n=\{3、20、119、696、4059、23660\cdots\}$，其中是否存在規律？

我們觀察後發現…





$$a_1=3，a_2=20$$

$\Longrightarrow a_2-a_1=20-3=17 \Longrightarrow \boldsymbol{a_3=119=7\times17=7(a_2-a_1)}$

$\Longrightarrow a_3-a_2=119-20=99\ \ and\ \ 7(a_3-a_2)=693$

$\Longrightarrow \boldsymbol{a_4=696=693+3=7(a_3-a_2)+a_1}$

$\Longrightarrow a_4-a_3=577\ \ and\ 7(a_4-a_3)=4039$

$\Longrightarrow \boldsymbol{a_5=4059=4039+20=7(a_4-a_3)+a_2}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{a_6=7(a_5-a_4)+a_3}$

$\Longrightarrow$ **推測** $n=\{3、20、119、696、4059、23660\cdots\}$ 形成一個

$$\boldsymbol{a_1=3、a_2=20、a_3=119}$$

遞迴數列關係：$\boldsymbol{a_n=7(a_{n-1}-a_{n-2})+a_{n-3}}$ —— （**公式3**）

利用此遞迴關係，可求得之後的 n 值：

$n=\{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

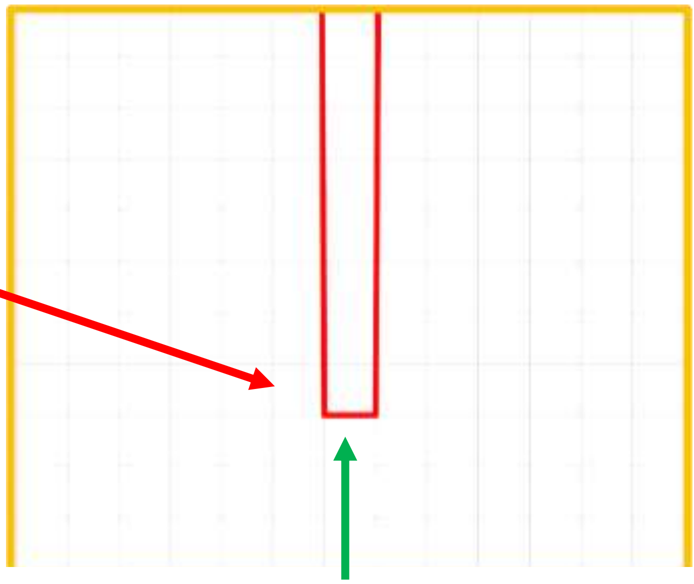
亦即 $\boldsymbol{n\le1000000}$，$f(x)$之極值是「**水平的**」之 n 值只有 8 個！

定義： $f_n(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

驗證結果：

函數	$f_{119}(x)$	$f_{696}(x)$	$f_{4059}(x)$	$f_{23660}(x)$	$f_{137903}(x)$	$f_{803760}(x)$
極值	水平的	水平的	水平的	水平的	水平的	水平的

水平的！



提問 $\boldsymbol{f_{119}(x) = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-3| + \cdots + 119|x-119|}$

（前 2 項 或 前 3 項為起始值）

◆ 數列1： $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$ 及 $p_m = 7(p_{m-1} - p_{m-2}) + p_{m-3}$

$\{a_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

$\{p_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344\cdots\}$

◆ 數列2： $b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2} + 2$ 及 $q_m = 6q_{m-1} - q_{m-2} + 2$

$\{b_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

$\{q_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344\cdots\}$

◆ 數列3： $c_n = 5(c_{n-1} + c_{n-2}) - c_{n-3} + 4$ 及 $r_n = 5(r_{n-1} + r_{n-2}) - r_{n-3} + 4$

（由 2 *（數列2） — 數列1 ）

$\{c_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

$\{r_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344\cdots\}$

由上推知$\{a_n\} = \{b_n\} = \{c_n\}$ ，起始值 $a_0 = 0$，$a_1 = 3$， $a_2 = 20$

$\{p_m\} = \{q_m\} = \{r_m\}$，起始值 $p_0 = 0$， $p_1 = 2$ ，$p_2 = 14$

結論：此遞迴數列之遞迴關係表示法，是**不唯一**的！

提問 4：如何求遞迴數列 $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$之**一般項 a_n**

研究方法：用拉格朗日差值多項式求得遞迴數列的一般項 a_n

遞迴數列 $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$ ， Let $p = 7, q = -7, r = 1$

列出三階遞迴數列恆等式:

$$
\begin{aligned}
a_1x^n + (a_2 - pa_1)x^{n-1} + ra_0x^{n-2} \\
&= (x^3 - px^2 - qx - r)(a_1x^{n-3} + a_2x^{n-4} + \cdots + a_{n-4}x^2 \\
&\quad + a_{n-3}x + a_{n-2}) + a_{n-1}x^2 + (qa_{n-2} + ra_{n-3})x + ra_{n-2}
\end{aligned}
$$

特徵方程式： $x^3 - px^2 - qx + r = 0$，並求得

三個根分別為 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 + 2\sqrt{2} \\ \gamma = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

即可求得 一般項 $a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n + C \cdot \gamma^n$ ，其中

$$A = \frac{a_1\alpha^2 + (a_2 - pa_1) + ra_0}{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

$$B = \frac{a_1\beta^2 + (a_2 - pa_1) + ra_0}{\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}$$

$$C=\frac{a_1\gamma^2+(a_2-pa_1)+ra_0}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

過程如下：

已知 $x^3-px^2-qx+r=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

代入三階遞迴數列恆等式：

$$\Rightarrow a_1x^n+(a_2-pa_1)x^{n-1}+ra_0x^{n-2}$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(a_1x^{n-3}+a_2x^{n-4}+\cdots+a_{n-4}x^2$$
$$+a_{n-3}x+a_{n-2})+a_{n-1}x^2+(qa_{n-2}+ra_{n-3})x+ra_{n-2}$$

令 $f(x)=a_1x^n+(a_2-pa_1)x^{n-1}+ra_0x^{n-2}$

$$g(x)=(a_1x^{n-3}+a_2x^{n-4}+\cdots+a_{n-4}x^2+a_{n-3}x+a_{n-2})$$
$$R(x)=a_{n-1}x^2+(qa_{n-2}+ra_{n-3})x+ra_{n-2}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,g(x)+R(x)$$

$$\Rightarrow\ f(\alpha)=R(\alpha)\text{，}f(\beta)=R(\beta)\text{，}f(\gamma)=R(\gamma)$$

利用「拉格朗日插值法」

$$\because\ f(\alpha)=R(\alpha)\text{，}f(\beta)=R(\beta)\text{，}f(\gamma)=R(\gamma)$$

$$R(x)=f(\alpha)\cdot\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+f(\beta)\cdot\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+f(\gamma)\cdot\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

and $R(x)=a_{n-1}x^2+(qa_{n-2}+ra_{n-3})x+ra_{n-2}$

比較x^2項的係數

$$\Rightarrow a_{n-1}=\frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{f(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$\Rightarrow a_{n-1}=\frac{a_1\alpha^n+(a_2-pa_1)\alpha^{n-1}+ra_0\alpha^{n-2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\frac{a_1\beta^n+(a_2-pa_1)\beta^{n-1}+ra_0\beta^{n-2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$+\frac{a_1\gamma^n+(a_2-pa_1)\gamma^{n-1}+ra_0\gamma^{n-2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

令

$$A=\frac{a_1\alpha^2+(a_2-pa_1)+ra_0}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$B=\frac{a_1\beta^2+(a_2-pa_1)+ra_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$C=\frac{a_1\gamma^2+(a_2-pa_1)+ra_0}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$\Longrightarrow\ a_{n-1}=A\cdot\alpha^{n-1}+B\cdot\beta^{n-1}+C\cdot\gamma^{n-1}$$

$$\Longrightarrow\ a_n=A\cdot\alpha^n+B\cdot\beta^n+C\cdot\gamma^n$$

接著將所有的參數及起始值代入：

$\alpha=1$, $\beta=3+2\sqrt{2}$, $\gamma=3-2\sqrt{2}$, 及 $p=7, q=-7, r=1$

✧ 起始值：$a_0=0$, $a_1=3$, $a_2=20$

$$a_n=\frac{-1}{2}+\frac{1+\sqrt{2}}{4}\times(3+\sqrt{8})^n+\frac{1-\sqrt{2}}{4}\times(3-\sqrt{8})^n$$

✧ 起始值：$p_0=0$, $p_1=2$, $p_2=14$

$$p_m=\frac{-1}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{8}\times(3+\sqrt{8})^m+\frac{2-\sqrt{2}}{8}\times(3-\sqrt{8})^m$$

數列驗證：

n	$a_n=\frac{-1}{2}+\frac{1+\sqrt{2}}{4}\times(3+\sqrt{8})^n+\frac{1-\sqrt{2}}{4}\times(3-\sqrt{8})^n$	m	$p_m=\frac{-1}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{8}\times(3+\sqrt{8})^m+\frac{2-\sqrt{2}}{8}\times(3-\sqrt{8})^m$
1	3	1	2
2	20	2	14
3	119	3	84
4	696	4	492
5	4059	5	2870
6	23660	6	16730
7	137903	7	97512
8	803760	8	568344
9	4684659	9	3312554
10	27304196	10	19306982
11	159140519	11	112529340

表示，推得的 **一般項 a_n 及 p_m** 是**正確的！**

提問5：此兩個遞迴數列有何特別之處嗎？

在找出此兩個遞迴數列的一般項後，我們想要更深入地認識了解這兩個遞迴數列有何特別及應用之處？

於是，我們查了資料竟然發現：

$\{a_n\}=\{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

剛好為「近乎等腰直角三角形」中較小的一股！（邊長 abc 如表）

$c_n=2p_n+1$

a	b	c
3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025
803760	803761	1136689
4684659	4684660	6625109

而其中的斜邊$\{c_n\}$可以用「**佩爾方程遞迴**」(維基百科)求出：

$$\boldsymbol{c_n = 1，d_n = 2}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c_n = 2d_{n-1} + c_{n-1}} \\ \boldsymbol{d_n = 2c_n + d_{n-1}} \end{cases} \quad \text{—(}\textbf{佩爾方程遞迴}\text{)}$$

「近乎等腰直角三角形」是指三邊皆為整數且二股之差為 1。

即邊長 a 及 b 之關係：b = a + 1 $\Longrightarrow$ a ≈ b，當 a 很大時。

若直角三角形之一股為 n ，另一股為 $n+1$

其中$(n+1)n = (m+1)2m$，由畢式定理得知：

斜邊 $= \sqrt{\mathrm{n}^2 + (\mathrm{n}+1)^2} = \sqrt{2\mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n} + 1} = \sqrt{4m^2 + 4m + 1} = \sqrt{(2m+1)^2} = 2m + 1$

$$\therefore \textbf{斜邊} = \boldsymbol{2m+1}$$

- 發現這些遞迴數列 **magic** 之處，就在於一股為$\{a_n\}$，另一股為$\{a_n + 1\}$，而斜邊 $\{c_n\}$ 剛好是 $\{p_n\}$ 數列的 2 倍再加 1！

  $\boldsymbol{c_n}^{\boldsymbol{2}} = {a_n}^2 + (a_n + 1)^2 \quad \boldsymbol{\Longrightarrow c_n = 2p_n + 1}$

math magic！

提問 6：可以求出此斜邊 $\{\boldsymbol{c_n}\}$ 的一般項嗎？

Sol：已知 $\{p_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512 \cdots\}$

且 $p_n = \frac{-1}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{8} \times (3+\sqrt{8})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{8} \times (3-\sqrt{8})^n$ 代入 $c_n = 2p_n + 1$

$$\therefore\ c_n=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\times(3+\sqrt{8})^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\times(3-\sqrt{8})^n$$

由參考文獻第12 項得知：(如下圖)

96 PYTHAGOREAN TRIADS OF THE FORM X, X + 1, Z

Then, by solving these simultaneous equations,

(4) $$p_n = 1/2[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n]$$

(5) $$q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n]$$

102 PYTHAGOREAN TRIADS OF THE FORM X, X + 1, Z

APPENDIX A

n		q_n	$2q_nq_{n+1}$	=	x
1		1	4	x_1 =	3
2		2	20	x_2 =	20
3	$\underline{z_1}$ =	5	120	x_3 =	119
4		12	696	x_4 =	696
5	$\underline{z_2}$ =	29	4060	x_5 =	4059
6		70	23360	x_6 =	23360
7	$\underline{z_3}$ =	169	137904	x_7 =	137903
8		408	803760	x_8 =	803760
9	$\underline{z_4}$ =	985	4684660	x_9 =	4684659

$$p_n=\frac{-1}{2}\cdot[\,(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\,]$$
$$q_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot[\,(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\,]$$

$$\{a_n\}=2q_n\cdot q_{n+1}=\{3、20、119、696、4059、23660、137903\cdots\}$$

我們是用「另一方法」求出數列之一般項！

在資料查詢的過程中，還發現兩點關於 $\{c_n\}$ 的神奇之處

(1) $\mathbf{2\,c_n{}^2-1}$ 恆為完全平方數！

$\because c_n{}^2=a_n{}^2+(a_n+1)^2$ 代入 $2\,c_n{}^2-1$

得 $2c_n{}^2-1=4a_n{}^2+4a_n+1$

$\Rightarrow 2R_n{}^2-1=(2a_n+1)^2$

(2)近乎等腰的直角三角形之斜邊所形成的數列c_n，竟然是馬爾可夫數(markoff numbers)的一員！

提問7：$f_n(x)$之函數圖形可以分幾類呢？

研究結果：2類。(於　研究結果與討論　說明)

五、 研究結果與討論：

定義：

✧ 若$f(x)$ 在「**一點**」發生**最小值** $\Rightarrow$ **稱$f(x)$之極值是「尖的」。**

✧ 若$f(x)$ 在「**一區間**」發生**最小值** $\Rightarrow$ **稱$f(x)$極值是「水平的」。**

★ **結論1：**

(一) 型態一： $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$

➢ n $=(2k+1)\Rightarrow x=\frac{1+(2k+1)}{2}=k+1$時，$f(x)$ 有最小值（尖的）。

➢ n $=2k\Rightarrow k\le x\le k+1$時，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

即 **x為中位數** 時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

★ **結論2：**

(二) 型態二： $f_n(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$

$f(x)$ 極值是「水平的」的條件：

✓ 條件1： $N=\frac{(1+n)n}{2}=$ **偶數** ———（**公式**1）

✓ 條件2： $2*(m^2+m)=(n^2+n)$ ———（**公式**2）

$\Rightarrow m\le x\le m+1$（**第$\frac{N+1}{2}$個$x$值為$m$**），$f(x)$ 有最小值（水平的）。

即 **x為中位數（最中間的兩個數）** 時，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

★ **結論3：**

若上述之條件1或條件2，任一條件不成立，$f(x)$ 有最小值（尖的）。

★ **結論4：** 滿足公式2之所有 n 及 m 值會形成遞迴數列（三種遞迴關係）

➢ $a_n=7(a_{n-1}-a_{n-2})+a_{n-3}=6a_{n-1}-a_{n-2}+2$

$= 5(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3} + 4$

起始值 $a_0 = 0$，$a_1 = 3$， $a_2 = 20$

$\{a_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

➢ $p_m = 7(p_{m-1} - p_{m-2}) + p_{m-3} = 6p_{m-1} - p_{m-2} + 2$

$= 5(p_{m-1} + p_{m-2}) - p_{m-3} + 4$

起始值 $p_0 = 0$，$p_1 = 2$，$p_2 = 14$

$\{p_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344\cdots\}$

★ **結論 5：用拉格朗日差值多項式求得遞迴數列的一般項 a_n及p_m**

✧ 起始值：$a_0 = 0, a_1 = 3, a_2 = 20$

$$a_n = \frac{-1}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{4} \times (3+\sqrt{8})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4} \times (3-\sqrt{8})^n$$

✧ 起始值：$p_0 = 0, p_1 = 2, p_2 = 14$

$$p_m = \frac{-1}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{8} \times (3+\sqrt{8})^m + \frac{2-\sqrt{2}}{8} \times (3-\sqrt{8})^m$$

★ **結論 6：求得「近乎等腰直角三角形」斜邊遞迴數列一般項 c_n**

$$c_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \times (3+\sqrt{8})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \times (3-\sqrt{8})^n \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c_n = 2p_n + 1}$$

接下來回到研究出發點之的實作題目！

14. 已知 x 為實數，若 $f(x) = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \ldots\ldots + |9x-1| + |10x-1|$，當 $x = a$ 時，$f(x)$ 有最小值為 m，試求序對 $(a, m) =$ ________ 。

Sol： $x = \left\{\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{10}、\frac{1}{9}、\frac{1}{9}、\frac{1}{9}\cdots\frac{1}{2}、\frac{1}{2}、1\right\}$

x值共 55 個，中位數在第 28 個 x 值！

$\Rightarrow x = \frac{1}{7} \Rightarrow f\left(\frac{1}{7}\right) = minimum$ ！（尖的）

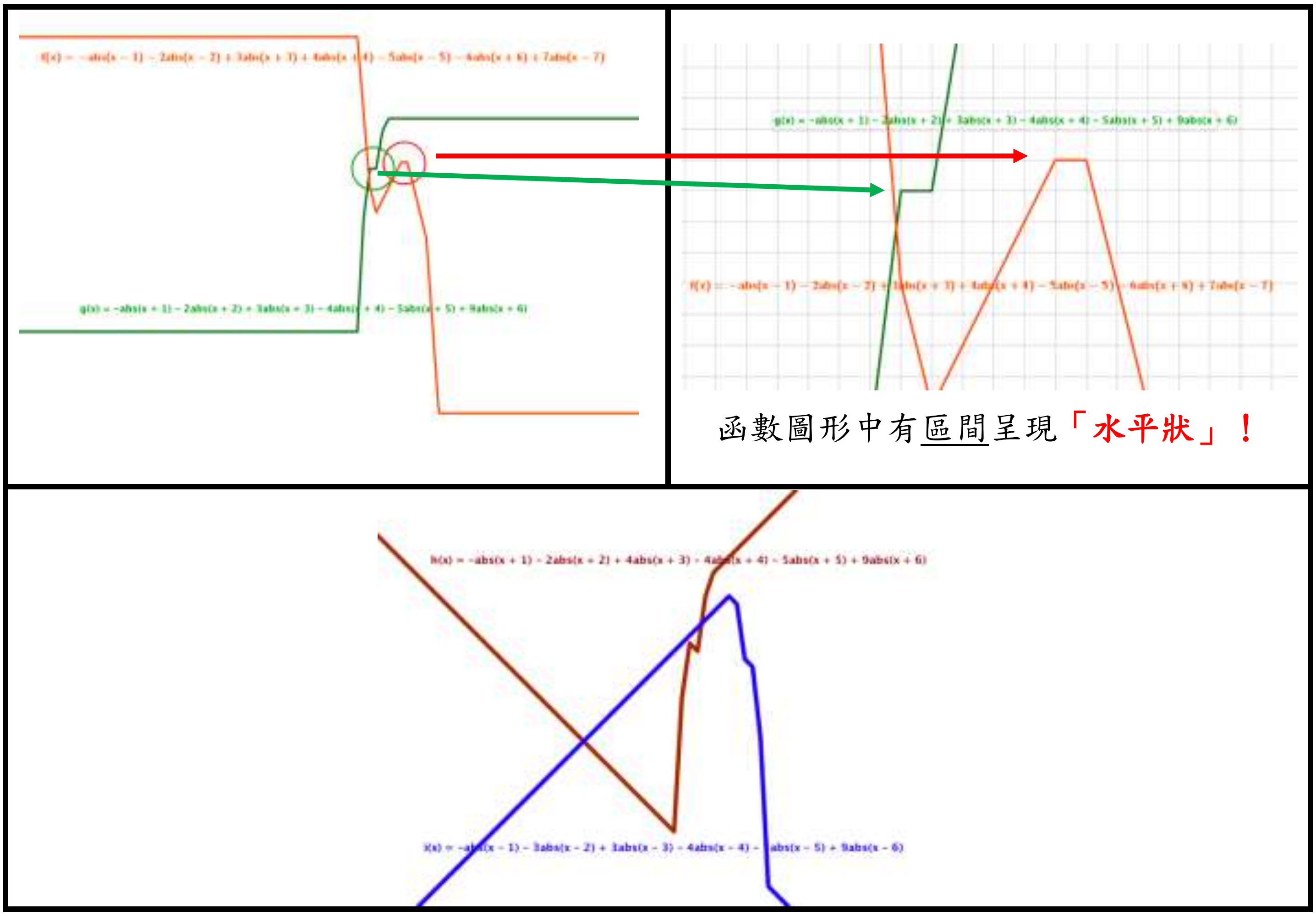
★ **結論 7：$\mathrm{F}(x) = \mathrm{A}|x-a| + \mathrm{B}|x-b| + \mathrm{C}|x-c| + \cdots + \mathrm{K}|x-k|$**

之函數圖形可以分 2 類！（如下圖說明）

➢ 係數和=$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \cdots + \mathrm{K} = 0$，則 $\mathrm{F}(x)$函數圖形兩側呈水平狀

➢ 係數和= $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \cdots + \mathrm{K} > 0$ 或 係數和 $= \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \cdots + \mathrm{K} < 0$

則 $\mathrm{F}(x)$函數圖形兩側呈朝上或朝下



函數圖形中有區間呈現「**水平狀**」！

六、 評鑑與檢討

➢ A 學生心得：

在這次的獨立研究中，最印象深刻的，便是如何求出遞迴數列之一般項的環節，過程中嘗試了好幾種方法，最後決定用「拉格朗日插值法」來求出遞迴數列的一般項，並成功地求出來了！

在求遞迴數列之一般項時，最困難的，並不是運算，而是去理解：為什麼會有這個步驟？理解過後，剩下的就只是計算了！

雖然做獨立研究的過程耗時、費力，不過「成果」就在歷經重重難關後，將作品成功完成後，成就感十足！以前也曾想做類似的數學研究，但卻因怠惰、能力不足、時間不夠…等因素而無法完成，只能半途而廢。俗話說：「行百里者半九十」！做每件事情都一樣，沒有做完與沒做，其實是同樣的意思。因此，凡事都應當盡力而為。此次獨立研究，我也是秉持著這樣的心態去做，而這次總算將那百里路走完了！感謝老師的指導！。

➢ B 學生心得：

這個題目，一開始我就覺得很有趣！

當我們分析與研究題目到一半時，發現 $f(x)$ 之極值若希望是水平的，必須要滿足條件 1 及條件 2。結果，花了很大的心力與計算，才找出了前幾項的 n 值與 m 值！

但是，因為不知道其中的規則，若要再求出後面幾項的 n 值與 m 值，那個計算量實在太大了！就在眾人皆無解決之法的時候，我觀察出了其中的「規則(遞迴關係)」！

就因為如此，研究才得到了重大的突破，也才得以繼續研究下去。所以我相當有成就感的！也很感謝同學們的合作與付出，還有老師的耐心教導，大家一起完成作品，也讓我收穫良多！

➢ C 學生心得：

從一開始對題目不熟悉，到後來越來越了解絕對值，過程中經過長時間的研究，學到要怎麼與同學合作，還有時間上的分配。在國中最後一年，居然還有機會做獨立研究，一方面拚課業，一方面做研究，真的是個很不一樣的體驗，雖然很辛苦很累，不過收穫經驗挺值得的！

➢ 未來展望：

1. 對數列 $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$ 做更深入的研究與探討，了解此數列更多的應用。
2. 從結論7的函數圖形中，發現有區間呈現「**水平狀**」！其中的條件是什麼？希望未來能夠對此函數 F(x)有更多的研究與了解！
3. 掌握此函數 F(x)之方程式與幾何圖形之間的關鍵，是否能使用此函數 F(x)方程式為基礎，畫出各式各樣圖案？與碎形有異曲同工之妙。

七、 參考資料

1、 106 學年科學班考題。

2、 十二年國民基本教育課程綱要 - 數學領域

3、 科學 Online 遞迴關係(一)
https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=36574

4、 中華民國第58 屆中小學科學展覽會得獎作品：「金金」計較
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/58/pdf/NPHSF2018-030417.pdf

5、 OEIS 數列查詢(1)(https://oeis.org/A000129)
(2)(https://oeis.org/A001652)
(3)(https://oeis.org/A053141)
(4)(https://oeis.org/A002559)
(5)(https://oeis.org/A001653)

6、 建中數理資優班『遞迴方法』講義.第二部分：簡易遞迴數列的解法

7、 用「多項式除法」求二階遞迴數列的一般項(重根與虛根)

8、 以拉格朗日差值法求得三階遞迴數列的一般式

9、 維基百科
(1)三次方程式 (2)特徵方程式 (3)拉格朗日差值法 (4)馬爾可夫方程
(5)特殊直角三角形-幾乎等腰的直角三角形 (6)畢氏三元數

10、 馬爾可夫數
(1)https://minortriad.com/markoff.html
(2)https://mathworld.wolfram.com/MarkovNumber.html

11、 原始勾股三元組
http://pythagoreantriples.blogspot.com/2013/04/pts-with-near-isosceles-triangles.html

12、 原始勾股三元組（a，b = a + 1，c）
https://benvitalenum3ers.wordpress.com/2016/08/28/primitive-pythagorean-triples-a-ba1-c/

13、 Pythagorean Triads of the Form x， x+1， z Described By Recurrence Sequences.