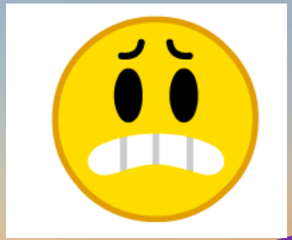
Anthony Liou

Mathmagic ～
「絕對值」得一看－極值天堂雲蹤覓



逃避

原地踏步！

認知衝突

面對

人類進步！

研究動機

14. 已知 x 為實數，若 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\ldots\ldots+|9x-1|+|10x-1|$，當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值為 m，試求序對 $(a, m)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

好奇！

找資料

研究

有疑問！

請教老師！

14. 已知 x 為實數，若 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\ldots\ldots+|9x-1|+|10x-1|$，當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值為 m，試求序對 $(a,\ m)=$＿＿＿＿＿＿。

轉換－研究題目

型態一： $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$

型態二： $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$

則 $x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

→ 比較好研究！

B. 研究問題：

$$f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$$

1. $x=$？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。
2. $n=$？時，$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一點（尖的）。
3. $n=$？時，$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間（水平的）
4. 若 $n \leq 100000$，$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間（水平的）的 n 值有幾個？

研究問題

5. 若 $f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間，n 是否有規則？

6. 承上，若 n 有規則，規則是什麼？

7. 遞迴數列的遞迴關係表示是唯一的嗎？

8. 如何求遞迴數列 a_n 之「一般項」？

9. 此種遞迴數列有何特別之處嗎？

10. $f(x)$ 之函數圖形是否可以分類？

研究方法

$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$,

則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

➢ 代數分析：

(1) 若 $x < 1 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = -3x + 6$

$\Rightarrow f(x) > 3$ ， $x < 1$

(2) 若 $1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = -x + 4$

$\Rightarrow 3 \ge f(x) > 2$ ， $1 \le x < 2$

(3) 若 $2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = x$

$\Rightarrow 3 > f(x) \ge 2$ ， $2 \le x < 3$

(4) 若 $3 \le x \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| = 3x - 6$

$\Rightarrow f(x) \ge 3$ ， $3 \le x$

由 (1) (2) (3) (4) 得知 $\Rightarrow f(x) \ge 2$ ，$\forall x \in \mathbb{R}$，且 $f(2) = 2$

最小值

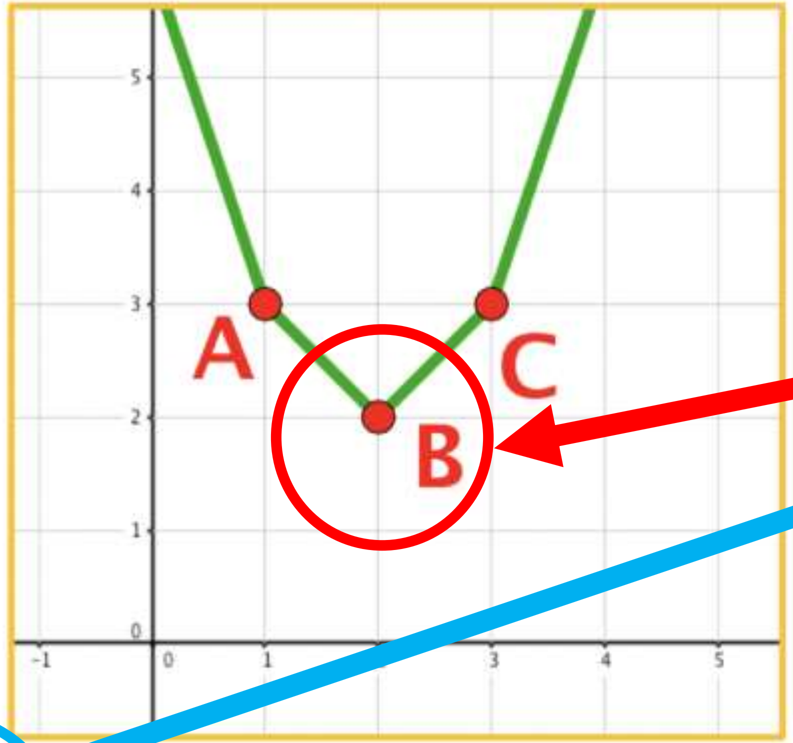
研究方法

$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$，

則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

➤ 幾何圖形分析：

GGB 程式軟體



$x = 1, 2, 3$

$\Rightarrow$ 中位數為 2

最小值

結論：當 $x = 2$ 時，$f(2) = 2$ 為最小值（極值）。

$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一點（尖的）。

研究方法

$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$，
則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

➢ 代數分析：

(1) 若 $x < 1 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

$= -4x + 10 \Rightarrow f(x) > 6$，$x < 1$

(2) 若 $1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

$= -2x + 8 \Rightarrow 6 \ge f(x) > 4$，$1 \le x < 2$

(3) 若 $2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

$= 4 \Rightarrow f(x) = 4$，$2 \le x < 3$

(4) 若 $3 \le x < 4 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

$= 2x - 2 \Rightarrow 6 > f(x) \ge 4$，$3 \le x < 4$

(5) 若 $4 \le x \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

$= 4x - 10 \Rightarrow f(x) \ge 6$，$4 \le x$

由 (1) (2) (3) (4) (5) 得知 $\Rightarrow f(x) \ge 4$，$\forall x \in \mathbb{R}$

最小值

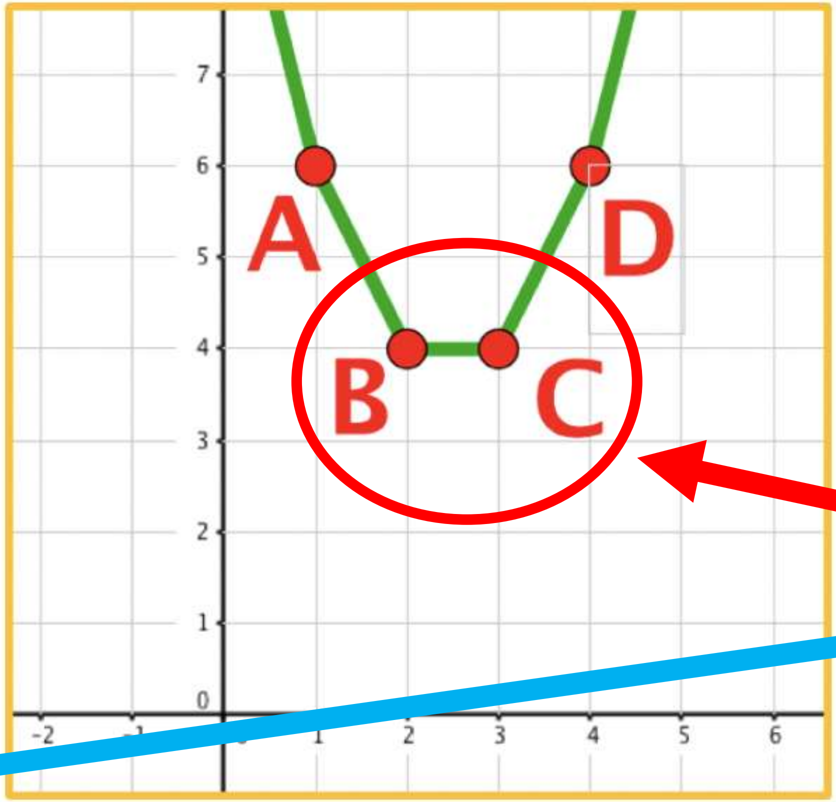
研究方法

$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$，則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

➢ 幾何圖形分析：GGB 程式軟體

$x = 1, 2, 3, 4$

$\Rightarrow$ 中位數為 2 及 3 之間。



最小值

結論：當 $2 \le x \le 3$ 時，$f(x) = 4$ 為最小值（極值）。

$f(x)$ 發生最小值（極值）之 x 值為一區間（水平的）。

Note：

✧ 若$f(x)$在「一點」發生最小值 $\Rightarrow$ 稱$f(x)$之極值是「尖的」。

✧ 若$f(x)$在「一區間」發生最小值 $\Rightarrow$ 稱$f(x)$極值是「水平的」。

★推論 1：$f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$

$n=(2k+1)\Longrightarrow x=\frac{1+(2k+1)}{2}=k+1$時，$f(x)$ 有最小值（尖的）。

★推論 2：$f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$

$n=2k\Longrightarrow k\le x\le k+1$時，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

即 x為中位數 時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

研究題目

型態二：

$$f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$$

則 $x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

奇異點：

$x=1$、2、2、3、3、$3\cdots$、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n

研究方法

$f(x) = |x-1| + 2|x-2|$，則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

➢ 代數分析：

(1) 若 $x < 1 \Rightarrow f(x) = |x-1| + 2|x-2| = -3x+5$

$\Rightarrow f(x) > 2$， $x < 1$

(2) 若 $1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = |x-1| + 2|x-2| = -x+3$

$\Rightarrow 2 \ge f(x) > 1$， $1 \le x < 2$

(3) 若 $2 \le x \Rightarrow f(x) = |x-1| + 2|x-2| = 3x-5$

$\Rightarrow f(x) \ge 1$， $2 \le x$

由 (1) (2) (3) 得知 $\Rightarrow f(x) \ge 1$，$\forall x \in \mathbb{R}$，且 $f(2) = 1$

最小值

研究方法

$f(x) = |x-1| + 2|x-2|$，則 $x =$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

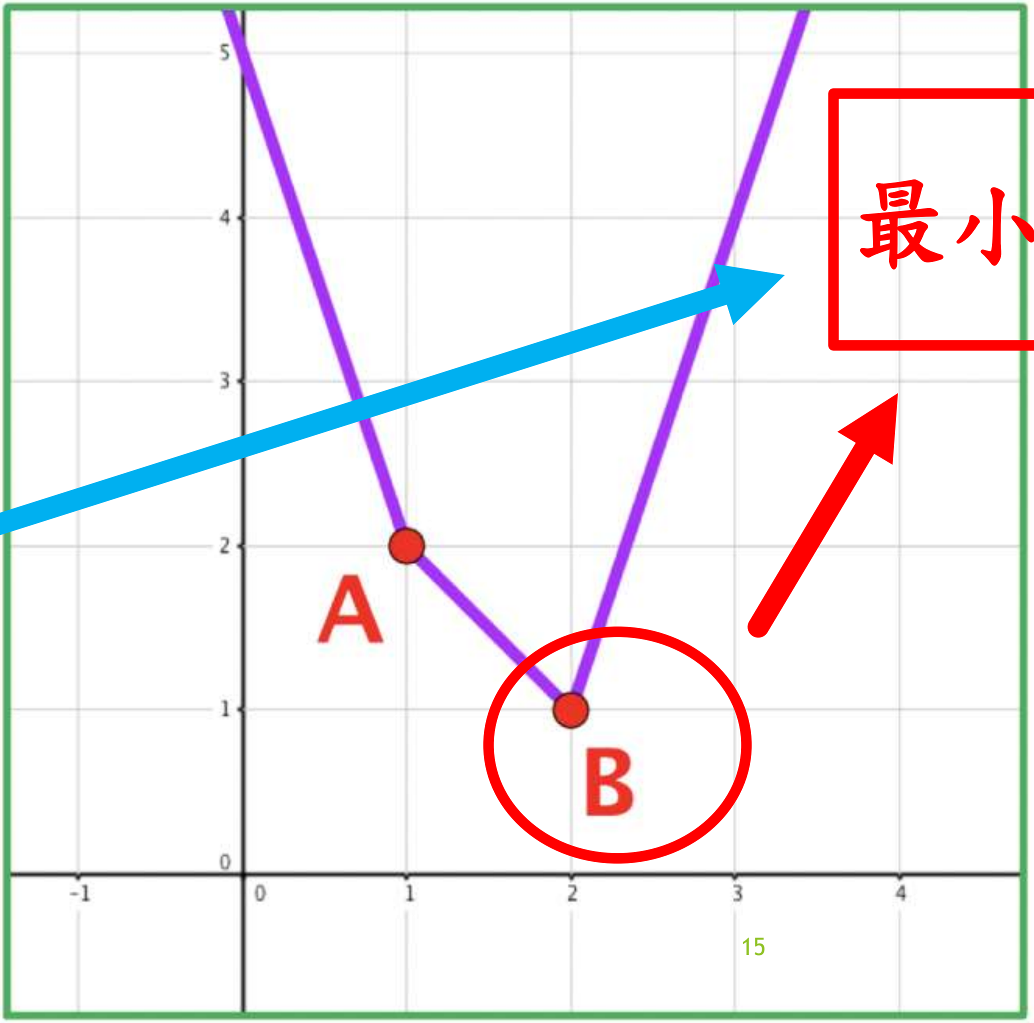
➢ 幾何圖形分析：GGB 程式軟體

$x = 1, 2, 2$

$\Rightarrow$ 中位數為 2

結論：當 $x = 2$，$f(2) = 1$ 為最小值

$f(x)$ 在一點發生最小值（尖的）。



最小值

研究方法

$f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|$，則 $x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）

➢ 代數分析：

(1) $x<1 \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|=-6x+14$

$\Rightarrow f(x)>8$ ， $x<1$

(2) 若 $1\le x<2 \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|$

$=-4x+12 \Rightarrow 8\ge f(x)>4$ ， $1\le x<2$

(3) 若 $2\le x<3 \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|=4$

$\Rightarrow f(x)=4$ ， $2\le x<3$

(4) 若 $3\le x \Rightarrow f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|=6x-14$

$\Rightarrow f(x)\ge 4$ ， $3\le x$

由 (1) (2) (3) (4) 得知 $\Rightarrow f(x)\ge 4$，$\forall x\in\mathbb{R}$，

且 $f(x)=4$，$2\le x\le 3$

最小值

研究方法

$f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|$，則 $x=$ ？時，$f(x)$ 有最小值（極值）

➢ 幾何圖形分析：

GGB 程式軟體

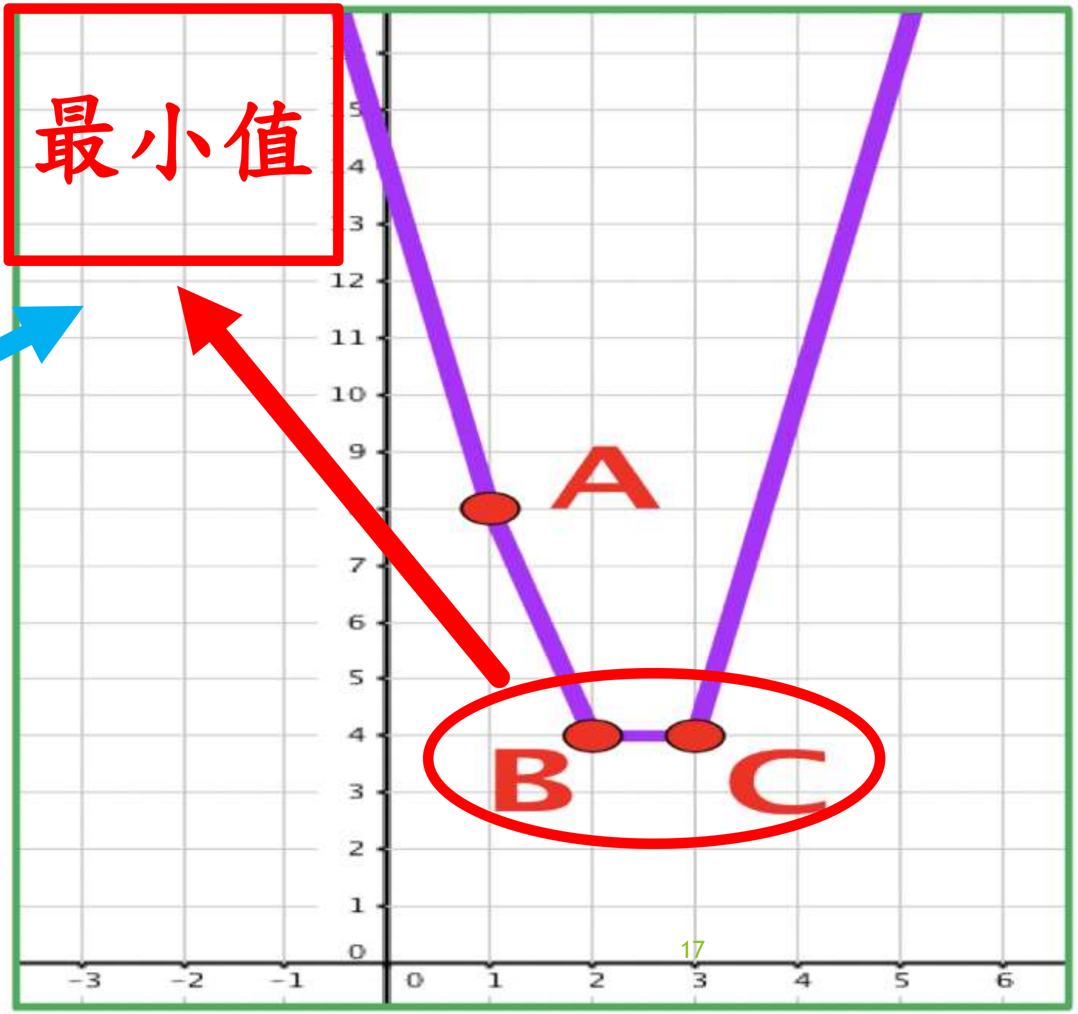
$x=1,2,2,3,3,3$

$\Rightarrow$ 中位數為 2 及 3 之間

結論：當 $2\leq x\leq 3$ 時，$f(x)=4$

為最小值。

$f(x)$在一區間發生最小值（水平的）。



★推論3：$f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$

$x=1$、2、2、3、3、3…、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n

$N=\frac{(1+n)n}{2}=$奇數 $\Rightarrow x=m$，$f(x)$ 有最小值（尖的）。

其中第 $\frac{N+1}{2}$ 個 x 值為 m

★推論4：$f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$

$x=1$、2、2、3、3、3…、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n

$N=\frac{(1+n)n}{2}=$偶數 $\Rightarrow m\le x\le m+1$，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

其中 第 $\frac{N+1}{2}$ 個 x 值為 m 且 第 $(\frac{N+1}{2}+1)$ 個 x 值為 $(m+1)$

即 **x為中位數（最中間的數）**時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

討論8：$f(x)=|x-1|+2|x-1|+3|x-3|+\cdots+11|x-11|$

Sol：用上述的推論來解題：即 $x=$中位數 時，$f(x)$ 有最小值.

1、2、2、⋯、11、11、11、11、11、11、11、11、11、11、11

$\because N=\frac{(1+11)11}{2}=66$，推測 $f(x)$ 之極值為「水平的」。

➢ 幾何圖形分析：

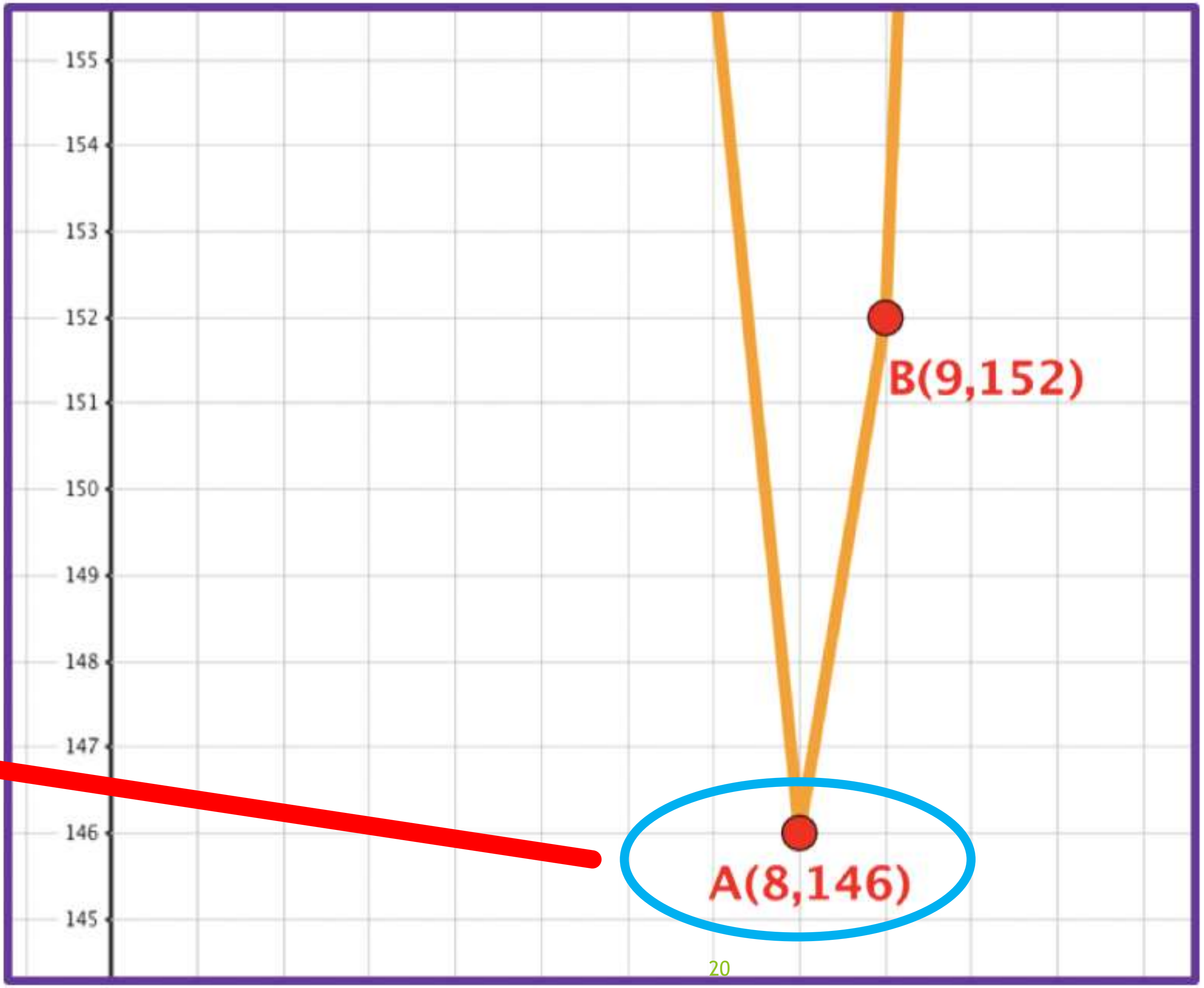
GGB 程式軟體

$f(8) = 146 \ and \ f(9) = 152$

$f(8) < f(9)$

右圖最低點也是「尖的」！

（認知衝突１）!!!



★認知衝突－１★

驗　證：

n	圖形	n	圖形	n	圖形	n	圖形
1	尖的	6	尖的	11	尖的	16	尖的
2	尖的	7	尖的	12	尖的	17	尖的
3	水平的	8	尖的	13	尖的	18	尖的
4	尖的	9	尖的	14	尖的	19	尖的
5	尖的	10	尖的	15	尖的	20	水平的

哪裡出錯了呢！？

討論9：$f(x)=|x-1|+2|x-1|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$

提問1：$n=?$時，$f(x)$在一區間發生最小值（水平的）

條件1：$N=\frac{(1+n)n}{2}=$偶數 $\Longrightarrow$ <u>還需要什麼其他條件？</u>

思考1：若$f(x)=|x-1|+2|x-1|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$之極值是水平的！

✓ **條件1**：

$x=1、2、2、3、3、3\cdots、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n、n$

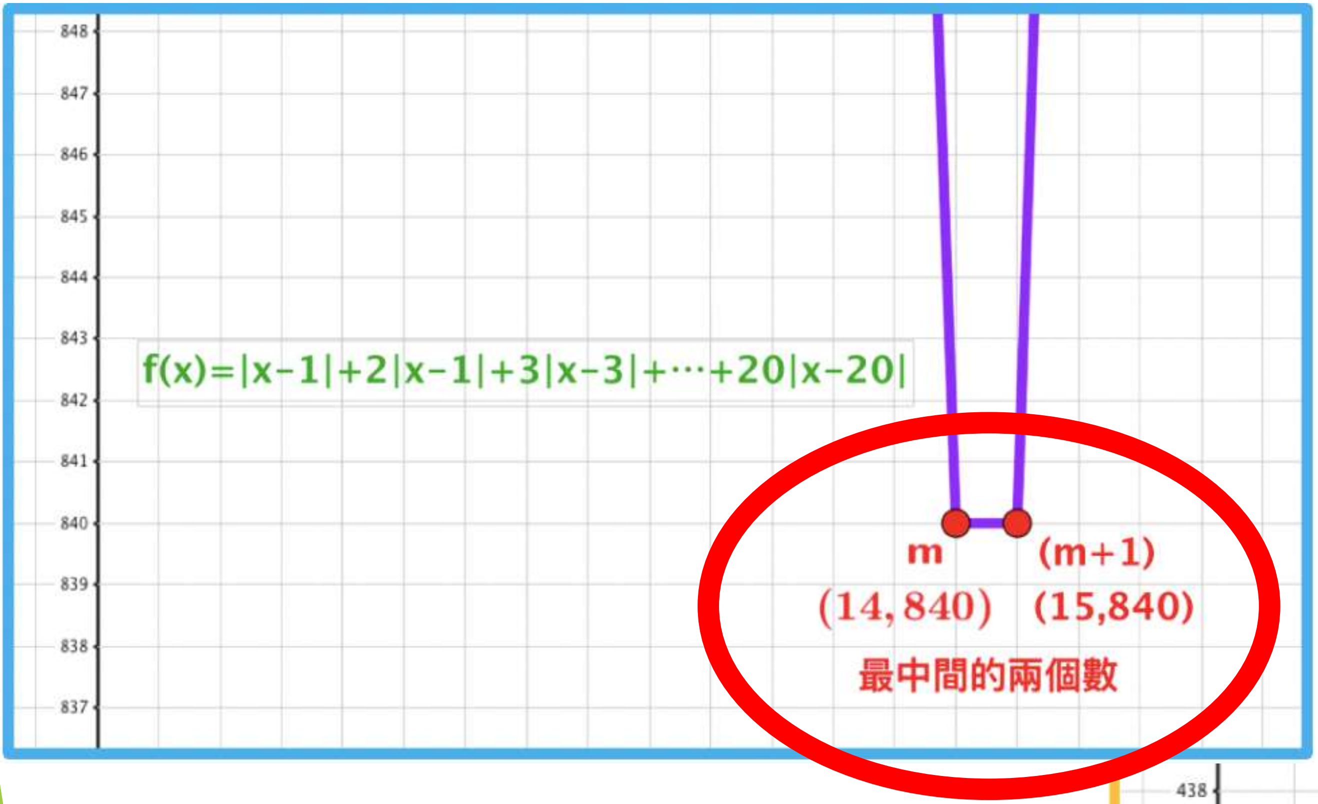
$$\Rightarrow N=\frac{(1+n)n}{2}=\text{偶數} \qquad \text{——（公式1）}$$

✓ **條件2**：

(1) $x=1、2、2、3、3、3\cdots m、$「$m、m+1$(最中間的兩個數)」、

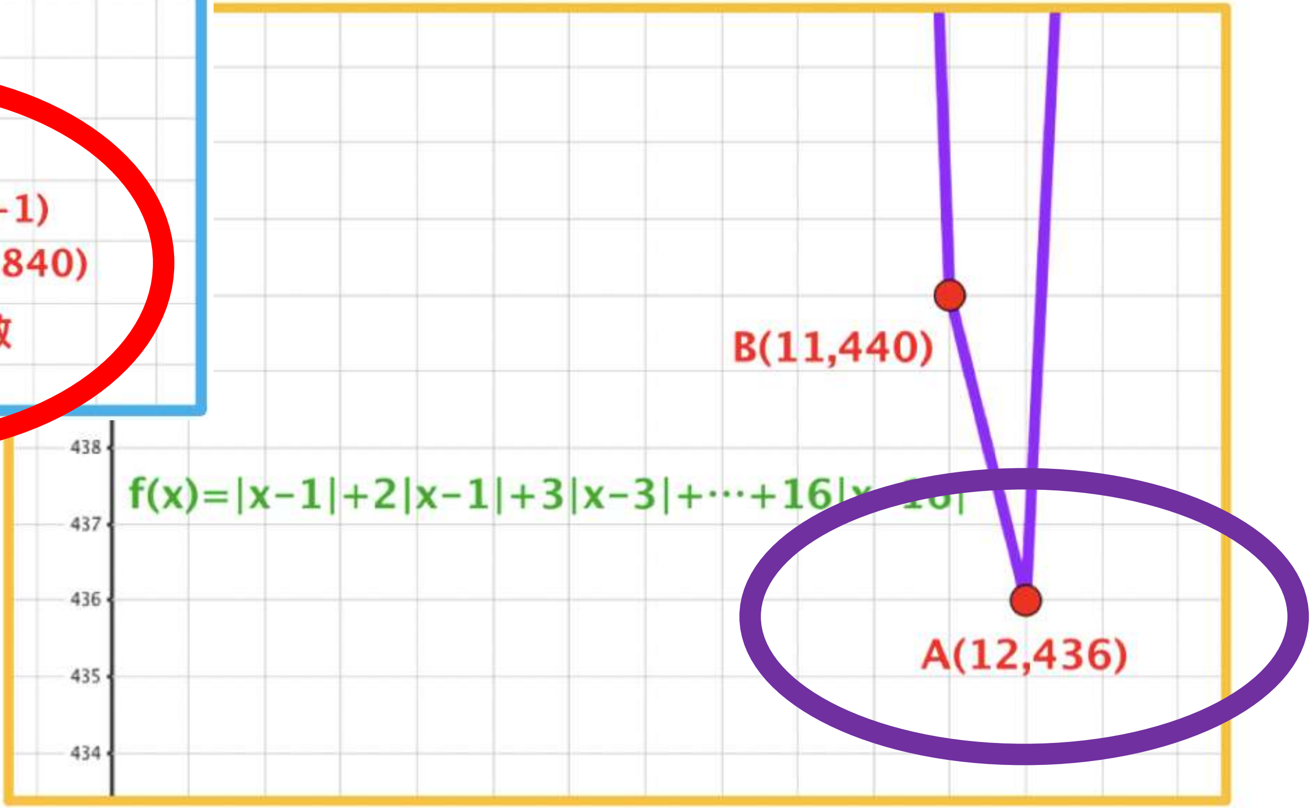
$(m+1)\cdots(m+1)、(m+1)、(m+1)\cdots n、n、n、n、n、n$

$\Rightarrow f(x)$之極值是「水平的」。



、$3\cdots m$、m(最中間的數)、$m\cdots n$、n、n、n、n、n

$N=$ 奇數 $\Longrightarrow$ $f(x)$之極值是「尖的」。



思考2：

若 $x = 1、2、2、3、3、3 \cdots m$、「m、$m+1$(最中間的兩個數)」、

$\cdots (m+1)、(m+1)、(m+1)、(m+1) \cdots n、n、n、n、n、n$

即 $\{1、2、2、3、3、3 \cdots m、m、m、m、m\ (m個)\}$ 的「總個數」

$= \{(m+1)、(m+1) \cdots n、n、n、n、n、n、n(n個)\}$ 的「總個數」

$$\Rightarrow \quad 2 * \frac{(1+m)m}{2} = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2*(m^2+m) = (n^2+n)$$ ——（公式2）

★如何求★

條件2：$2 * (m^2 + m) = (n^2 + n)$___之整數解？

1、代數分析法？ ⟶ 具難度！

2、 EXCELL ⟶ 直接計算！ 

3、 觀察 ⟶ 臆測規則！ 

★ EXCELL 計算

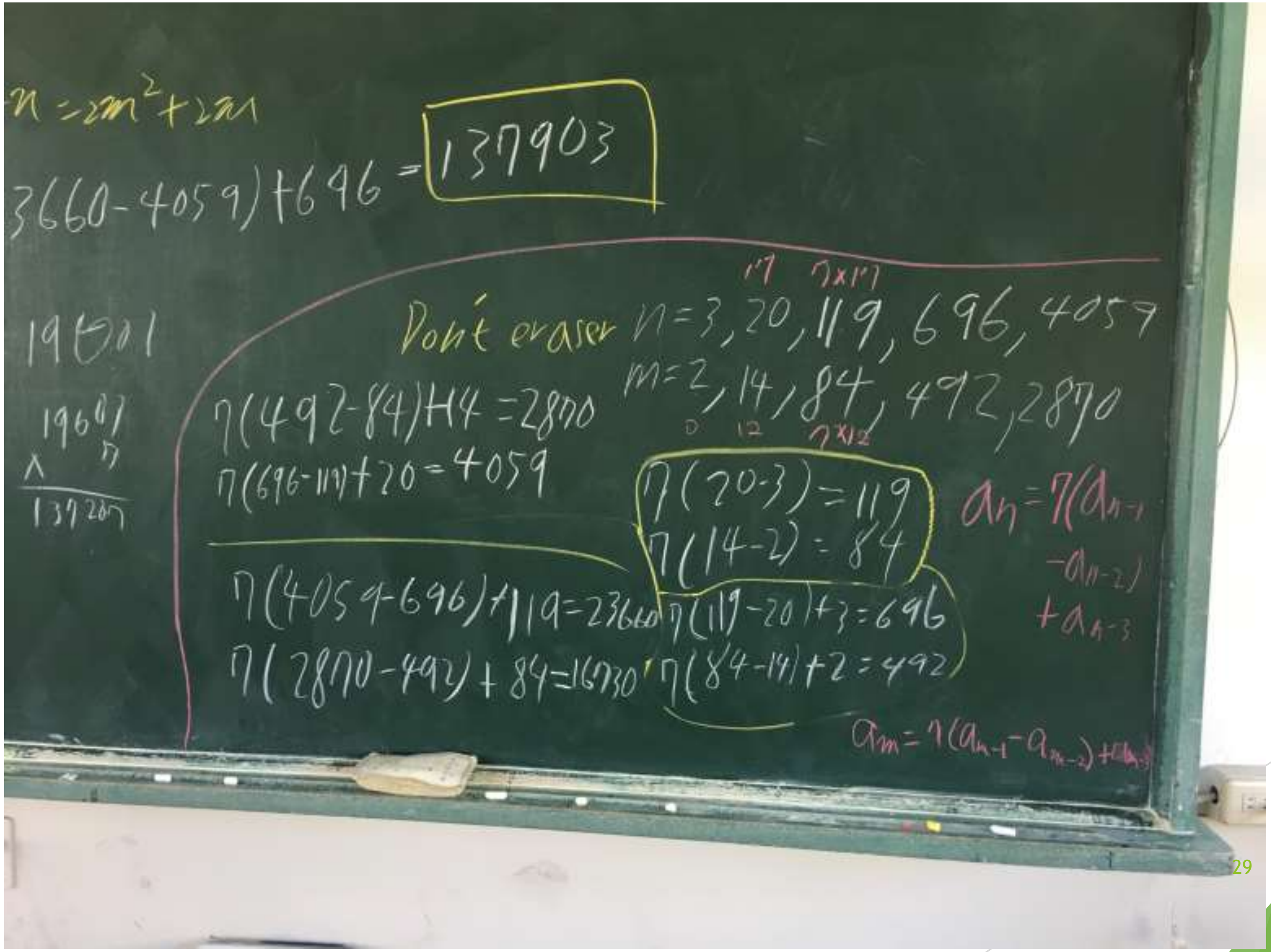
非常耗時!
★困難★

計算量太大!
電腦跑不動!

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1								m	n	
2	1	2	4	2	0	0		2	3	
3	2	6	12	6	0	1	A4	14	20	
4	3	12	24	12	1	0		84	119	
5	4	20	40	20	0	0		492	696	
6	5	30	60	30	0	0		2870	4059	
7	6	42	84	42	0	0				
8	7	56	112	56	0	0				
9	8	72	144	72	0	0				
10	9	90	180	90	0	0				
11	10	110	220	110	0	0				
12	11	132	264	132	0	0				
13	12	156	312	156	0	0				
14	13	182	364	182	0	0				
15	14	210	420	210	0	1	A2			
16	15	240	480	240	0	0				
17	16	272	544	272	0	0				
18	17	306	612	306	0	0				

想放棄!

★ 發現規則 ★



137903
Don't eraser
n=3, 20, 119, 696, 4059
m=2, 14, 84, 492, 2870
7(492-84)+14=2870
7(696-119)+20=4059
7(20-3)=119
7(14-2)=84
7(119-20)+3=696
7(84-14)+2=492

轉機

★ 發現規則 ★

$$a_1 = 3\ ,\ a_2 = 20$$

$\Rightarrow a_2 - a_1 = 20 - 3 = 17 \Rightarrow a_3 = 119 = 7 \times 17 = 7(a_2 - a_1)$

$\Rightarrow a_3 - a_2 = 119 - 20 = 99\ \ and\ \ 7(a_3 - a_2) = 693$

$\Rightarrow a_4 = 696 = 693 + 3 = 7(a_3 - a_2) + a_1$

$\Rightarrow a_4 - a_3 = 577\ \ and\ 7(a_4 - a_3) = 4039$

$\Rightarrow a_5 = 4059 = 4039 + 20 = 7(a_4 - a_3) + a_2$

$\Rightarrow a_6 = 7(a_5 - a_4) + a_3$

★ 臆測規則 ★

$\Rightarrow$ 推測 $n=\{3$、20、119、696、4059、23660$\cdots\}$ 形成一個

$$a_1=3、a_2=20、a_3=119$$

遞迴數列關係：$a_n=7(a_{n-1}-a_{n-2})+a_{n-3}$ —— （公式3）

利用此遞迴關係，可求得之後的 n 值：

$n=\{3$、20、119、696、4059、23660、137903、803760$\cdots\}$

亦即 $n\le 1000000$， $f(x)$之極值是「水平的」之 n 值只有 8 個！

極值天堂

定義：　$f_n(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

驗證結果：

函數	$f_{119}(x)$	$f_{696}(x)$	$f_{4059}(x)$	$f_{23660}(x)$	$f_{137903}(x)$	$f_{803760}(x)$
極值	水平的	水平的	水平的	水平的	水平的	水平的

極值天堂

$n \le 100,0000$

$\Longrightarrow f(x)$之極值

是「水平的」

之 n 值只有 8 個！

★認知衝突－２★

提問：遞迴數列的表示法唯一嗎？

（前 2 項 或 前 3 項為起始值）

◆ 數列1：$a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$、$p_m = 7(p_{m-1} - p_{m-2}) + p_{m-3}$

$\{a_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760 \cdots\}$

$\{p_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344 \cdots\}$

◆ 數列2：$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2} + 2$、$q_m = 6q_{m-1} - q_{m-2} + 2$

$\{b_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760 \cdots\}$

$\{q_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344 \cdots\}$

◆ 數列3：$c_n = 5(c_{n-1} + c_{n-2}) - c_{n-3} + 4$、$r_n = 5(r_{n-1} + r_{n-2}) - r_{n-3} + 4$

（由 2＊(數列2) － 數列1 ）

$\{c_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760 \cdots\}$

$\{r_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344 \cdots\}$

由上推知$\{a_n\}=\{b_n\}=\{c_n\}$，起始值 $a_0=0$，$a_1=3$，$a_2=20$

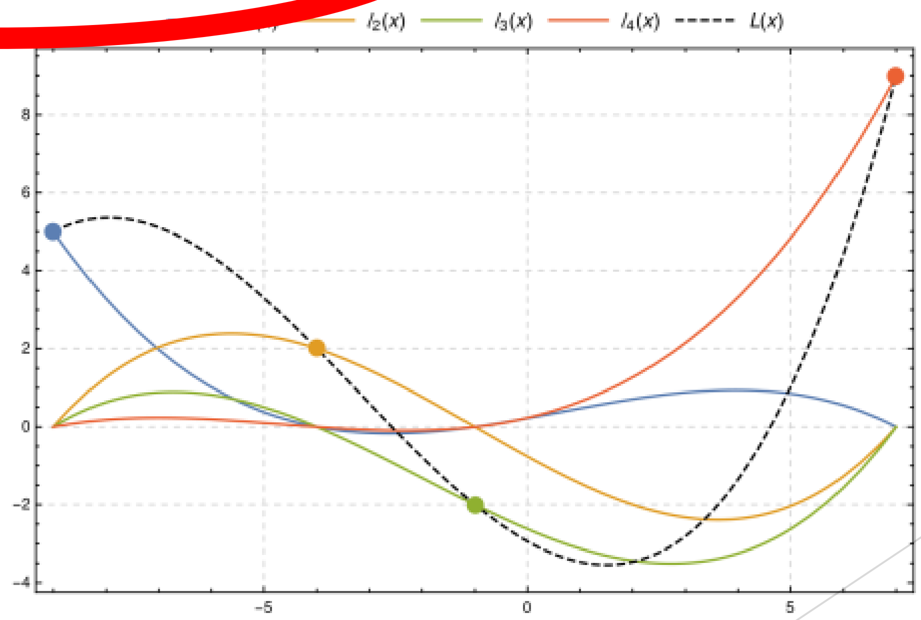
$\{p_m\}=\{q_m\}=\{r_m\}$，起始值 $p_0=0$，$p_1=2$，$p_2=14$

結論：此遞迴數列之遞迴關係表示法，是**不唯一**的！

提問4：如何求遞迴數列 $a_n= 7(a_{n-1}-a_{n-2}) + a_{n-3}$ 之一般項 a_n？

研究方法：

利用「拉格朗日-差值多項式」來求得遞迴數列的一般項 a_n。



解三階遞迴數列之步驟：

列出三階遞迴數列恆等式

以多個函數替換恆等式的式子

利用拉格朗日法列出函數等式

比較原先函數與插值後函數的x平方項係數

求得以特徵方程式三根和n為未知數的一般式

求出特徵方程式的三根

將特徵方程式的三根代入一般式，求得一般式

遞迴數列 $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$

★「拉格朗日-差值多項式」★

1. Let $\mathbf{p = 7, q = -7, r = 1}$

2. 特徵方程式： $x^3 - px^2 - qx + r = 0$

3. 三個根分別為 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 + 2\sqrt{2} \\ \gamma = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

遞迴數列 $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$

利用「拉格朗日插值法」

$$\because\ f(\alpha) = R(\alpha)\text{，}f(\beta) = R(\beta)\text{，}f(\gamma) = R(\gamma)$$

$$R(x) = f(\alpha) \cdot \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + f(\beta) \cdot \frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + f(\gamma) \cdot \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

and $R(x) = a_{n-1}x^2 + (qa_{n-2} + ra_{n-3})x + ra_{n-2}$

遞迴數列 $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$

★「拉格朗日-差值多項式」★

4. 求得一般項：　$a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n + C \cdot \gamma^n$

$$A = \frac{a_1\alpha^2 + (a_2 - pa_1) + ra_0}{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

$$B = \frac{a_1\beta^2 + (a_2 - pa_1) + ra_0}{\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}$$

$$C = \frac{a_1\gamma^2 + (a_2 - pa_1) + ra_0}{\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

遞迴數列 $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$

★「拉格朗日–差值多項式」★

$\alpha = 1, \beta = 3 + 2\sqrt{2}, \gamma = 3 - 2\sqrt{2}$, 及 $p = 7, q = -7, r = 1$

✧ 起始值：$a_0 = 0, a_1 = 3, a_2 = 20$

$$a_n = \frac{-1}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{4} \times (3+\sqrt{8})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4} \times (3-\sqrt{8})^n$$

✧ 起始值：$p_0 = 0, p_1 = 2, p_2 = 14$

$$p_m = \frac{-1}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{8} \times (3+\sqrt{8})^m + \frac{2-\sqrt{2}}{8} \times (3-\sqrt{8})^m$$

數列驗證：

n	$a_n=\frac{-1}{2}+\frac{1+\sqrt{2}}{4}\times(3+\sqrt{8})^n+\frac{1-\sqrt{2}}{4}\times(3-\sqrt{8})^n$	m	$p_m=\frac{-1}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{8}\times(3+\sqrt{8})^m+\frac{2-\sqrt{2}}{8}\times(3-\sqrt{8})^m$
1	3	1	2
2	20	2	14
3	119	3	84
4	696	4	492
5	4059	5	2870
6	23660	6	16730
7	137903	7	97512
8	803760	8	568344
9	4684659	9	3312554
10	27304196	10	19306982
11	159140519	11	112529340

表示，推得的 **一般項 a_n 及 p_m** 是**正確的！**

★參考文獻★

96 PYTHAGOREAN TRIADS OF THE FORM X, X + 1, Z

Then, by solving these si[illegible]

(4) $$p_n = 1/2\left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right]$$

(5) $$q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]$$

102 PYTHAGOREAN TRIADS OF THE FORM X, X + 1, Z

APPENDIX A

n		q_n	$2q_nq_{n+1}$	= {	x
1		1	4	x_1 =	3
2		2	20	x_2 =	20
3	z_1 =	5	120	x_3 =	119
4		12	696	x_4 =	696
5	z_2 =	29	4060	x_5 =	4059
6		70	23360	x_6 =	23360
7	z_3 =	169	137904	x_7 =	137903
8		408	803760	x_8 =	803760
9	z_4 =	985	4684660	x_9 =	4684659

提問5：此兩個遞迴數列有何特別之處嗎？

在找出此兩個遞迴數列的一般項後，我們想要更深入地認識了解這兩個遞迴數列有何特別及應用之處？

於是，我們查了資料竟然發現：

$\{a_n\}=\{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

剛好為「近乎等腰直角三角形」中較小的一股！（邊長abc如表）

$c_n=2p_n+1$

a	b	c
3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025
803760	803761	1136689
4684659	4684660	6625109
27304196	27304197	38613965

c_n數列的神奇之處：

在資料查詢的過程中，還發現兩點關於 $\{c_n\}$ 的神奇之處

(1) $\mathbf{2\,c_n{}^2-1}$ 恆為完全平方數！

$\because c_n{}^2 = a_n{}^2 + (a_n+1)^2$ 代入 $2\,c_n{}^2 - 1$

得 $2c_n{}^2 - 1 = 4a_n{}^2 + 4a_n + 1$

$\Rightarrow 2R_n{}^2 - 1 = (2a_n+1)^2$

(2)近乎等腰的直角三角形之斜邊所形成的數列c_n，竟然是馬爾可夫數(markoff numbers)的一員！

研究結果與討論：

定義：

✧ 若$f(x)$ 在「一點」發生最小值 $\Rightarrow$ 稱$f(x)$之極值是「尖的」。

✧ 若$f(x)$ 在「一區間」發生最小值 $\Rightarrow$ 稱$f(x)$極值是「水平的」。

★ 結論 1：

（一）型態一： $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$

- n ＝ $(2k+1) \Rightarrow x=\frac{1+(2k+1)}{2}=k+1$時，$f(x)$ 有最小值（尖的）。
- n ＝$2k \Rightarrow k \le x \le k+1$時，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

即 x為中位數 時，$f(x)$ 有最小值（極值）。

研究結果與討論：

★ 結論2：

（二）型態二：$f_n(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \cdots + n|x-n|$

$f(x)$ 極值是「水平的」的條件：

✓ 條件1：　$N = \frac{(1+n)n}{2} =$ 偶數　————（公式1）

✓ 條件2：　$2*(m^2+m) = (n^2+n)$　————（公式2）

$\Rightarrow m \leq x \leq m+1$（第$\frac{N+1}{2}$個$x$值為$m$），$f(x)$ 有最小值（水平的）。

即 x為中位數（最中間的兩個數）時，$f(x)$ 有最小值（水平的）。

研究結果與討論：

★ 結論3：

若上述之條件1或條件2，任一條件不成立，$f(x)$ 有最小值（尖的）。

★ 結論4：滿足公式2之所有 n 及 m 值會形成遞迴數列（三種遞迴關係）

- $a_n = 7(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3} = 6a_{n-1} - a_{n-2} + 2$

$$= 5(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3} + 4$$

起始值 $a_0 = 0$，$a_1 = 3$，$a_2 = 20$

$\{a_n\} = \{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

- $p_m = 7(p_{m-1} - p_{m-2}) + p_{m-3} = 6p_{m-1} - p_{m-2} + 2$

$$= 5(p_{m-1} + p_{m-2}) - p_{m-3} + 4$$

起始值 $p_0 = 0$，$p_1 = 2$，$p_2 = 14$

$\{p_m\} = \{2、14、84、492、2870、16730、97512、568344\cdots\}$

研究結果與討論：

★ 結論5：用拉格朗日差值多項式求得遞迴數列的一般項 a_n 及 p_m

✧ 起始值：$a_0 = 0, a_1 = 3, a_2 = 20$

$$a_n = \frac{-1}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{4} \times (3+\sqrt{8})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4} \times (3-\sqrt{8})^n$$

✧ 起始值：$p_0 = 0, p_1 = 2, p_2 = 14$

$$p_m = \frac{-1}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{8} \times (3+\sqrt{8})^m + \frac{2-\sqrt{2}}{8} \times (3-\sqrt{8})^m$$

★ 結論6：求得「近乎等腰直角三角形」斜邊遞迴數列一般項 c_n

$$c_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \times (3+\sqrt{8})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \times (3-\sqrt{8})^n \Rightarrow c_n = 2p_n + 1$$

研究結果與討論：

接下來回到研究出發點之的實作題目！

14. 已知 x 為實數，若 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\ldots\ldots+|9x-1|+|10x-1|$，當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值為 m，試求序對 $(a, m)=$__________。

Sol： $x=\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

x 值共 55 個，中位數在第 28 個 x 值！

$\Rightarrow x=\frac{1}{7} \Rightarrow f\left(\frac{1}{7}\right)=minimum$ ！（尖的）

研究結果與討論：

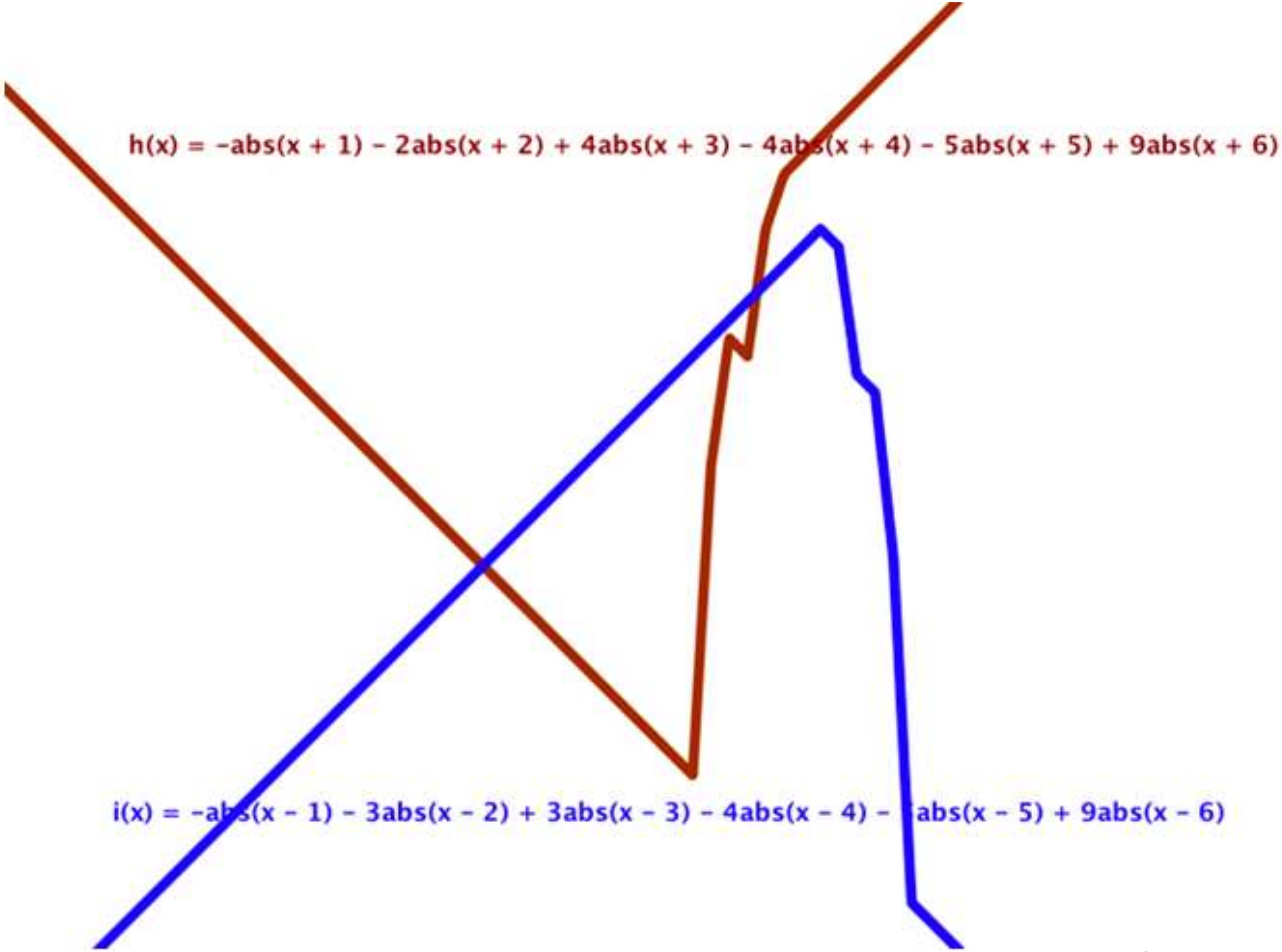
★ 結論7：$F(x) = A|x-a| + B|x-b| + C|x-c| + \cdots + K|x-k|$

之函數圖形可以分2類！（如下圖說明）

- 係數和=$A+B+C+\cdots+K=0$，則 $F(x)$函數圖形兩側呈水平狀
- 係數和=$A+B+C+\cdots+K>0$ 或 係數和$=A+B+C+\cdots+K<0$

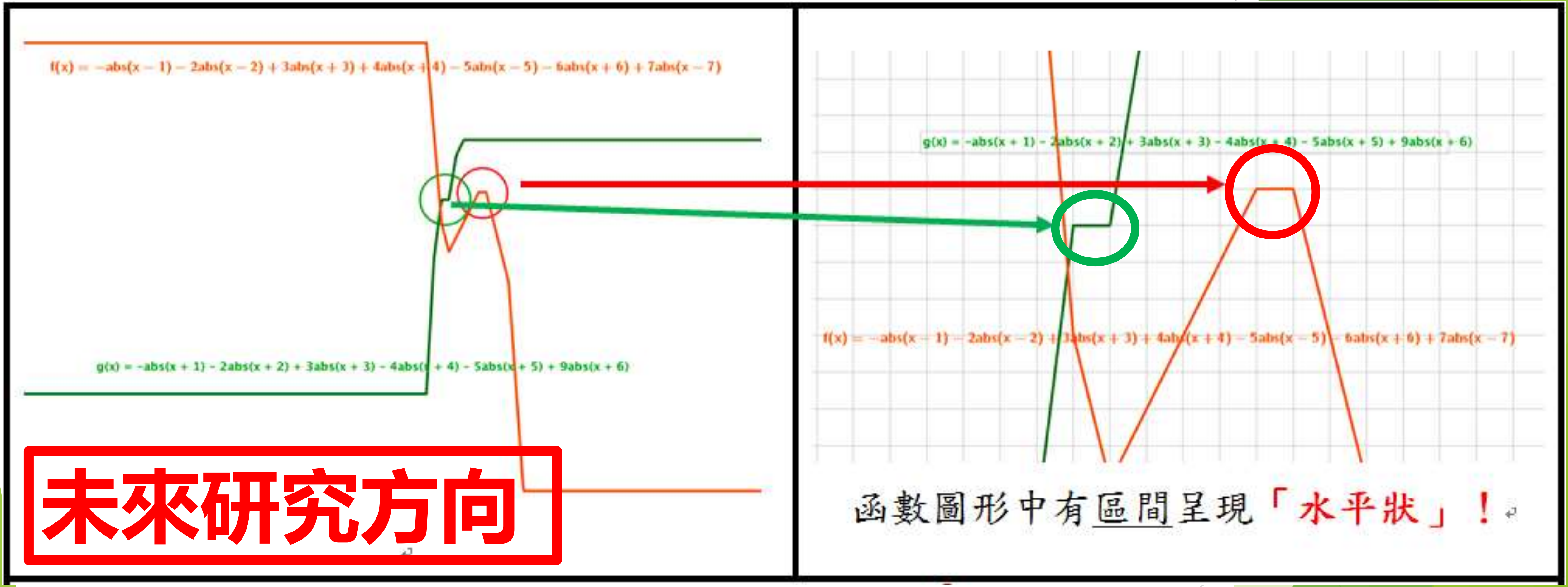
則 $F(x)$函數圖形兩側呈朝上或朝下

研究結果與討論：



h(x) = -abs(x + 1) - 2abs(x + 2) + 4abs(x + 3) - 4abs(x + 4) - 5abs(x + 5) + 9abs(x + 6)
i(x) = -abs(x - 1) - 3abs(x - 2) + 3abs(x - 3) - 4abs(x - 4) - abs(x - 5) + 9abs(x - 6)

研究結果與討論：



f(x) = −abs(x − 1) − 2abs(x − 2) + 3abs(x + 3) + 4abs(x + 4) − 5abs(x − 5) − 6abs(x + 6) + 7abs(x − 7)
g(x) = -abs(x + 1) - 2abs(x + 2) + 3abs(x + 3) - 4abs(x + 4) - 5abs(x + 5) + 9abs(x + 6)
未來研究方向
g(x) = -abs(x + 1) - 2abs(x + 2) + 3abs(x + 3) - 4abs(x + 4) - 5abs(x + 5) + 9abs(x + 6)
f(x) = −abs(x − 1) − 2abs(x − 2) + 3abs(x + 3) + 4abs(x + 4) − 5abs(x − 5) − 6abs(x + 6) + 7abs(x − 7)
函數圖形中有區間呈現「水平狀」！

參考文獻

1. 106學年科學班考題。
2. 十二年國民基本教育課程綱要 - 數學領域
3. 科學Online 遞迴關係(一)

https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=36574

4. 中華民國第58 屆中小學科學展覽會得獎作品:「金金」計較https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/58/pdf/NPHSF2018-030417.pdf
5. OEIS數列查詢(1)(https://oeis.org/A000129)
(2)(https://oeis.org/A001652)
(3)(https://oeis.org/A053141)
(4)(https://oeis.org/A002559)
(5)(https://oeis.org/A001653)
6. 建中數理資優班『遞迴方法』講義.第二部分：簡易遞迴數列的解法
7. 用「多項式除法」求二階遞迴數列的一般項(重根與虛根)
8. 以拉格朗日差值法求得三階遞迴數列的一般式
9. 維基百科
(1)三次方程式 (2)特徵方程式 (3)拉格朗日差值法 (4)馬爾可夫方程
(5)特殊直角三角形-幾乎等腰的直角三角形 (6)畢氏三元數
1. 馬爾可夫數
(1)https://minortriad.com/markoff.html
(2)https://mathworld.wolfram.com/MarkovNumber.html
10. 原始勾股三元組
http://pythagoreantriples.blogspot.com/2013/04/pts-with-near-isosceles-triangles.html
11. 原始勾股三元組（a，b = a + 1，c）
https://benvitalenum3ers.wordpress.com/2016/08/28/primitive-pythagorean-triples-a-ba1-c/
12. Pythagorean Triads of the Form x，x+1，z Described By Recurrence Sequences.


Anthony Liou
成功者永不放棄
放棄者永不成功
企圖心創造非凡
～謝謝評審聆聽