彰化縣107學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書

作品編號： 32005

組別：

□國小組 ■國中組

■數學類 □自然與生活科技類 □人文社會類

作品名稱：循「次」漸進- 利用次方導成公式

目　　錄

第一階段　研究訓練階段
一、近二年學校獨立研究課程之規劃------------------------1
二、學校如何提供該生獨立研究訓練------------------------1
第二階段　獨立研究階段
一、研究動機--2
二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表-------------------2
三、彙整相關文獻--3
四、資料分析--4
五、研究結果與討論-------------------------------------14
六、評論與檢討---19
七、參考資料---20

第一階段　研究訓練階段

一、獨立研究課程近二年學校獨立研究課程之規劃

(1)獨立研究課程，以帶領學生進行科展研究為主，由教師指導學生從課本延伸，找尋研究題材，並設計相關實驗進行主題的探究。

(2)學生通常要花費相當長的時間投入，是以除正式課程檢視研究進度外，通常得利用假日時間返校進行研究。

(3)隨著彰化縣辦理獨立研究競賽，始了解獨立研究較科展而言，更強調與學習的連貫性，以數學、自然與生活科技及人文科學，強調延伸所學以擬定想探究的主題。

(4)十二年國民基本教育提倡適性揚才，讓同學透過社團課及電腦課給予需要的電腦技術，及解決問方法，使學生激發求知慾，解決問題。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

(1)學校配合提供給學生硬體設備及教室空間，這充分給了想進行研究的學生一個適合他們展現的舞台。

(2)學校延請教授蒞校進行獨立研究的講座，鼓勵學生人人均可嘗試參與研究；並備有近年彰化縣獨立研究得獎成果冊供師生借閱，更於闢有獨立研究文件專案專區，提供獨立研究方法及相關訊息下載。

(3)指導老師亦會主動詢問，掌握其進度，使學生能把握時間，投入研究；今年也進行校內初選，以提振參賽的質與量。

第二階段　獨立研究階段

一、研究動機

上數學課時，老師補充了有關於圖形樣式與規律的題目，其中讓我們感到最好奇的一題，題目是找出一個大三角形中有多少個三角形，我們思考了許久，最終還是只能一個一個算出來，這種方式既麻煩又很耗時間，於是探討出這幾個三角形中到底有什麼規律，可是**研究規律有些需要高中的觀念或公式，甚至於更高深的東西**，這樣我們現階段就無法運算，所以希望找到一套更為簡單的公式來取代高深的、沒學過的觀念，讓國中生也輕鬆能運算複雜的規律問題。

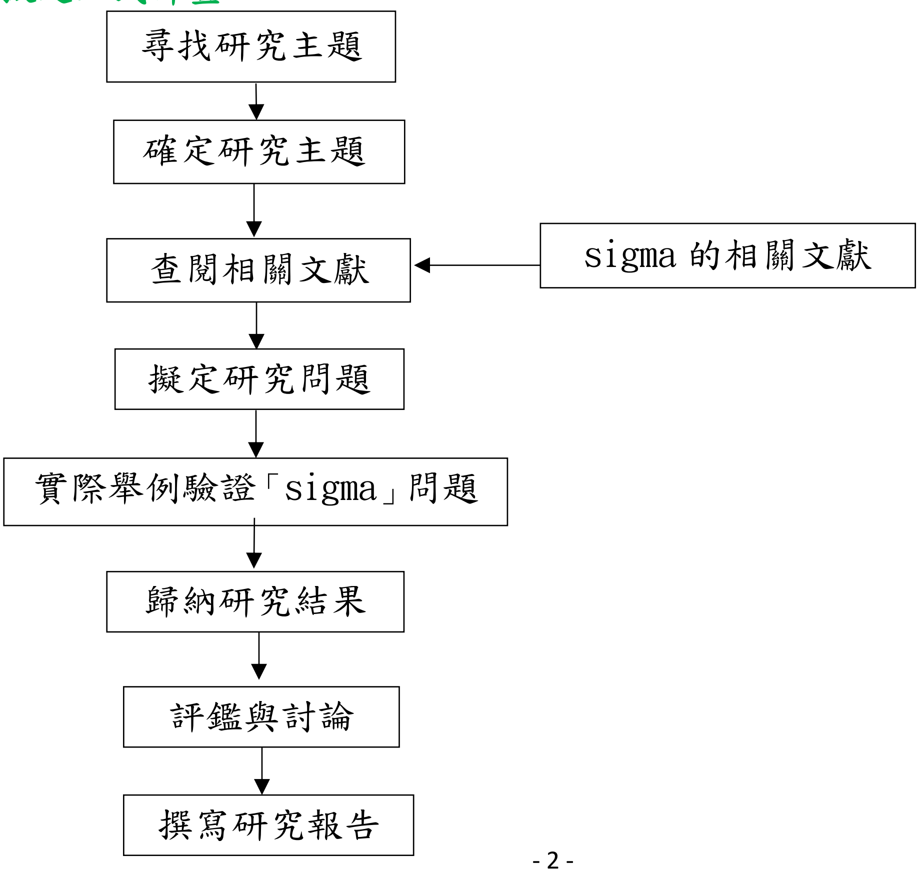
在資優班甄選考試中，有一題數學題如下圖(A)，此題目如果利用**繪圖或是一般算法都是非常複雜及高深的**，本組想找出只需要利用一些簡易之方法來討論出答案，所以本組就以這個為研究主題。

A-4. 空間中 7 個平面，最多能將此空間分割為幾個區塊。

圖(A)取自台中一中97學年度數理資優鑑定試卷

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

擬定正式計畫



研究問題

(一)探討基本類型的數列求出第 n 項之規律

(二)探討常見的例子並加以推導

(三)探討三角形經等分點切割後的個數總和之規律

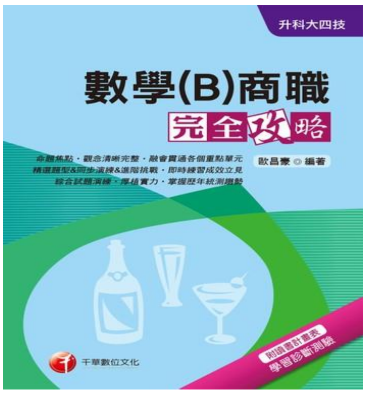
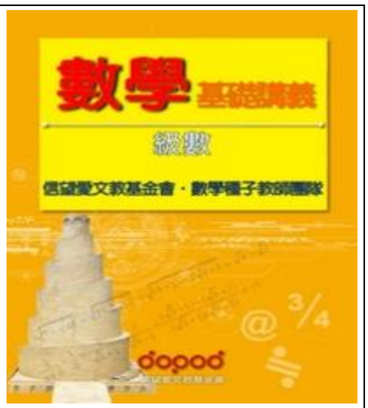
(四)探討空間中以平面分割最多幾個區塊之規律

工作進度表

時間 / 工作	8/20~9/3	9/4~9/17	9/18~10/1	10/2~10/15	10/16~11/9	11/10~11/25	11/26~12/10
擬定正式計畫及研究問題							
尋找資源							
彙整相關文獻							
資料分析							
提出研究成果							
評鑑與檢討							
累積進度百分比	15%	30%	45%	50%	60%	80%	100%

三、彙整相關文獻

以下為本組參考之書籍：

		
107 年數學(B)商職完全攻略	打造 5000 名台大生的無敵學習法	高中 數學 級數

四、資料分析

(一)探討基本類型的數列求出第 n 項之規律

1. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0.

2 ， 3 ， 4 ， 5 ， 6 ……

1 1 1 1 ⟹ 第一層公差 0

1^1+1，2^1+1，3^1+1，4^1+1，5^1+1……

2. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0

0 ， 3 ， 8 ，15 ， 24……

3 5 7 9

2 2 2 ⟹ 第二層公差 0

1^2-1，2^2-1，3^2-1，4^2-1， 5^2-1……

3. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0

2 ，9 ，28 ，65 ，126 ……

7 19 37 61

12 18 24 ⟹ 第三層公差 0

6 6

1^3+1, 2^3+1, 3^3+1, 4^3+1, 5^3+1 ……

4. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0

1 ， 7 ， 17 ， 31 ， 49 ， 71 ……

6 10 14 18 22

4 4 4 4 ⟹ 第二層公差 0

1^2+0，2^2+3，3^2+8，4^2+15，5^2+24，6^2+35 ……

此時發現，並無明顯規律，須把 0，3，8，15，24，35…取出再討論

0 ， 3 ， 8 ， 15 ， 24 ， 35……

3 5 7 9 11

2 2 2 2 ⟹ 第二層公差 0

1^2-1，2^2-1，3^2-1，4^2-1，5^2-1，6^2-1……

(二)探討常見的例子並加以推導

1.數列 2，4，6，8，10，12，14，16，18，20......以金字塔方式呈現

2

4　6

8　10　12

14　16　18　20

....

求第n層第k數的公式?

(1)一般的解法：(利用等差觀念)

2，4，6，8，10……成等差數列，且公差為 2

第 n 層第 k 數共有 $1+2+3\ldots+(n-1)+k$ 項

$$=\frac{[1+(n-1)]\times(n-1)}{2}+k=\frac{n^2-n+2k}{2}\text{項}$$

第 n 層第 k 數　$2+\left(\frac{n^2-n+2k}{2}-1\right)\times 2=\boldsymbol{n^2-n+2k}$

(2)利用次方的解法

取第 n 層第一數

2 ，4 ，8 ，14 ，22……

2　4　6　8

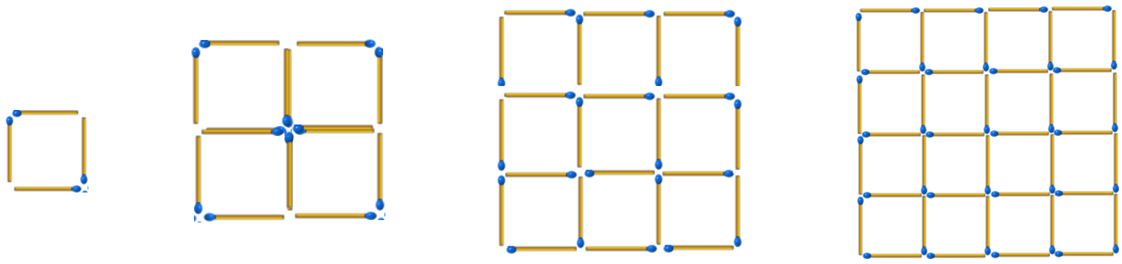
2　2　2

1^2+1，2^2+0，3^2-1，4^2-2，5^2-3 ……

第 n 層第一數：$n^2+1+(n-1)\times(-1)=n^2-n+2$

第 n 層第 k 數：$n^2-n+2+(k-1)\times 2=\boldsymbol{n^2-n+2k}$

2. 求圖(n)共用了幾根火柴棒？



……

（圖一）　　　　（圖二）　　　　（圖三）　　　　（圖四）

(1)一般的解法:(利用遞迴關係)

$a_1=4$

$a_2= a_1+8$

$a_3= a_2+12$

$a_4= a_3+16$

$a_n=a_{n-1}+4n$

$a_n=4+8+12\cdots+4n=2n^2+n$

$a_n=\frac{(4+4n)\times n}{2}=(2n+2)\times n$

(2)利用次方的解法

4 ， 12 ， 24 ， 40 ……

8　12　16

4　4

1^2+3，2^2+8，3^2+15，4^2+24……

此時發現，並無明顯規律，須把 3，8，15，24，……取出再討論

3 ， 8 ， 15 ， 24……

5　7　9

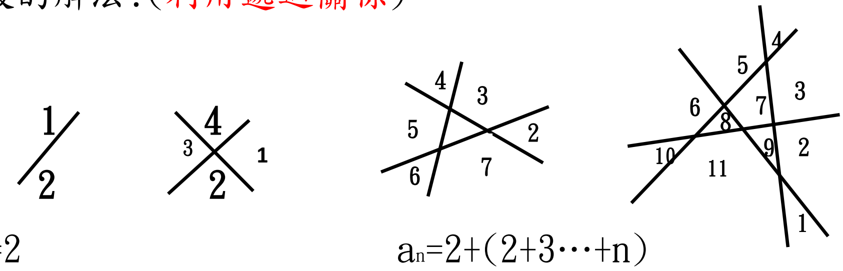
2　2

1^2+2，2^2+4，3^2+6，4^2+8 ……

由上述二個數列結合可得：第 n 項＝$2n^2+2+(n-1)\times2=2n^2+2n$

3. 在平面中，n 條線段作多可將平面分割成多少區域？

（1） 一般的解法:(利用遞迴關係)



$a_1=2$

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3$

$a_4=a_3+4$

…

$a_n=a_{n-1}+n=2+(2+3\cdots+n)$

$a_n=2+(2+3\cdots+n)$

$=2+\frac{(2+n)(n-1)}{2}$

$=2+\frac{n^2+n-2}{2}$

$=\frac{n^2+n+2}{2}$

(2)利用次方的解法:

2 ， 4 ， 7 ， 11

↓ ↓ ↓ ↓

1^2+1 2^2+0 3^2-2 4^2-5

↓ ↓ ↓

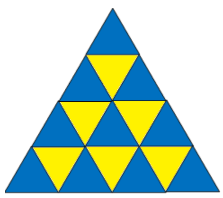
1 1+(−1) 1+(−1)+(−2) 1+(−1)+(−2)+(−3)

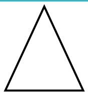
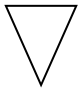
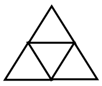
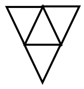
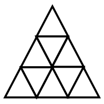
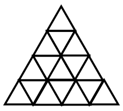
$n^2+1+[(-1)+(-2)+\cdots+-(n-1)] = n^2+1 = \frac{[-1+-(n+1)]\times(n-1)}{2}$

$=\frac{n^2+n+2}{2}$

(三)探討三角形經等分點切割後的個數總和

1. 偶數層

邊長為 4 等分切割有 3 個等分點，共 4 層			
			
正立的三角形	個數	倒立的三角形	個數

單位面積 1		1+2+3+4 ＝10 個	單位面積 1		1+2+3 ＝6 個
單位面積 4		1+2+3 ＝6 個	單位面積 4		1 個
單位面積 9		1+2 ＝3 個			
單位面積 16		1 個			
→此三角形共有 4^2+(1+2+3)+2^2+1＝27 個大小不同的三角形。					

由上述可推論，偶數層三角形中，大小不同的三角形個數總和為**奇數層疊加至該層數的值，加上偶數層之層數平方相加**。

表(一) 延伸推廣其他偶數層

2 層	4 層	6 層	8 層	10 層
2^2	4^2	6^2	8^2	10^2
1	1+2+3	1+2+3+4+5	1+2+3+4+⋯+7	1+2+3+4+⋯+9
	2^2	4^2	6^2	8^2
	1	1+2+3	1+2+3+4+5	1+2+3+4+⋯+7
		2^2	4^2	6^2
		1	1+2+3	1+2+3+4+5
			2^2	4^2
			1	1+2+3
				2^2
				1
共 5 個	共 27 個	共 78 個	共 170 個	共 315 個

因此由上表(一)推導第 n 個偶數(2n 層)共有幾個之通式

(1)一般的解法:(**利用∑總和公式**)

總和＝[$2^2+4^2+6^2\cdots+(2n)^2$]+1+6+15...+[1+2+3⋯+(2n−1)]

① $2^2+4^2\cdots+(2n)^2=2^2(1^2+2^2\cdots+n^2)=4\times\sum_{k=1}^{n}k^2$

② $a_1+a_2\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} 2k^2-k=2\sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{n} k$

$a_1=1$

$a_2=6=1+5$

$a_3=15=1+5+9$

$a_4=28=1+5+9+13$

$a_k=1+5+9\ldots+(4\mathrm{k}-3)$

$a_k=\dfrac{(1+4k-3)\times k}{2}=2k^2-\mathrm{k}$

$a_1+a_2\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} 2k^2-k=2\sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{n} k$

①+②$=6\sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{n} k=6\times\dfrac{\mathrm{n(n+1)(2n+1)}}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{\mathbf{4n^3+5n^2+n}}{\mathbf{2}}$

(2)利用次方的解法

5 ， 27 ， 78 ， 170 ， 315 ……

22 　 51 　 92 　 145

29 　 41 　 53

12 　 12

1^3+4，2^3+19，3^3+51，4^3+106，5^3+190……

此時發現，並無明顯規律，把 4，19，51，106，190 …取出再討論

4 ， 19 ， 51 ， 106 ， 190……

15 　 32 　 55 　 84

17 　 23 　 29

6 　 6

1^3+3，2^3+11，3^3+24，4^3+42，5^3+65……

此時發現，並無明顯規律，把 3，11，24，42，65 …取出再討論

3 ， 11 ， 24 ， 42 ， 65……

8 　 13 　 18 　 23

5 　 5 　 5

1^2+2，2^2+7，3^2+15，4^2+26，5^2+30……

此時發現，並無明顯規律，把 2，7，15，26，40……取出再討論

2，7，15，26，40

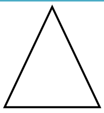
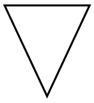
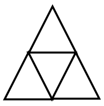
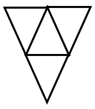
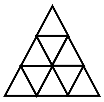
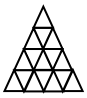
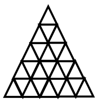
1^2+1，2^2+3，3^2+6，4^2+10，5^2+15

1，1+2，1+2+3，1+2+3+4，1+2+3+4+5

第 n 個偶數(2n 層)之公式：$2n^3+2n^2+(1+2+3+\cdots+n)=$

$$2n^3+2n^2+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{4n^3+5n^2+n}{2}$$

2. 奇數層

2. 邊長為 5 等分切割有 4 個等分點，共 5 層			
			
正立的三角形	個數	倒立的三角形	個數
單位面積 1 	1+2+3+4+5 =15 個	單位面積 1 	1+2+3+4 =10 個
單位面積 4 	1+2+3+4 =10 個	單位面積 4 	1+2 =3 個
單位面積 9 	1+2+3 =6 個		
單位面積 16 	1+2 =3 個		
單位面積 25 	1 個		
此三角形共有 $5^2+(1+2+3+4)+3^2+(1+2)+1^2=48$ 個大小不同的三角形。			

由上述可推論，奇數層三角形中，大小不同的三角形個數總和為**奇數層之層數平方相加，加上偶數層之疊加至該層數的值**。

表(二) 延伸推廣其他奇數層

1 層	3 層	5 層	7 層	9 層
1^2	3^2	5^2	7^2	9^2
	1+2	1+2+3+4	1+2+3+4+…+6	1+2+3+4+…+8
	1^2	3^2	5^2	7^2
		1+2	1+2+3+4	1+2+3+4+…+6
		1^2	3^2	5^2
			1+2	1+2+3+4
			1^2	3^2
				1+2
				1^2
共 1 個	**共 13 個**	**共 48 個**	**共 118 個**	**共 235 個**

因此由上表(二)推導第 n 個奇數(2n-1 層)共有幾個之通式

(1) 一般的解法:(**利用∑總和公式**)

總和=〔$1^2+3^2+5^2\cdots+(2n-1^2)$〕+3+10+21……

①$1^2+3^2\cdots+(2n-1)^2$=〔$1^2+2^2\cdots+(2n-1^2)$〕－〔$2^2+4^2\cdots+(2n-2)^2$〕

$$=\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-2^2〔1^2+2^2\cdots+(n-1)^2〕$$

$$=\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-4\times\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

② $a_1+a_2\cdots+a_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$

$a_1=3$

$a_2=3+7$

$a_3=3+7+11$

$a_k=3+7+11\cdots+(4k-1)=\frac{(3+4k-1)\times k}{2}=2k^2+k$

$a_1+a_2\cdots+a_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$

①+②$=\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$=\frac{(2n-1)(2n-1+1)〔2(2n-1)+1〕}{6}-2\times\frac{(n-1)(n-1+1)〔2(n-1)+1〕}{6}+\frac{(n-1)〔(n-1)+1〕}{2}=\frac{4n^3-n^2-n}{2}$$

(2)利用次方的解法

1，13，48，118，235……

12　35　70　117

23　35　47

12　12

1^3+0，2^3+5，3^3+21，4^3+54，5^3+110……

此時發現，並無明顯規律，把 0，5，21，54，110 …取出再討論

0，5，21，54，110 ……

5　16　33　56

11　17　23

6　6

1^3-1，2^3-3，3^3-6，4^3-10，5^3-15……

第 n 個奇數(2n-1 層)之公式：$2n^3-(1+2\cdots+n)=2n^3-\frac{(1+n)n}{2}$

$$=\frac{4n^3-n^2-n}{2}$$

(四)探討空間中以平面分割最多區塊之規律

A-4. 空間中 7 個平面，最多能將此空間分割為幾個區塊。

圖(B)取自台中一中97 學年度數理資優鑑定試卷

1. 一般的解法

刀數	1	2	3	4
平面中	2	4	7	11
立體中	2	4	8	15

平面中	立體中
$a_1=2$	$a_1=2$
$a_2=a_1+2$	$a_2=a_1+\frac{1^2+1+2}{2}$

$a_3=a_2+3$

$a_4=a_3+4$

…

$a_n=a_{n-1}+n$

$a_n=2+(2+3\cdots+n)$

$=2+\frac{(2+n)(n-1)}{2}=2+\frac{n^2+n-2}{2}$

$=\frac{n^2+n+2}{2}$

$a_3=a_2+\frac{2^2+2+2}{2}$

$a_4=a_3+\frac{3^2+3+2}{2}$

$a_n=a_{n-1}+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}$

$a_n=2+\frac{[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]}{2}+\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{2}+\frac{(n-1)\times 2}{2}$

$=\frac{n^3+5n+6}{6}$

2. 利用次方的解法:

平面數	0	1	2	3	4	5	6	7
區塊數	1	2	4	8	15	26	42	64

1，2，4，8，15，26，42，64……

1　2　4　7　11　16　22

1　2　3　4　5　6

1　1　1　1　1　⇨ 第三層公差0

0^3+1，1^3+1，2^3-4，3^3-19，4^3-49，5^3-99，6^3-174，7^3-279 ……

此時發現，並無明顯規律，把1，1，-4，-19，-49，-99，-174，-279…

取出再討論

1，1，-4，-19，-49，-99，-174，-279……

0　-5　-15　-30　-50　-75　-105

(-5)X0，(-5)X1，(-5)X3，(-5)X6，(-5)X10，(-5)X15，(-5)X21

0　1　1+2　1+2+3　1+2+3+4　1+2+3+4+5　1+2+3+4+5+6

利用遞迴關係可得

$a_1=1+(-5)X0$

$a_2=a_1+(-5)X1$

$a_3=a_2+(-5)X(1+2)$

$a_4=a_3+(-5)X(1+2+3)$

⋯⋯⋯⋯

$a_n=a_{n-1}+(-5)\times[1+2+3+...+(n-1)]$

$a_n=1+(-5)\times\sum_{k=1}^{n-1}(1+2+3+\cdots+k)$

$=1+(-5)\times\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}$

$=1+(-5)\times\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

$=\frac{-5n^3+5n+6}{6}$

總結上述可的n個平面數最多可切割的區域:

$$n^3+\frac{-5n^3+5n+6}{6}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

五、研究結果與討論

(一)探討基本類型的數列求出第 n 項之規律

1. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0

2，3，4，5，6 ⋯⋯

1　1　1　1　⟹第一層公差 0

1^1+1，2^1+1，3^1+1，4^1+1，5^1+1⋯⋯

第 n 項:n+1
第一層公差 0，必跟一次方有關

2. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0

0，3，8，15，24⋯⋯

3　5　7　9

2　2　2　⟹ 第二層公差 0

1^2-1，2^2-1，3^2-1，4^2-1，5^2-1⋯⋯

第 n 項:n^2-1
第二層公差 0，必跟二次方有關

3. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0

2，9，28，65，126 ⋯⋯

7　19　37　61

12　18　24

6　6　⟹ 第三層公差 0

1^3+1，2^3+1，3^3+1，4^3+1，5^3+1 ⋯⋯

第 n 項:n^3+1
第三層公差 0，必跟三次方有關

4. 從數列各項中取公差，直到取出的公差為 0

1 ， 7 ， 17 ， 31 ， 49 ， 71 ……

6 10 14 18 22

4 4 4 4 ⇨ 第二層公差 0

1^2+0，2^2+3，3^2+8，4^2+15，5^2+24，6^2+35 ……

第二層公差 0，必跟二次方有關，但無明顯規律需再討論

此時發現，並無明顯規律，須把 0，3，8，15，24，35……取出再討論

0 ， 3 ， 8 ， 15 ，24 ，35……

3 5 7 9 11

2 2 2 2 ⇨ 第二層公差 0

1^2-1，2^2-1，3^2-1，4^2-1，5^2-1，6^2-1……

與上面數列得到結果結合可得第 n 項：$2n^2-1$ 關

(二)探討常見的例子並加以推導

1. 數列 2，4，6，8，10，12，14，16，18，20……以金字塔方式呈現

2

4 6

8 10 12

14 16 18 20

………………………

求第 n 層第 k 數的公式?

取第 n 層第一數

2 ， 4 ， 8 ， 14 ， 22……

2 4 6 8

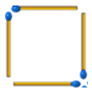
2 2 2

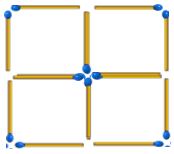
1^2+1，2^2+0，3^2-1，4^2-2，5^2-3 ……

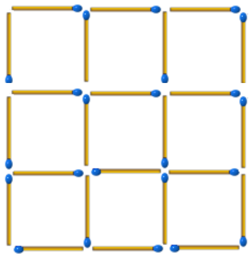
第 n 層第一數：$n^2+1+(n-1)\times(-1)=n^2-n+2$

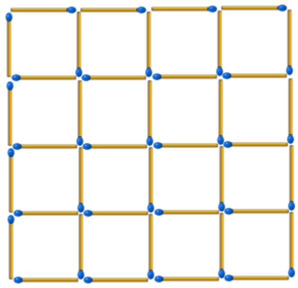
第 n 層第 k 數：$n^2-n+2+(k-1)\times 2=n^2-n+2k$

2. 求圖(n)共用了幾根火柴棒？


（圖一）


（圖二）


（圖三）


（圖四）

……

利用次方的解法

4 ， 12 ， 24 ， 40 ……

8　12　16

4　4

1^2+3，2^2+8， 3^2+15，4^2+24……

此時發現，並無明顯規律，把 3，8，15，24，……取出再討論

3 ， 8 ， 15 ， 24……

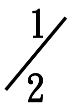
5　7　9

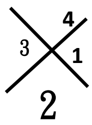
2　2

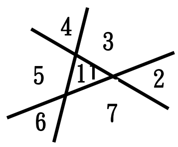
1^2+2，2^2+4，3^2+6，4^2+8 ……

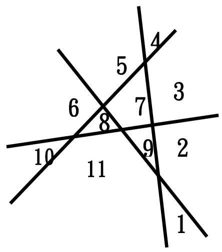
由上述二個數列結合可得：第 n 項＝$2n^2+2+(n-1)\times 2=2n^2+2n$

3. 在平面中，n 條線段作多可將平面分割成多少區域？









利用次方的解法:

2 ， 4 ， 7 ， 11

1^2+1　2^2+0　3^2-2　4^2-5

1　1+(-1)　1+(-1)+(-2)　1+(-1)+(-2)+(-3)

$n^2+1+[(-1)+(-2)+\cdots+-(n-1)]$

$$= n^2 + 1 = \frac{[-1 + -(n+1)] \times (n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

(三)探討三角形經等分點切割後的個數總和之規律

1. 偶數層

層數	2 層	4 層	6 層	8 層	10 層
三角形總數	5 個	27 個	78 個	170 個	315 個

5，27，78，170，315 ……

22　51　92　145

29　41　53

12　12

1^3+4，2^3+19，3^3+51，4^3+106，5^3+190……

此時發現，並無明顯規律，把 4，19，51，106，190 …取出再討論

4，19，51，106，190 ……

15　32　55　84

17　23　29

6　6

1^3+3，2^3+11，3^3+24，4^3+42，5^3+65……

此時發現，並無明顯規律，須把 3，11，24，42，65 …取出再討論

3，11，24，42，65……

8　13　18　23

5　5　5

1^2+2，2^2+7，3^2+15，4^2+26，5^2+30……

此時發現，並無明顯規律，須把 2，7，15，26，40 …取出再討論

2，7，15，26，40

1^2+1，2^2+3，3^2+6，4^2+10，5^2+15

1，1+2，1+2+3，1+2+3+4，1+2+3+4+5

第 n 個偶數(2n 層)之公式：

$$2n^3+2n^2+(1+2\cdots+n)=2n^3+2n^2+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{4n^3+4n^2}{2}+\frac{n^2+n^2}{2}=\frac{4n^3+5n^2+n}{2}$$

2. 奇數層

層數	1 層	3 層	5 層	7 層	7 層
三角形總數	1 個	13 個	48 個	118 個	235 個

1 ， 13 ， 48 ， 118 ， 235……

12 35 70 117

23 35 47

12 12

1^3+0，2^3+5 ，3^3+21 ，4^3+54 ，5^3+110……

此時發現，並無明顯規律，須把 0，5，21，54，110 …取出討論

0 ， 5 ， 21 ， 54 ， 110 ……

5 16 33 56

11 17 23

6 6

1^3-1 ，2^3-3，3^3-6，4^3-10，5^3-15……

第 n 個奇數(2n-1 層)之公式：

$$2n^3-(1+2\cdots+n)=2n^3-\frac{(1+n)n}{2}=2n^3-\frac{n^2+n^2}{2}=\frac{4n^3-n^2-n}{2}$$

(四)探討空間中以平面分割最多區塊之規律

平面數	1	2	3	4	5	6	7
區塊數	2	4	8	15	26	42	64

1 ， 2 ， 4 ， 8 ， 15 ， 26 ， 42 ， 64……

1 2 4 7 11 16 22

1 2 3 4 5 6

1 1 1 1 1 ⟹ 第三層公差0

0^3+1，1^3+1，2^3-4，3^3-19，4^3-49，5^3-99，6^3-174，7^3-279 ……

此時發現，並無明顯規律，須把1，1，-4，-19，-49，-99，-174，-279……取出再討論

1 ，1 ， -4 ， -19 ， -49 ， -99 ， -174 ， -279……

0 -5 -15 -30 -50 -75 -105

(-5)X0，(-5)X1，(-5)X3，(-5)X6，(-5)X10，(-5)X15，(-5)X21

0 1 1+2 1+2+3 1+2+3+4 1+2+3+4+5 1+2+3+4+5+6

利用遞迴關係可得：

$a_1=1+(-5)X0$

$a_2=a_1+(-5)X1$

$a_3=a_2+(-5)X(1+2)$

$a_4=a_3+(-5)X(1+2+3)$

．．．．．．．

$a_n=a_{n-1}+(-5)X[1+2+3+...+(n-1)]$

$a_n=1+(-5)\times \sum_{k=1}^{n-1}(1+2+3+\cdots+k)$

$=1+(-5)\times \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}$

$=1+(-5)\times\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

$=\frac{-5n^3+5n+6}{6}$

總結上述可的n個平面數最多可切割的區域：

$$n^3+\frac{-5n^3+5n+6}{6}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

六、評鑑與檢討

從這次研究中，讓本組成長很多，以下依本組各研究階段遇到的問題作一檢討：

（一）研究動機:

一開始本組找不到適合的題目，詢問數學老師後，數學老師剛好有一個可以讓本組發揮的題目。

（二）擬定正式計畫、研究問題及工作進度表:

在擬定正式計畫及工作進度表時，遇到了排版的問題，因為本組都不是電腦好手，所以遇到了一些瓶頸：像是不知道如何打表格、改變它的樣式和怎樣排版較美觀。

（三）彙整相關文獻:

面臨問題與省思：因為找到的資料太過於繁複，將它們全部打進會佔太大的篇幅，而且句子不通順，所以需要修改

與刪除，不過不知道該刪掉哪些部分，所以苦惱好一陣子。

（四）資料分析：

因為計算出來的結果可能和本組預期的有些不同，有些結果出來，本組也不知道是為什麼，本組反覆的聽指導老師的解說，經過大腦努力的思考，來分析這些結果，為了能讓人看起來容易理解，本組想把結果製作成表格，但因製作表格的經驗足，製作表格時經常失敗，有時格式跑掉，有時單用Word又做不出來，讓本組停了許久，只好把午休及假日拿來製作表格，於是本組拿下課時間詢問一年級的電腦老師，老師推薦OpenOffice這個編輯軟體，讓本組得以製作表格。方便做比較，有了上次的經驗，這次製作長條圖不再那麼棘手，得以完成資料分析這部分，趕上了進度。

（五）研究結果與討論

本組花費了許多心力和力氣來做計算，在計算過程中，我們也遇到了不少的困難，但我們都一一克服了，我們在做計算的時候也花費了不少的時間，這也讓我們知道耐心有多麼的重要，我們需要反覆的做計算和記錄那些結果，而且有一個小差錯也不行，因為這樣可能造成計算結果不準確。

七、參考資料

（一）國中數學課本，第四冊(２下)　第一章　等差數列與等差數，康軒文教

（二）新北高級中學，李秀章老師，sigma的運算性質。
http://igt.ntsh.ntpc.edu.tw/channels/196/episodes/256?locale=zh_tw&video=hq

（三）臺中一中學數理資優班歷屆生選數學試題，97學年度，臺中一中數學科教學研究會

（四）林志穎老師，Open Office教學網　，
http://maylike.kh.edu.tw/teach/openoffice201/