彰化縣 112 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選
作品說明書（封面）

作品編號：*（由承辦單位編列）*

□國小組

■國中組

■數學類

□自然、科技類

□人文社會類

組別： **數 學**

作品名稱： ***Again！Mathmagic ～ 拍案叫「絕對值」之幾何天堂覓雲形蹤***

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

壹、 研究訓練階段

我非常喜歡帶領學生進行「獨立研究」！因為「獨立研究」最重要的功能，就是能夠激發學生的好奇心，進而投入科學研究，並開發潛能的活動。然而，凡事起頭難，獨立研究最難的就是「主題」的尋找，此時即可訓練孩子觀察日常生活中一些有趣的現象，從中找尋有興趣的題材來研究。最精彩的部份，就是研究的過程！過程比結果更重要，因為從中可以培養研究態度與思考力，做中學進而學以致用，且可以增進師生互動。

一、近二年學校獨立研究課程之規畫

Ⅰ、教學目標

(1)培養學生主動學習、主動探索知識的態度。(2)培養學生蒐集資料、組織知識的能力。(3)培養學生自主學習的能力。(4)培養學生研究、撰寫研究報告及發表研究成果的能力。

Ⅱ、教學理念

(1)讓學生了解他們才是學習的主角，學習態度一定要積極認真、自動自發。(2)重視學習歷程，從學習歷程中得到啟發與省思。(3)尊重個別差異，提供多元選擇、多元學習的機會。

Ⅲ、實施方式

<table>
<tr><th colspan="5">(1)時間規畫</th><th>(2)課程規畫</th><th>(3)授課方式</th></tr>
<tr><td>學年</td><td>學期</td><td>課程安排</td><td>授課節數</td><td>學生數</td><td rowspan="3">本校提供的獨立研究訓練分為「訓練」及「研究」兩個階段。111學年上學期為訓練階段，教導學生獨立研究必備的基本技能與態度。111 學下學期為研究階段，讓學生挑選主題進行研究，並製作簡報，練習口頭發表</td><td rowspan="3">訓練階段的進行方式，主要是教師邊講解，學生邊進行實際演練。在研究階段，則讓學生以個人或小組為單位，針對感興趣的主題進行深度探討，教師扮演輔助者的角色，留意學生的學習狀況，適時給予建議。</td></tr>
<tr><td>111</td><td>一</td><td>抽離</td><td>每週兩節</td><td>2</td></tr>
<tr><td>111</td><td>二</td><td>抽離</td><td>每週兩節</td><td>2</td></tr>
</table>

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

教學階段	授課單元	授課內容摘要
訓練階段 (111.9.1~112.1.16)	獨立研究的意義	1.獨立研究的意義。 2.研究者須具備的能力與態度。
	研究法簡介	認識並判別實驗研究、歷史研究、敘述研究等三種研究法。
	資料蒐集與篩選	1.認識圖書編目。 2.網路資源及工具書的使用。 3.參考資料的選擇、歸類與統整。
研究階段 (112.3.01~112.11.28)	找尋研究主題	找尋 3~5 個感興趣的主題，分析其可行性，最後從中選擇一個較合適的主題進行研究。
	研究報告撰寫	1.研究動機與目的。 2.文獻探討。 3.研究方法。 4.研究結果分析與歸納。 5.提出結論與建議。 6.修改作品說明書。
	研究成果發表	1.研究報告簡報製作。 2.口頭發表練習。

貳、獨立研究階段

一、研究動機

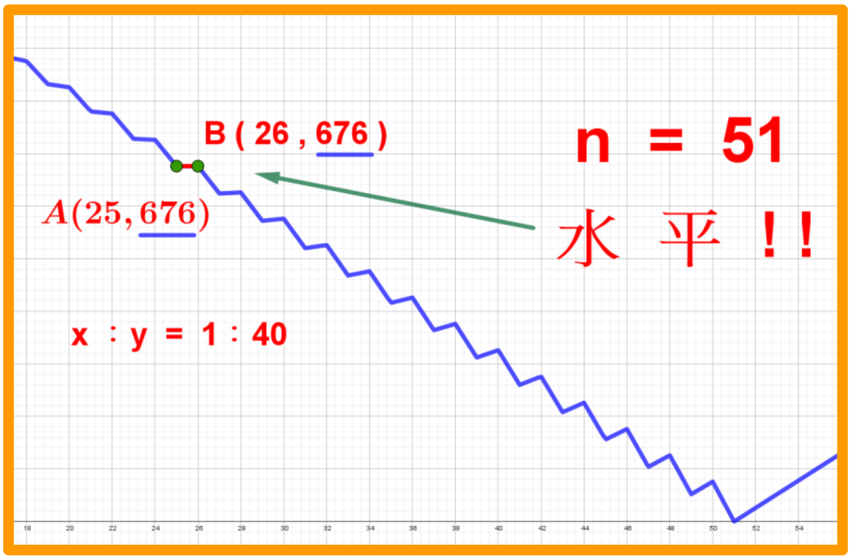
日前於機緣下，閱讀了學長姐「獨立研究」得獎作品之後，發現

- $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|\cdots+n|x-n|$ 發生極值「**水平**」之 $\boldsymbol{n}$ **值非常少！**
- $f(x)=\mathrm{A}|x-a|+\mathrm{B}|x-b|+\mathrm{C}|x-c|+\cdots+\mathrm{K}|x-k|$之**幾何結構**，尚需要探討與研究⋯

這便引起了我們極大的好奇心，思考著⋯

$$\boldsymbol{f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|}$$

1. **$f(x)$ 幾何圖形中發生「水平」之 n 值為何？也很少嗎？**
2. **$f(x)$ 的完整幾何結構為何？如何分析之⋯**
3. **$f(x)$ 有哪些特殊的幾何性質、幾何特徵？**



第一個提問 → 便馬上發生了「認知衝突」！

◆ 研究中，我們發現 $f(x)$ 之幾何圖形中發生「水平」之 n **值很多！**

n 值似乎有規則性⋯

於是，由於此「**認知衝突**」的驅駛下…

這也就引起了我們高度的**好奇心及興趣！**

本研究，我們更想進一步探討：

$$\boldsymbol{f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|}$$

- **$f(x)$ 到底在什麼條件下，其幾何圖形才會有「水平」幾何特徵？**
- **$f(x)$ 之幾何全貌為何？**
- **如何解析 $f(x)$ 之幾何特徵？**
- **如何論證幾何性質嗎？可以一般化嗎？**

國中階段「**絕對值**」之概念，是「某數到原點的距離」。

本研究中，我們將從「**代數**」與「**幾何**」這兩方面來探討，並應用 GEOGEBR **軟體**進一步探討 $f(x)$ 幾何圖形之**幾何特性、幾何特徵！**。

我們最想問的是…

$f(x)$ 之幾何全貌為何？

分析 $f(x)$ 之幾何特徵時，可以從哪些角度切入開始分析之？研究方法為何？

其中的「規則」又是什麼呢？ 或者，其實是沒有規則的？

這些種種的疑問，引起我們極大的興趣！當投入研究後，發現很多有趣的地方，很值得研究與探討，我們不只是想要它的答案，而是想要了解答案的背後的全貌及奧秘。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

A.擬定正式計畫：

B.研究問題：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$$

1. 當 $\boldsymbol{n}=$ ？時 $\Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 也會有「水平」的幾何特徵？
2. 當 $\boldsymbol{x}=$ ？時 $\Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 有「水平」的幾何特徵？
3. 如何論證，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 沒有「水平」的幾何特徵？
4. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 有「水平」的幾何特徵之 $\boldsymbol{n}$ 值，可以一般化嗎？
5. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 之幾何圖形中，有哪些特殊的幾何特徵？
6. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 之幾何圖形中,特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之數量為何？可以一般化嗎？

7. $f(x)$ 於特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之各頂點，會分別都落在兩條特殊的直線上面嗎？

8. 求出 $f(x)$ 之幾何結構中，發現之三條特殊的直線方程式的一般化？及頂點之一般化？

9. $f(x)$ 之幾何圖形中，兩直線上各頂點依序之三角形面積有規律嗎？

10. 探討 n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形「交點」之幾何性質為何？

11. 探討 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x-n|}{|x-(n+1)|} \quad 與 \quad f(x)=\dfrac{|x+n|}{|x+(n+1)|} \quad 之 \quad 對稱性。\\ f(x)=\dfrac{|x-(n+1)|}{|x-n|} \quad 與 \quad f(x)=\dfrac{|x+(n+1)|}{|x+n|} \quad 之 \quad 對稱性。\end{cases}$

C.擬定工作進度表：

１１１－１１２年	9-10月	11-12月	1-2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月
獨立研究認識與態度										
研究法介紹										
資料搜集與篩選										
討論研究題目										
確定研究題目										
搜尋相關資料										
發現規律										
以幾何法研究問題										
以代數法分析論證性質										
論證與推廣										
紀錄及分析討論結論										
撰寫「作品說明書」										
檢討及修正「作品說明書」										

三、 彙整相關文獻與名詞解釋

(一)絕對值：

數線上一數的絕對值等於此數與原點的距離。絕對值可以用來表達數線上的兩點距離。

(二)幾何特徵：

$$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$$

有下列各**幾何特徵**：

- **「滑梯、水平、鋸齒」**
- **「第一條直線、第二條直線」**

將於「**資料分析**」中，逐一定義之。

四、資料分析

◆ **研究 1：當 $n=?$ $\Rightarrow f(x)$ 也會有「水平」的幾何特徵？**

Sol：

✧ 根據之前的獨立研究作品中，所得到的結論如下：

$f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$ 中，

$n=\{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}$

$\Rightarrow f(x)$ 才有水平之幾何特徵！

- 本研究之

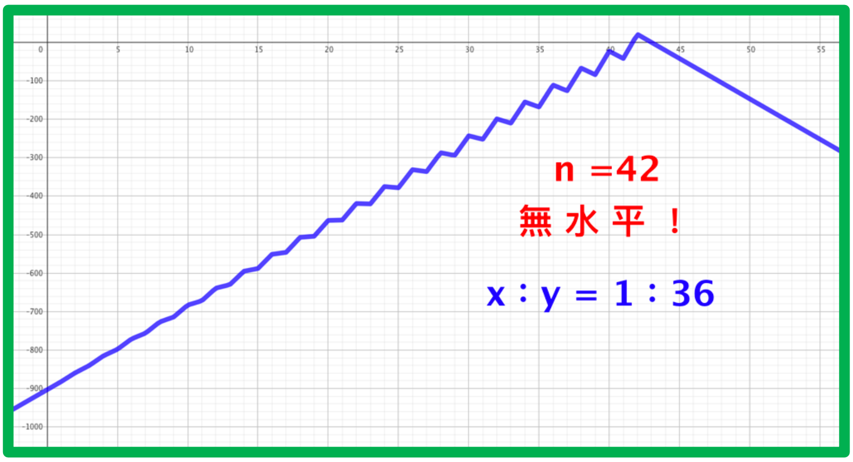
$$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$$

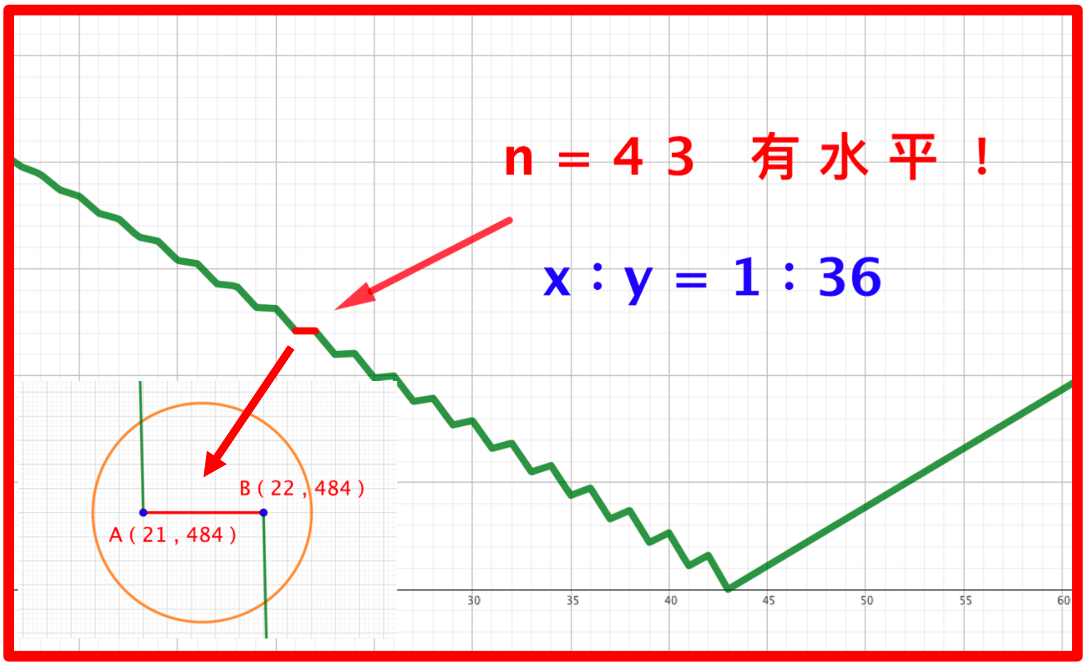
當 $n=?$時，$f(x)$ 也會有「水平」的幾何特徵？

☯ 猜測 1：

$f(x)$ 有「水平」幾何特徵之 n 值，有**規則**嗎？也是**少數**嗎？

➢ 幾何圖形分析：GGB 軟體程式



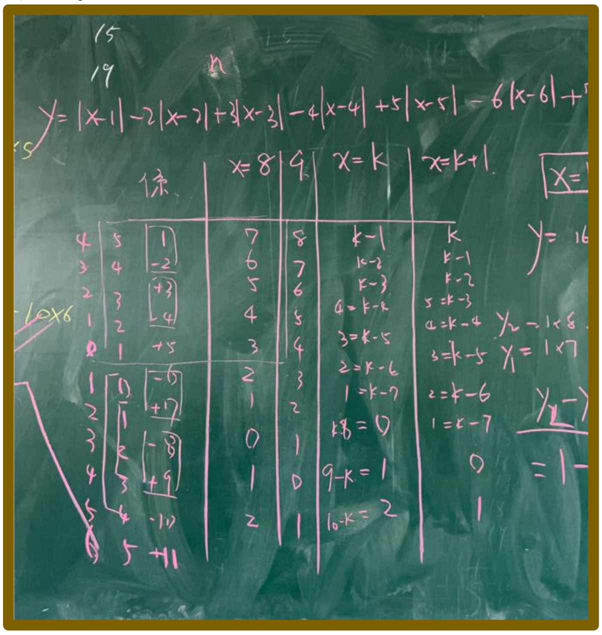


➢ 代數分析：研究方法利用 Excel 程式。

n = 51

有水平！

第1條直線					第2條直線			
25x+y=1326				交點	26x+y=1326			
x	y	檢驗		(0,1326)	x	y		檢驗
50	76	1326	76		51	0	-76	1326
48	126	1326	74		49	52	-74	1326
46	176	1326	72		47	104	-72	1326
44	226	1326	70		45	156	-70	1326
42	276	1326	68		43	208	-68	1326
40	326	1326	66		41	260	-66	1326
38	376	1326	64		39	312	-64	1326
36	426	1326	62		37	364	-62	1326
34	476	1326	60		35	416	-60	1326
32	526	1326	58		33	468	-58	1326
30	576	1326	56		31	520	-56	1326
28	626	1326	54		29	572	-54	1326
26	676	1326	52		27	624	-52	1326
24	726	1326	50		25	676	-50	1326
22	776	1326	48		23	728	-48	1326
20	826	1326	46		21	780	-46	1326
18	876	1326	44		19	832	-44	1326
16	926	1326	42		17	884	-42	1326
14	976	1326	40		15	936	-40	1326
12	1026	1326	38		13	988	-38	1326



研究方法。

★ 認知衝突１ ★

★ 推論１：

$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$

$\Longrightarrow$ $f(x)$ 有「水平」幾何特徵之 n 值，

例如： $n = 43$、44、$51 \cdots$ 等等 $\Longrightarrow$ 有很多！

（ 認知衝突！）

◆ 研究２：當 $x = ?$ 時 $\Longrightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵？

Sol：

$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$

▲ 觀察１：

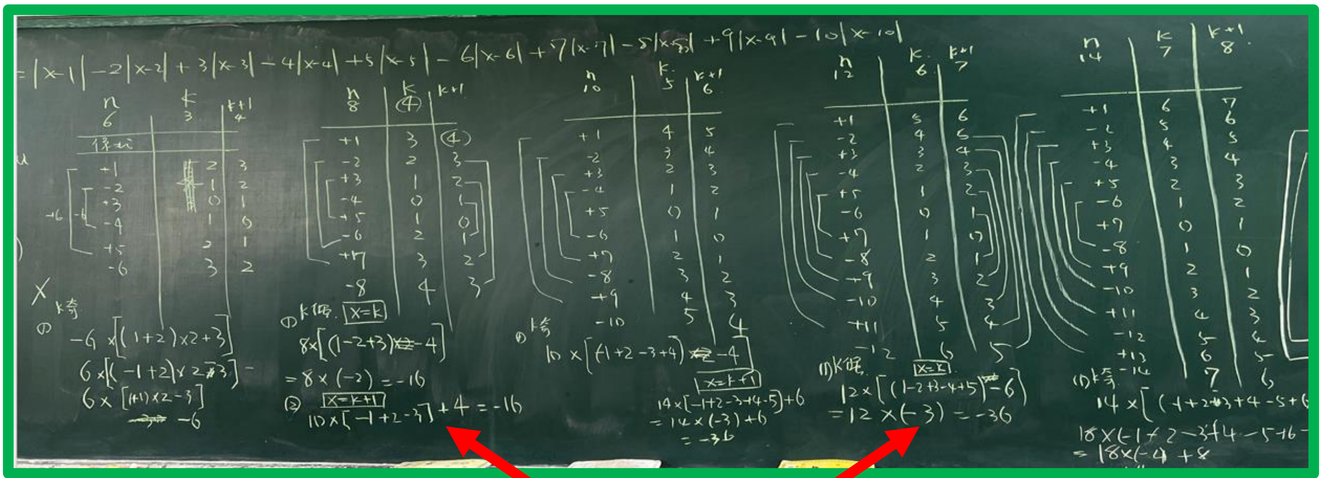
- ✓ $n = 43 \Longrightarrow x = 21$、$22$ (中位數) 有「水平」幾何特徵！
- ✓ $n = 48 \Longrightarrow x = 24$、$25$ (中位數) 有「水平」幾何特徵！
- ✓ $n = 51 \Longrightarrow x = 25$、$26$ (中位數) 有「水平」幾何特徵！

☯ 猜測２：

當 $x = n$ 之「中位數」時，$f(x)$ 有「水平」幾何特徵！

★「研究方法」 ★

➢ **代數分析：思考規律，以快速計算 $y_k = f(k)$ 之值。**



y 值

Sol：論證　$n=\mathbf{2k}\Longrightarrow x=$ **中位數** 時

$\Longrightarrow$ 計算 $\boldsymbol{y}$ **值**以討論 $\boldsymbol{f(x)}$ **是否有「水平」**幾何特徵。

n	x	
	k	k+1
6	3	4
1	2	3
-2	1	2
3	0	1
-4	1	0
5	2	1
-6	3	2
f(x)	-12	-5
	y1	y2

$y_1=f(3)=6\times(-1+2-3)=-12$

$y_2=f(4)=8\times(1-2)+3=-5$

$\mathbf{n=6}\Longrightarrow \boldsymbol{x=3,4}\Longrightarrow \boldsymbol{y_1\neq y_2}$（非水平）

n	x	
	k	k+1
10	5	6
1	4	5
-2	3	4
3	2	3
-4	1	2
5	0	1
-6	1	0
7	2	1
-8	3	2
9	4	3
-10	5	4
f(x)	-30	-19
	y1	y2

$y_1=f(5)=10\times(-1+2-3+4-5)=-30$

$y_2=f(6)=12\times(1-2+3-4)+5=-19$

$\mathbf{n=10}\Longrightarrow \boldsymbol{x=5,6}\Longrightarrow \boldsymbol{y_1\neq y_2}$（非水平）

n	x	
	k	k+1
8	4	5
1	3	4
-2	2	3
3	1	2
-4	0	1
5	1	0
-6	2	1
7	3	2
-8	4	3
f(x)	-16	-16
	y1	y2

$y_1=f(4)=8\times(1-2+3-4)=-16$

$y_2=f(5)=10\times(-1+2-3)+4=-16$

$\mathbf{n=8}\Longrightarrow \boldsymbol{x=4,5}\Longrightarrow \boldsymbol{y_1=y_2}$（水平）

n	x	
	k	k+1
12	6	7
1	5	6
-2	4	5
3	3	4
-4	2	3
5	1	2
-6	0	1
7	1	0
-8	2	1
9	3	2
-10	4	3
11	5	4
-12	6	5
f(x)	-36	-36
	y1	y2

$y_1=f(6)=12\times(1-2+3-4+5-6)=-36$

$y_2=f(7)=14\times(-1+2-3+4-5)+6=-36$

$\mathbf{n=12}\Longrightarrow \boldsymbol{x=6,7}\Longrightarrow \boldsymbol{y_1=y_2}$（水平）

★ 推論２：

n	x	
	k	k+1
2k	2u-1	2u
1	2u-2	2u-3
-2	2u-3	2u-4
3	2u-4	2u-5
⋮	⋮	⋮
2u-3	2	3
-(2u-2)	1	2
2u-1	0	1
-2u	1	0
2u+1	2	1
-(2u+2)	3	2
⋮	⋮	⋮
4u-1	2u-2	2u-3
-(4u-2)	2u-1	2u-2
f(x)	$-4u^2+2u$	$-4u^2+6u-1$
	y1	y2

4u-2

4u

➢ $y_1 = f(2u-1) = \boldsymbol{n} \times \left(-1+2-3+4+\cdots-(2u-1)\right)$

$= (\boldsymbol{4u-2}) \cdot [(u-1)-(2u-1)] = (\boldsymbol{4u-2}) \cdot (-u)$

$= -4u^2 + 2u$

➢ $y_2 = f(2u)$

$= (\boldsymbol{n+2}) \times [1-2+3-4+\cdots+(2u-2)] + (2u-1)$

$= (\boldsymbol{4u}) \cdot [-(u-1)] + (2u-1)$

$= -4u^2 + 6u - 1$

$\mathbf{n = 2k = 4u - 2}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{x = 2u-1\,,2u \Longrightarrow y_1 \neq y_2}$ （ 非水平！）

n	x	
	k	k+1
2k	2u	2u+1
1	2u-1	2u
-2	2u-2	2u-1
3	2u-3	2u-2
⋮	⋮	⋮
-(2u-2)	2	3
2u-1	1	2
-2u	0	1
2u+1	1	0
-(2u+2)	2	1
2u+3	3	2
⋮	⋮	⋮
4u-1	2u-1	2u-2
-4u	2u	2u-1
f(x)	$-4u^2$	$-4u^2$
	y1	y2

4u

4u+2

➢ $y_1 = f(2u) = \boldsymbol{n} \times (1-2+3-4+\cdots+(2u-1)-2u)$

$= \boldsymbol{4u} \cdot (-u) = -4u^2$

➢ $y_2 = f(2u+1)$

$= (\boldsymbol{n+2}) \times [-1+2-3+4+\cdots-(2u-1)] + 2u$

$= (\boldsymbol{4u+2}) \cdot \left(u-1-(2u-1)\right) + 2u$

$= (\boldsymbol{4u+2}) \cdot (-u) + 2u = -4u^2$

$\mathbf{n = 2k = 4u}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{x = 2u\,,2u+1 \Longrightarrow y_1 = y_2}$ （ 水 平！）

◆ 研究３：如何論證，$\boldsymbol{f(x)}$ 沒有「水平」的幾何特徵？

☼☼ 創意想法 ☼☼

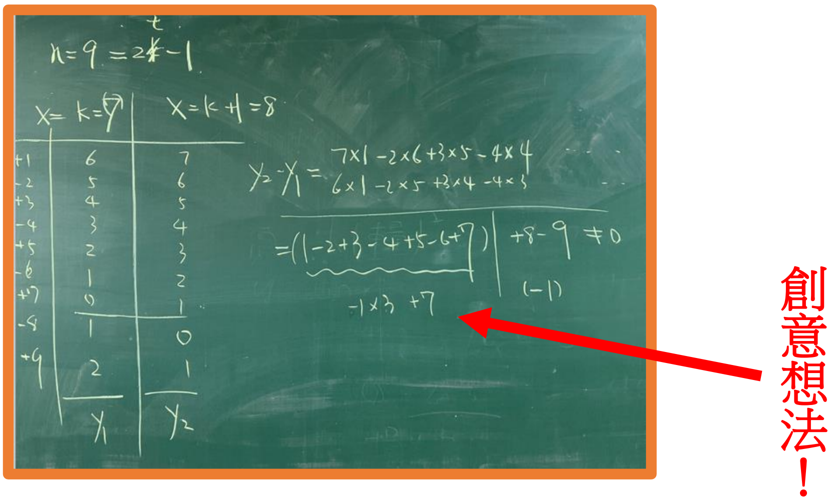
✧ 欲論證 $\boldsymbol{f(x)}$ 沒有「水平」的幾何特徵$\Longrightarrow \boldsymbol{y_k = f(k)}$ 計算量龐大！

✧ **點子：**

欲論證 $\boldsymbol{f(x)}$ 沒有「水平」的幾何特徵！

$\Longrightarrow$ 只需論證 $\boldsymbol{y_2 \neq y_1 \Longrightarrow y_2 - y_1 \neq 0}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x)}$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！



◆ 研究４：$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵之 n 值，可以一般化嗎？

▲ 觀察２：

➢ **代數分析**：運用 GGB 軟體及 Excel 計算各 n 值並觀察之。

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	X	○	○	X	X	○	○	X	X
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
○	○	X	X	○	○	X	X	○	○

○：水平。　　　　ㄨ：無水平。

猜測3：

$f(x)$ 有「水平」幾何特徵之 n 值

$\Rightarrow$ 似乎與「4的倍數」有關。

1. n = $(4u+1) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！
2. n = $(4u+2) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！
3. n = $(4u+3)$

   $\Rightarrow (2u+1) \leq x \leq (2u+2)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！
4. n = $(4u+4)$

   $\Rightarrow (2u+2) \leq x \leq (2u+3)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

➢ 代數分析：研究方法！

① $n=4u+1 \implies$ 論證 $f(x)$ 無「水平」幾何特徵！

n	x		
4u+1	2k	2k+1	2k+2
1	2k-1	2k	2k+1
-2	2k-2	2k-1	2k
3	2k-3	2k-2	2k-1
⋮	⋮	⋮	⋮
2k-3	3	4	5
-(2k-2)	2	3	4
2k-1	1	2	3
-2k	0	1	2
2k+1	1	0	1
-(2k+2)	2	1	0
2k+3	3	2	1
-(2k+4)	4	3	2
2k+5	5	4	3
⋮	⋮	⋮	⋮
-4u	4u-2k	4u-2k-1	4u-2k-2
(4u+1)	4u-2k+1	4u-2k	4u-2k-1
f(x)	y1	y2	y3
	-2u-2k-1 (y1, y2)		-2u+2k+1 (y2, y3)
	y2 ≠ y1		y3 ≠ y2

$$y_2=1\cdot(2k)-2\cdot(2k-1)+3\cdot(2k-2)-4\cdot(2k-3)+\cdots-2k\cdot 1+(2k+1)\cdot 0-(2k+2)\cdot 1+(2k+3)\cdot 2-(2k+4)\cdot 3+\cdots-(4u)\cdot(4u-2k-1)+(4u+1)\cdot(4u-2k)$$

$$y_1=1\cdot(2k-1)-2\cdot(2k-2)+3\cdot(2k-3)-4\cdot(2k-4)+\cdots-2k\cdot 0+(2k+1)\cdot 1-(2k+2)\cdot 2+(2k+3)\cdot 3-(2k+4)\cdot 4+\cdots-(4u)\cdot(4u-2k)+(4u+1)\cdot(4u-2k+1)$$

$$\implies \boldsymbol{y_2-y_1=(1-2+3-4+\cdots-2k)+[-(2k+1)+(2k+2)-(2k+3)+\cdots+(4u)-(4u+1)]}$$

$$\boldsymbol{=\frac{2k}{2}\cdot(-1)+\frac{4u-2k}{2}\cdot 1-(4u+1)=-k+(2u-k)-(4u+1)=-2u-2k-1=2\cdot(-u-k)-1=\text{偶數}-\text{奇數}\neq 0\implies\text{無水平！}}$$

$$y_3=1\cdot(2k+1)-2\cdot(2k)+3\cdot(2k-1)-4\cdot(2k-2)+\cdots-2k\cdot 2+(2k+1)\cdot 1-(2k+2)\cdot 0+(2k+3)\cdot 1-(2k+4)\cdot 2+\cdots-(4u)\cdot(4u-2k-2)+(4u+1)\cdot(4u-2k-1)$$

$$y_2=1\cdot(2k)-2\cdot(2k-1)+3\cdot(2k-2)-4\cdot(2k-3)+\cdots-2k\cdot 1+(2k+1)\cdot 0-(2k+2)\cdot 1+(2k+3)\cdot 2-(2k+4)\cdot 3+\cdots-(4u)\cdot(4u-2k-1)+(4u+1)\cdot(4u-2k)$$

$$\implies \boldsymbol{y_3-y_2=(1-2+3-4+\cdots-2k)+(2k+1)+(2k+2)+[-(2k+1)+(2k+2)-(2k+3)+\cdots+(4u)-(4u+1)]}$$

$$\boldsymbol{=\frac{2k}{2}\cdot(-1)+(2k+1)+(2k+2)+\frac{4u-2k-2}{2}\cdot 1-(4u+1)=-k+(2k+1)+(2k+2)+(2u-k-1)-(4u+1)}$$

$$\boldsymbol{=-2u+2k+1=2\cdot(-u+k)+1=\text{偶數}+\text{奇數}\neq 0\implies\text{無水平！}}$$

➢ 代數分析：研究方法！

② $n=4u+2 \Longrightarrow$ 論證 $f(x)$ 無「水平」幾何特徵！

n	x		
4u+2	2k-1	2k	2k+1
1	2k-2	2k-1	2k
-2	2k-3	2k-2	2k-1
3	2k-4	2k-3	2k-2
⋮	⋮	⋮	⋮
2k-3	2	3	4
-(2k-2)	1	2	3
2k-1	0	1	2
-2k	1	0	1
2k+1	2	1	0
-(2k+2)	3	2	1
2k+3	4	3	2
-(2k+4)	5	4	3
2k+5	6	5	4
⋮	⋮	⋮	⋮
4u+1	4u-2k+2	4u-2k+1	4u-2k
-(4u+2)	4u-2k+3	4u-2k+2	4u-2k+1
f(x)	y1	y2	y3
	2u+2k+1		2u-2k+1
	y2 ≠ y1		y3 ≠ y2

$$y_2=1\cdot(2k-1)-2\cdot(2k-2)+3\cdot(2k-3)-4\cdot(2k-4)+\cdots+(2k-1)\cdot 1-(2k)\cdot 0+(2k+1)\cdot 1-(2k+2)\cdot 2+(2k+3)\cdot 3+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k+1)-(4u+2)\cdot(4u-2k+2)$$

$$y_1=1\cdot(2k-2)-2\cdot(2k-3)+3\cdot(2k-4)-4\cdot(2k-5)+\cdots+(2k-1)\cdot 0-(2k)\cdot 1+(2k+1)\cdot 2-(2k+2)\cdot 3+(2k+3)\cdot 4+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k+2)-(4u+2)\cdot(4u-2k+3)$$

$$\Longrightarrow y_2-y_1=[1-2+3-4+\cdots+(2k-1)]+[(2k)-(2k+1)+(2k+2)-(2k+3)+\cdots-(4u+1)+(4u+2)]$$

$$=\frac{2k-2}{2}\cdot(-1)+(2k-1)+(2k)+\frac{4u-2k+2}{2}\cdot 1=(-k+1)+(2k-1)+(2k)+(2u-k+1)=2u+2k+1=2\cdot(u+k)+1=\text{偶數}+\text{奇數}\neq 0 \Longrightarrow \text{無水平！}$$

$$y_3=1\cdot(2k)-2\cdot(2k-1)+3\cdot(2k-2)-4\cdot(2k-3)+\cdots+(2k-1)\cdot 2-(2k)\cdot 1+(2k+1)\cdot 0-(2k+2)\cdot 1+(2k+3)\cdot 2+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k)-(4u+2)\cdot(4u-2k+1)$$

$$y_2=1\cdot(2k-1)-2\cdot(2k-2)+3\cdot(2k-3)-4\cdot(2k-4)+\cdots+(2k-1)\cdot 1-(2k)\cdot 0+(2k+1)\cdot 1-(2k+2)\cdot 2+(2k+3)\cdot 3+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k+1)-(4u+2)\cdot(4u-2k+2)$$

$$\Longrightarrow y_3-y_2=(1-2+3-4+\cdots-2k)+[-(2k+1)+(2k+2)-(2k+3)+\cdots-(4u+1)+(4u+2)]$$

$$=\frac{2k}{2}\cdot(-1)+\frac{4u-2k+2}{2}\cdot 1=-k+(2u-k+1)=2u-2k+1=2\cdot(u-k)+1=\text{偶數}+\text{奇數}\neq 0 \Longrightarrow \text{無水平！}$$

➢ 代數分析：研究方法！

③ $n=4u+3 \Longrightarrow$ 論證 $f(x)$ 於 $(2u+1)\le x$ (中位數) $\le(2u+2)$ 時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

④ $n=4u+4 \Longrightarrow$ 論證 $f(x)$ 於 $(2u+2)\le x$ (中位數) $\le(2u+3)$ 時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

③

$$y_2=1\cdot(2k+1)-2\cdot(2k)+3\cdot(2k-1)-4\cdot(2k-2)+\cdots+(2k+1)\cdot 1-(2k+2)\cdot 0+(2k+3)\cdot 1-(2k+4)\cdot 2+\cdots-(4u+2)\cdot(4u-2k)+(4u+3)\cdot(4u-2k+1)$$

$$y_1=1\cdot(2k)-2\cdot(2k-1)+3\cdot(2k-2)-4\cdot(2k-3)+\cdots+(2k+1)\cdot 0-(2k+2)\cdot 1+(2k+3)\cdot 2-(2k+4)\cdot 3+\cdots-(4u+2)\cdot(4u-2k+1)+(4u+3)\cdot(4u-2k+2)$$

$$\Longrightarrow y_2-y_1=[1-2+3-4+\cdots+(2k+1)]+[(2k+2)-(2k+3)+\cdots+(4u+2)-(4u+3)]$$

$$=\frac{2k}{2}\cdot(-1)+(2k+1)+(2k+2)+\frac{4u-2k}{2}\cdot 1-(4u+3)=-k+(2k+1)+(2k+2)+(2u-k)-(4u+3)=-2u+2k$$

Then $n=4u+3 \Longrightarrow$ 當「$k=u$」$\Longrightarrow y_2-y_1=0 \Longrightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

④ $$y_2=1\cdot(2k+2)-2\cdot(2k+1)+3\cdot(2k)-4\cdot(2k-1)+\cdots-(2k+2)\cdot 1+(2k+3)\cdot 0-(2k+4)\cdot 1+\cdots+(4u+3)\cdot(4u-2k)-(4u+4)\cdot(4u-2k+1)$$

$$y_1=1\cdot(2k+1)-2\cdot(2k)+3\cdot(2k-1)-4\cdot(2k-2)+\cdots-(2k+2)\cdot 0+(2k+3)\cdot 1-(2k+4)\cdot 2+\cdots+(4u+3)\cdot(4u-2k+1)-(4u+4)\cdot(4u-2k+2)$$

$$\Longrightarrow y_3-y_2=[1-2+3-4+\cdots-(2k+2)]+[-(2k+3)+(2k+4)+\cdots-(4u+3)+(4u+4)]$$

$$=\frac{2k+2}{2}\cdot(-1)+\frac{4u-2k+2}{2}\cdot 1=-(k+1)+(2u-k+1)=2u-2k$$

Then $n=4u+4 \Longrightarrow$ 當「$k=u$」$\Longrightarrow y_2-y_1=0 \Longrightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

★定義 1：

$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$

1. 若 $x_2=i+1$、$x_1=i \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=y_2-y_1=0,\forall k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

2. 若 $x_2=i+1$、$x_1=i \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=y_2-y_1\neq 0,\forall k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！

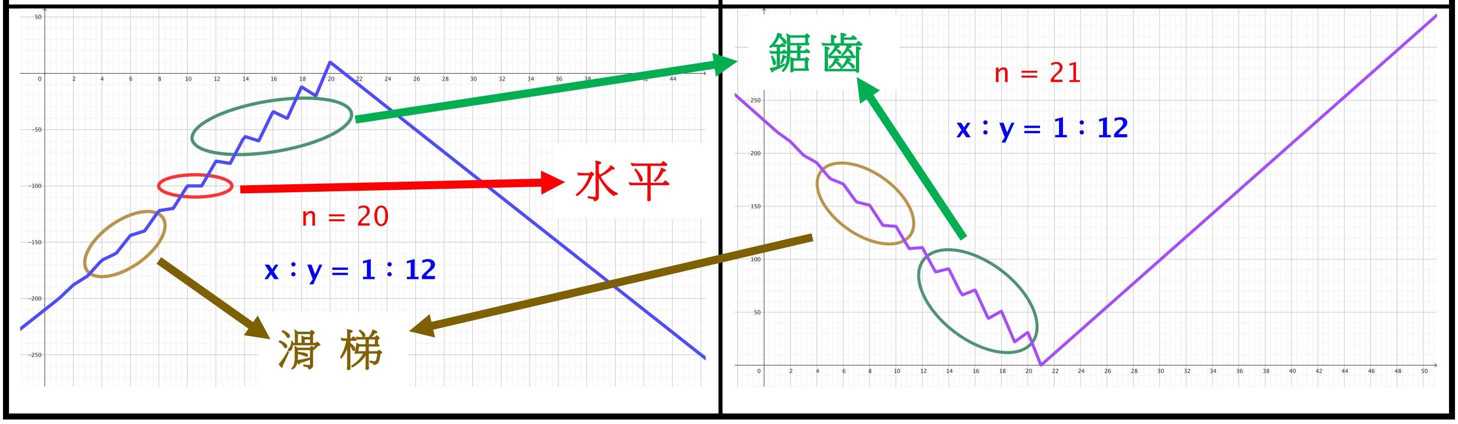
★ 推論 3：

1. $n=(4u+1)\Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！
2. $n=(4u+2)\Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！
3. $n=(4u+3)\Rightarrow (2u+1)\leq x\leq(2u+2)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵 ！
4. $n=(4u+4)\Rightarrow (2u+2)\leq x\leq(2u+3)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵 ！

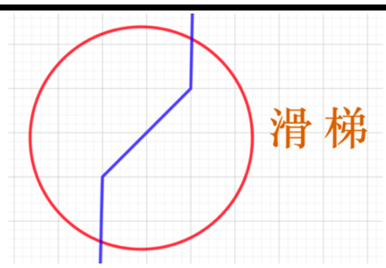
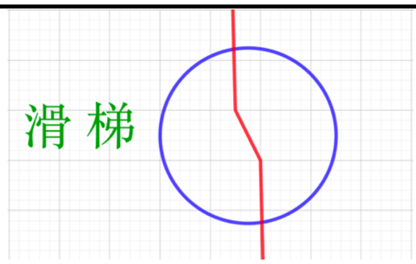
◆ 研究 5： $f(x)$ 之幾何圖形中，有哪些特殊的幾何特徵？

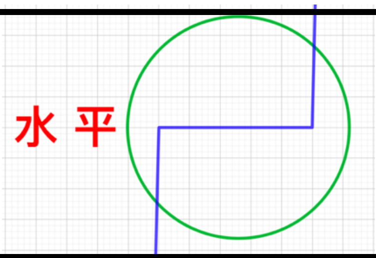
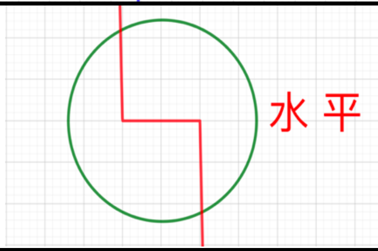
Sol： （一）全貌幾何圖形

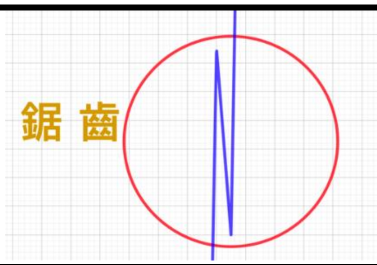
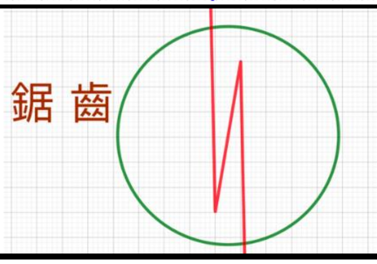
$f(x)=\lvert x-1\rvert-2\lvert x-2\rvert+3\lvert x-3\rvert+\cdots+19\cdot\lvert x-19\rvert-20\cdot\lvert x-20\rvert$	$f(x)=\lvert x-1\rvert-2\lvert x-2\rvert+3\lvert x-3\rvert+\cdots-20\cdot\lvert x-20\rvert+21\cdot\lvert x-21\rvert$



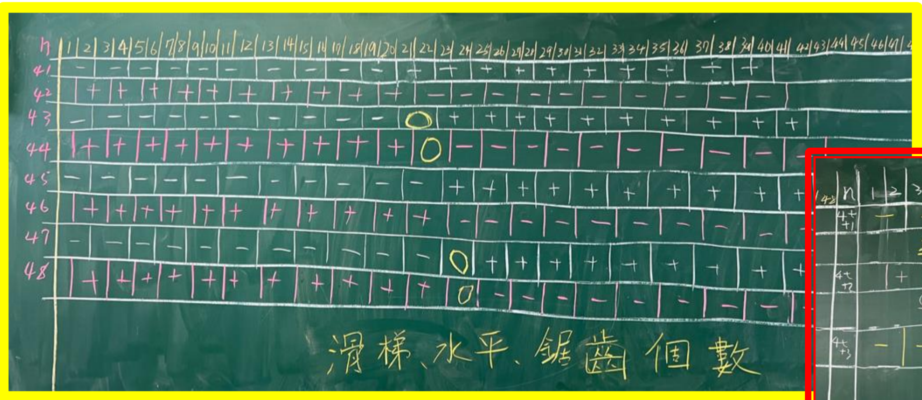
✧ 定義： 1、滑梯 2、水平 3、鋸齒

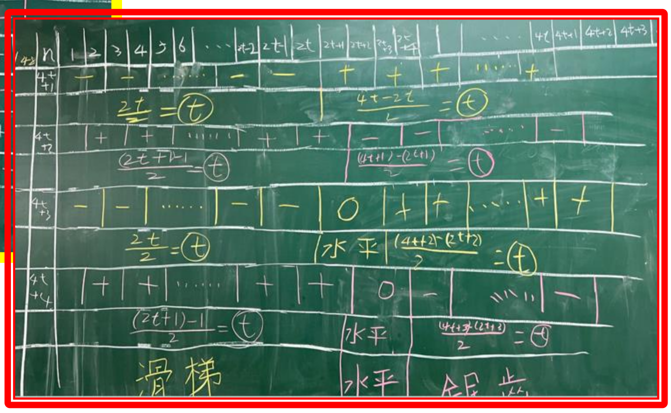
n=2k （朝下）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1>0$ $\forall i\in\mathbb{N}$，$i<n$	
n=2k+1 （朝上）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1<0$ $\forall i\in\mathbb{N}$，$i<n$	

n=2k （朝下）	$f(k+1)-f(k)=y_2-y_1=0$ $k\in\mathbb{N}$	
n=2k+1 （朝上）	$f(k+1)-f(k)=y_2-y_1=0$ $k\in\mathbb{N}$	

n=2k （朝下）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1<0$ $\forall\, i\in\mathbb{N}$，$i<n$	
n=2k+1 （朝上）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1>0$ $\forall\, i\in\mathbb{N}$，$i<n$	

◆ 研究 6： $f(x)$ 之幾何圖形中，特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之數量為何？可以一般化嗎？





✧ 思考１：「滑梯、水平、鋸齒」之數量與一般化

$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$

➢ 由「滑梯、水平、鋸齒」之定義

$\Rightarrow$ 檢驗 $f(i+1) - f(i) = y_2 - y_1$ 之「值」，為 正、0、負

$\Rightarrow$ 即可判斷 $f(x)$ 於此處之幾何特徵為「滑梯、水平、鋸齒」。

$\Rightarrow$ 即可計算出 $f(x)$ 各幾何特徵之數量以及一般化 ！

★ 推論４：

n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+1	−		−		−		⋯		−		−		+		+		⋯		+		+					
	$\frac{2u}{2}=u$ 個滑梯												$\frac{4u-2u}{2}=u$ 個鋸齒													

n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+2		+		+		+		⋯		+		+		−		−		⋯		−		−				
		$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個滑梯												$\frac{(4u+1)-(2u+1)}{2}=u$ 個鋸齒												

n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+3	−		−		−				−		−		水平		+		⋯		⋯		+		+			
	$\frac{2u}{2}=u$ 個滑梯														$\frac{(4u+2)-(2u+2)}{2}=u$ 個鋸齒											

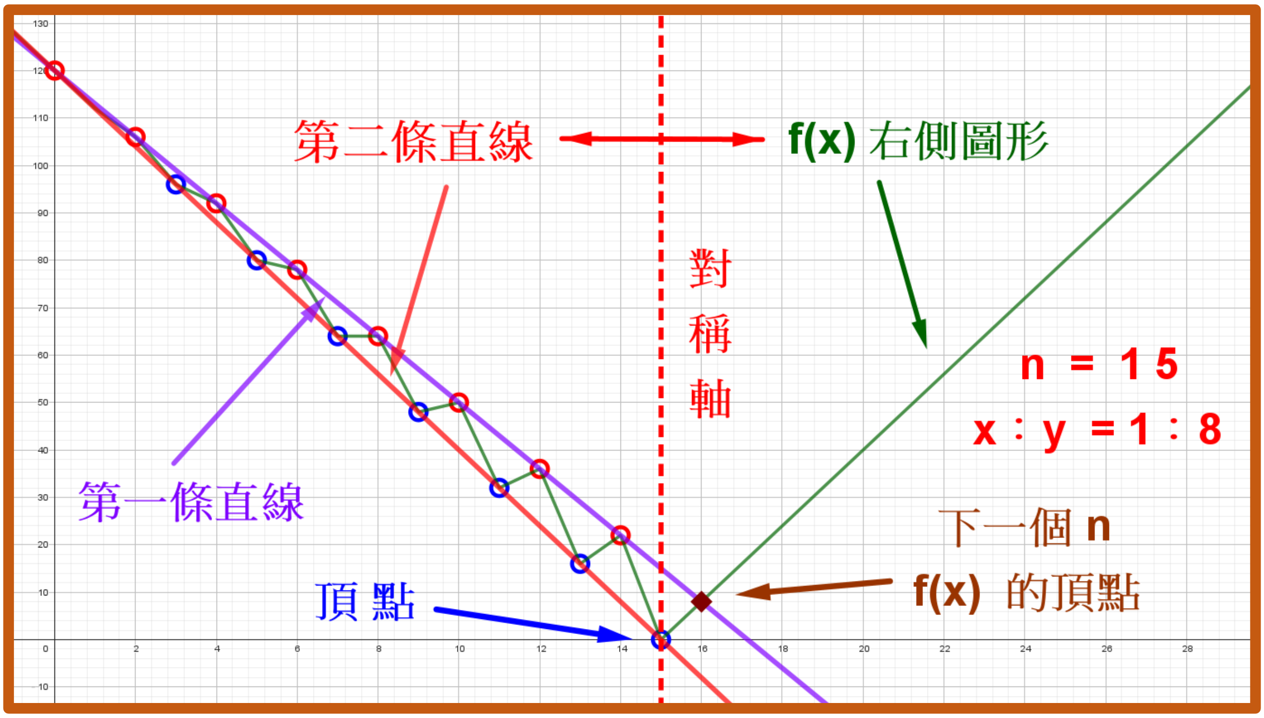
n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+4		+		+		+		⋯		+		+		水平		−		−		⋯		−		−		
		$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個滑梯														$\frac{(4u+3)-(2u+3)}{2}=u$ 個鋸齒										

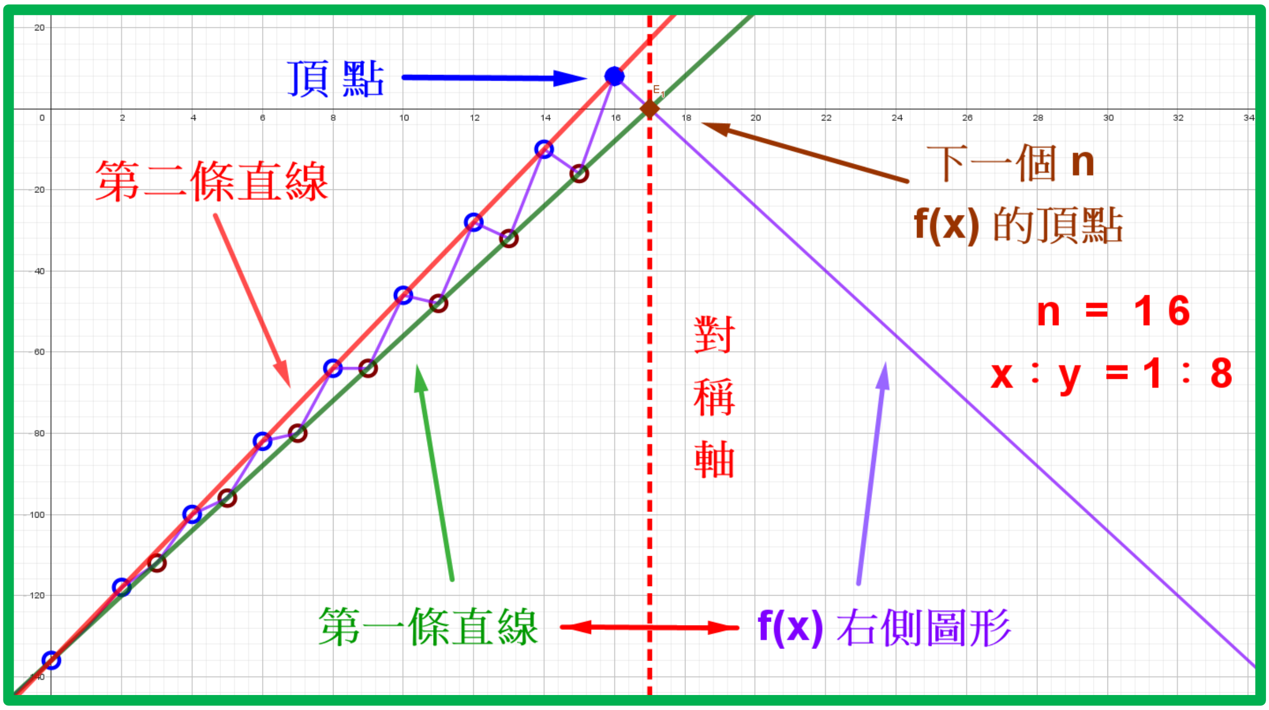
◆ 研究 ７： $f(x)$ 於特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之各頂點，會分別都落在兩條特殊的直線上面嗎？

✿✿ 意外發現 １ ✿✿

本幾何圖形研究中，於計算「滑梯、鋸齒」數量時，意外發現

$f(x)$ 「滑梯、水平、鋸齒」之各頂點
$\Rightarrow$ 會分別都落在兩條特殊的直線上面！





n	頂點座標	極值	水平	滑梯(左邊)	鋸齒(右邊)	方向	第一條直線	第二條直線	兩直線交點	圖形另一半(對稱直線)	對稱圖形交點	軸
40	(40,20)	M	1	9	9	下	20x-y=820	21x-y=820	(0,-820)	20x+y=820	(41,0)	X=41
41	(41, 0)	m	0	10	10	上	20x+y=861	21x+y=861	(0,861)	21x-y=861	(41,0)	x=41
42	(42,21)	M	0	10	10	下	21x-y=903	22x-y=903	(0,-903)	21x+y=903	(43,0)	x=43
43	(43, 0)	m	1	10	10	上	21x+y=946	22x+y=946	(0,946)	22x-y=946	(43,0)	x=43
44	(44,22)	M	1	10	10	下	22x-y=990	23x-y=990	(0,-990)	22x+y=990	(45,0)	x=45
45	(45, 0)	m	0	11	11	上	22x+y=1035	23x+y=1035	(0,1035)	23x-y=1035	(45,0)	x=45
46	(46,23)	M	0	11	11	下	23x-y=1081	24x-y=1081	(0,-1081)	23x+y=1081	(47,0)	x=47
47	(47, 0)	m	1	11	11	上	23x+y=1128	24x+y=1128	(0,1128)	24x-y=1128	(47,0)	x=47
48	(48,24)	M	1	11	11	下	24x-y=1176	25x-y=1176	(0,-1176)	24x+y=1176	(49,0)	x=49
49	(49, 0)	m	0	12	12	上	24x+y=1225	25x+y=1225	(0,1225)	25x-y=1225	(49,0)	x=49
50	(50,25)	M	0	12	12	下	25x-y=1275	26x-y=1275	(0,-1275)	25x+y=1275	(51,0)	x=51
51	(51, 0)	m	1	12	12	上	25x+y=1326	26x+y=1326	(0,1326)	26x-y=1326	(51,0)	x=51
52	(52,26)	M	1	12	12	下	26x-y=1378	27x-y=1378	(0,-1378)	26x+y=1378	(53,0)	x=53
53	(53, 0)	m	0	13	13	上	26x+y=1431	27x+y=1431	(0,1431)	27x-y=1431	(53,0)	x=53

◆ 研究８：求出 $f(x)$ 之幾何結構中，發現之三條特殊的直線方程式的一般化？及頂點之一般化？

n	x			
2k	2k-3	2k-2	2k-1	2k
1	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
-2	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
3	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
-4	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
5	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
-6	2k-9	2k-8	2k-7	2k-6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	1	2	3	4
2k-3	0	1	2	3
-(2k-2)	1	0	1	2
2k-1	2	1	0	1
-2k	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

➢ 代數分析：

① $n = 2k \Longrightarrow$ 推論 L_1（第一條直線）

Sol：

設 L_1： $y = mx + a$ ，過兩點

P ($2k-1$, s)、Q ($2k-3$, t)

$$\Rightarrow \begin{cases} s = (2k-1)\cdot m + a \\ t = (2k-3)\cdot m + a \end{cases}$$

$\Rightarrow 2m = (s-t) \quad \Rightarrow m = \frac{(s-t)}{2}$

$\Rightarrow a = s - (2k-1)\cdot\frac{(s-t)}{2}$

➢ $s - t = 2\times[1-2+3-4+\cdots+(2k-3)] + [(2k-1)-2k]\times(-2)$

$$= 2\times\left[(-1)\cdot\frac{2k-4}{2} + (2k-3)\right] + 2 = 2k$$

➢ $s =$

$$\begin{aligned}
&[1\times(2k-2) - 2\times(2k-3)] &&\rightarrow -2k+4 \\
+&[3\times(2k-4) - 4\times(2k-5)] &&\rightarrow -2k+8 \\
+&[5\times(2k-6) - 6\times(2k-7)] &&\rightarrow -2k+12 \\
&\cdots \\
+&[(2k-3)\times 2 - (2k-2)\times 1] &&\rightarrow -2k+(4k-4) \\
+&[(2k-1)\times 0 - 2k\times 1] &&\rightarrow -2k
\end{aligned}$$

$$= (-2k)\times\frac{2k}{2} + [4+8+12+\cdots+(4k-4)] = -2k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{(s-t)}{2} = k \\ a = (-2k) - (2k-1)\times\dfrac{2k}{2} = -2k^2 - k \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_1 : kx - y = 2k^2 + k}$$

兩對稱直線之交點（$2k+1, 0$）$\Longleftarrow$ $\boxed{L_3\,(\text{對稱}) : kx + y = 2k^2 + k}$

➢ 代數分析：

② $n = 2k \Longrightarrow$ 推論 L_2（第二條直線）

Sol：

設 L_2： $y = mx + b$ ，過兩點

R (2k , β) 、S ($2k - 2$, α)

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = (2k)\cdot m + b \\ \alpha = (2k-2)\cdot m + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 2m\ =\ (\ \beta - \alpha\ ) \Rightarrow\ m\ =\ \frac{(\ \beta - \alpha\ )}{2}$$

$$\Rightarrow\ b\ =\ \beta - (2k)\cdot\frac{(\beta-\alpha)}{2}$$

n	x			
2k	2k-3	2k-2	2k-1	2k
1	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
-2	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
3	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
-4	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
5	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
-6	2k-9	2k-8	2k-7	2k-6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	1	2	3	4
2k-3	0	1	2	3
-(2k-2)	1	0	1	2
2k-1	2	1	0	1
-2k	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

➢ $\beta - \alpha = 2 \times [1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (2k-2)] + [-2k] \times (-2)$

$$= 2 \times \left[(-1)\cdot\frac{2k-2}{2}\right] + 4k = 2k + 2$$

➢ $\beta =\quad [1 \times (2k-1) - 2 \times (2k-2)] \quad \rightarrow -2k + 3$

$+ [3 \times (2k-3) - 4 \times (2k-4)] \quad \rightarrow -2k + 7$

$+ [5 \times (2k-5) - 6 \times (2k-6)] \quad \rightarrow -2k + 11$

…

$+ [(2k-3) \times 3 - (2k-2) \times 2] \quad \rightarrow -2k + (4k-5)$

$+ \quad [(2k-1) \times 1 - 2k \times 0] \quad \rightarrow \quad 2k - 1$

$$= (-2k) \times \frac{2k-2}{2} + [3 + 7 + 11 + \cdots + (4k-5)] = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{(\ \beta - \alpha\ )}{2} = k + 1 \\ b = k - (2k) \times \dfrac{2k+2}{2} = -2k^2 - k \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_2：(k+1)x - y = 2k^2 + k}$$

➢ 代數分析：

③ $n=2k+1 \Longrightarrow$ 推論 L_1（第一條直線）

Sol：

設 L_1： $y=mx+c$，過兩點

P (2k − 2 , t)、Q ($2k$, s)

$$\Rightarrow \begin{cases} s=(2k)\cdot m+c \\ t=(2k-2)\cdot m+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m=(s-t) \Rightarrow m=\frac{(s-t)}{2}$$

$$\Rightarrow c=s-(2k)\cdot\frac{(s-t)}{2}$$

n	x			
2k+1	2k-2	2k-1	2k	2k+1
1	2k-3	2k-2	2k-1	2k
-2	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
3	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
-4	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
5	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
-6	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	2	3	4	5
2k-3	1	2	3	4
-(2k-2)	0	1	2	3
2k-1	1	0	1	2
-2k	2	1	0	1
2k+1	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

➢ $s-t=2\times[1-2+3-4+\cdots-(2k-2)]+[-2k+(2k+1)]\times(-2)$

$$=2\times\left[(-1)\cdot\frac{2k-2}{2}\right]+(-2)=-2k$$

➢ $s=$

$$
\begin{aligned}
&[1\times(2k-1)-2\times(2k-2)] && \rightarrow -2k+3\\
&+[3\times(2k-3)-4\times(2k-4)] && \rightarrow -2k+7\\
&+[5\times(2k-5)-6\times(2k-6)] && \rightarrow -2k+11\\
&\cdots\\
&+[(2k-3)\times 3-(2k-2)\times 2] && \rightarrow -2k+(4k-5)\\
&+\ [(2k-1)\times 1-2k\times 0] && \rightarrow -2k+(4k-1)\\
&+\ (2k+1)
\end{aligned}
$$

$$=(-2k)\times\frac{2k}{2}+[3+7+11+\cdots+(4k-1)]+(2k+1)=3k+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{(s-t)}{2}=-k \\ c=(3k+1)-(2k)\times\dfrac{-2k}{2}=2k^2+3k+1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_1: kx+y=2k^2+3k+1}$$

➢ 代數分析：

④ $n=2k+1 \Longrightarrow$ 推論 L_2（第二條直線）

Sol：

設 L_2： $y=mx+c$ ，過兩點

$P(2k-1,\alpha)$、$Q(2k+1,\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=(2k+1)\cdot m+d\\ \alpha=(2k-1)\cdot m+d\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m=(\beta-\alpha)\Rightarrow m=\frac{(\beta-\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow d=\beta-(2k+1)\cdot\frac{(\beta-\alpha)}{2}$$

n	x			
2k+1	2k-2	2k-1	2k	2k+1
1	2k-3	2k-2	2k-1	2k
-2	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
3	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
-4	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
5	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
-6	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	2	3	4	5
2k-3	1	2	3	4
-(2k-2)	0	1	2	3
2k-1	1	0	1	2
-2k	2	1	0	1
2k+1	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

➢ $\beta-\alpha=2\times[1-2+3-4+\cdots+(2k-1)]+[(2k+1)\times(-2)]$

$$=2\times\left[(-1)\cdot\frac{2k-2}{2}+(2k-1)\right]+(-4k-2)=-2k-2$$

➢ $\beta=$

$$\begin{aligned}
&[1\times(2k)-2\times(2k-1)] &&\rightarrow -2k+2\\
+&[3\times(2k-2)-4\times(2k-3)] &&\rightarrow -2k+6\\
+&[5\times(2k-4)-6\times(2k-5)] &&\rightarrow -2k+10\\
&\cdots\\
+&[(2k-3)\times 4-(2k-2)\times 3] &&\rightarrow -2k+(4k-6)\\
+&[(2k-1)\times 2-2k\times 1] &&\rightarrow -2k+(4k-2)
\end{aligned}$$

$$=(-2k)\times\frac{2k}{2}+[2+6+10+\cdots+(4k-2)]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{(\beta-\alpha)}{2}=-k-1\\ d=0-(2k+1)\times\dfrac{-2k-2}{2}=2k^2+3k+1\end{cases} \Rightarrow \boxed{L_2:(k+1)x+y=2k^2+3k+1}$$

兩對稱直線之交點 $(2k+1,0)\Longleftarrow$ $\boxed{L_3(\text{對稱}):(k+1)x-y=2k^2+3k+1}$

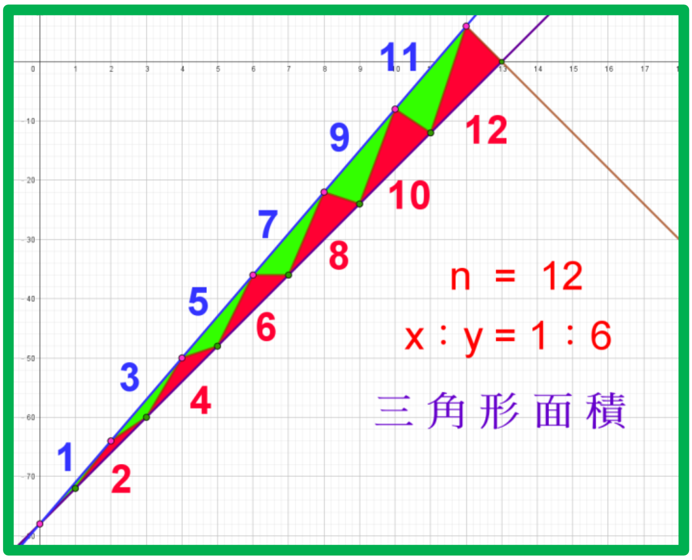
★推論５： 三條直線方程式 及 各頂點之「一般化」。

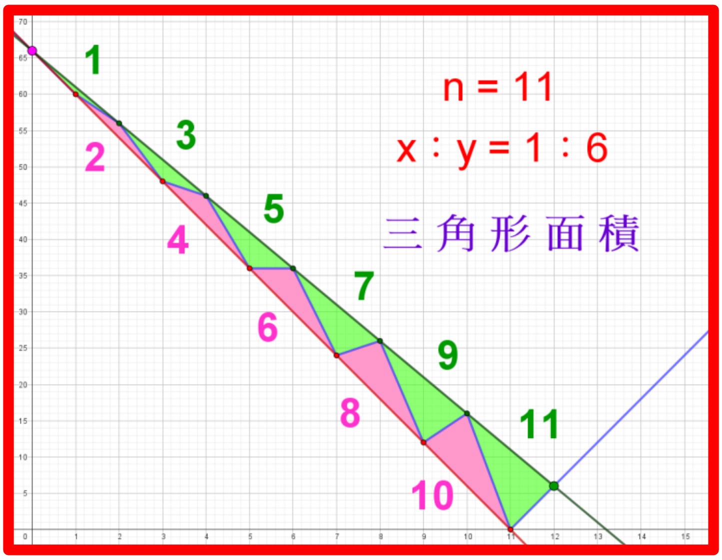
n		頂　　點	對稱	交　點	軸
$2k$	L_1 ：$kx - y = 2k^2 + k$	$(2i-1, -2k^2-k + (2i-1)k)$	★	$(0, -2k^2-k)$	$x = 2k+1$
	L_2 ：$(k+1)x - y = 2k^2 + k$	$(2i, -2k^2-k + (2i)(k+1))$			
	L_3 ：$kx + y = 2k^2 + k$		★	$(2k+1, 0)$ & L_1	
$2k+1$	L_1 ：$kx + y = 2k^2 + 3k + 1$	$(2i, 2k^2+3k+1 - 2ki)$		$(0, 2k^2+3k+1)$	
	L_2 ：$(k+1)x + y = 2k^2 + 3k + 1$	$(2i-1, 2k^2+3k+1 - (2i-1)(k+1))$	★		
	L_3 ：$(k+1)x - y = 2k^2 + 3k + 1$		★	$(2k+1, 0)$ & L_2	

◆ 研究９： $f(x)$ 之幾何圖形中，兩直線上各頂點依序之三角形面積有規律嗎？

☼☼ 意外發現２ ☼☼

➢ 幾何分析：





利用 GGB 軟體繪製 $f(x)$ 之幾何圖形中，發現⋯

⟹ 兩直線上各頂點依序之「三角形面積」⟹ 為「連續整數」！

➢ 代數分析：$n=2k \Longrightarrow$ 論證 三角形面積 依序為「連續整數」！

$L_1: kx-y=2k^2+k$	$L_2: (k+1)x-y=2k^2+k$
$P_{2i+1}(2i+1, -2k^2-k+(2i+1)k)$ $P_{2i+3}(2i+3, -2k^2-k+(2i+3)k)$	$P_{2i}(2i, -2k^2-k+(2i)(k+1))$ $P_{2i+2}(2i+2, -2k^2-k+(2i+2)(k+1))$

✧ 「奇數」面積三角形：$\Delta P_{2i}P_{2i+1}P_{2i+2}$

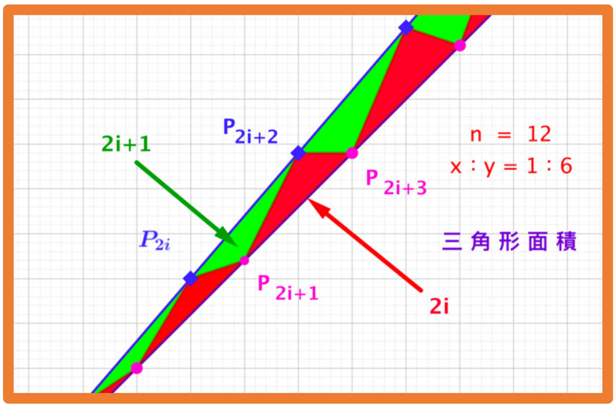
$$\Delta_{P_{2i}P_{2i+1}P_{2i+2}}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i}}\\ \overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i+2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & -k+2i\\ 1 & k+2i+2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|-4i-2|=2i+1$$

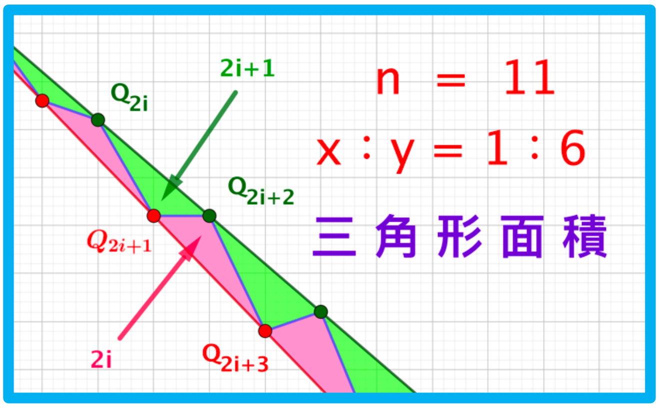
$$=\{1、3、5、7\cdots\}，i=0,1,2,3\cdots$$

✧ 「偶數」面積三角形：$\Delta P_{2i+1}P_{2i+2}P_{2i+3}$

$$\Delta_{P_{2i+1}P_{2i+2}P_{2i+3}}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\overrightarrow{P_{2i+2}P_{2i+1}}\\ \overrightarrow{P_{2i+2}P_{2i+3}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & -k-2i-2\\ 1 & k-2i-2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|4i+4|=2i+2$$

$$=\{2、4、6、8\cdots\}，i=0,1,2,3\cdots$$





➢ 代數分析：$n=2k+1 \Longrightarrow$論證三角形面積依序為「連續整數」！

$L_1: kx+y=2k^2+3k+1$	$L_2: (k+1)x+y=2k^2+3k+1$
$Q_{2i}(2i, 2k^2+3k+1-2ki)$ $Q_{2i+2}(2i+2, 2k^2+3k+1-(2i+2)k)$	$Q_{2i+1}(2i+1, 2k^2+3k+1-(2i+1)(k+1))$ $Q_{2i+3}(2i+3, 2k^2+3k+1-(2i+3)(k+1))$

✧ 「奇數」面積三角形： $\Delta_{Q_{2i}\,Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}}$

$$\Delta_{Q_{2i}\,Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i}}\\ \\ \overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i+2}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & k+2i+1\\ 1 & -k+2i+1\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-4i-2\right| = 2i+1$$

$$= \{1、3、5、7\cdots\}，i = 0,1,2,3\cdots$$

✧ 「偶數」面積三角形： $\Delta_{Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}}$

$$\Delta_{Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+1}}\\ \\ \overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & k-2i-1\\ 1 & -k-2i-3\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|4i+4\right| = 2i+2$$

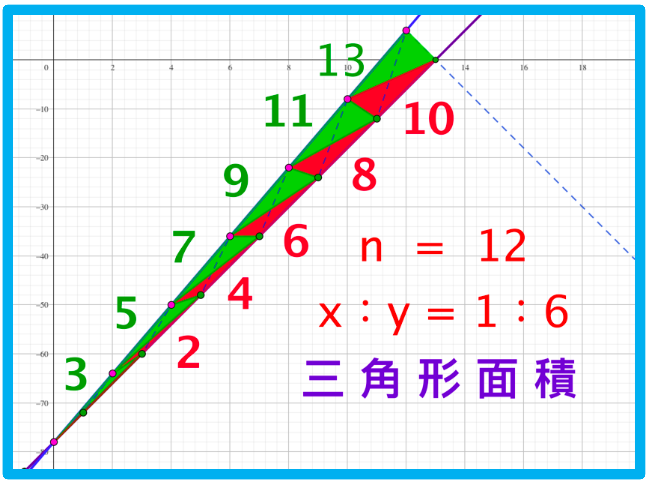
$$= \{2、4、6、8\cdots\}，i = 0,1,2,3\cdots$$

☼〇 意外發現３ 〇☼

不同的切割方向

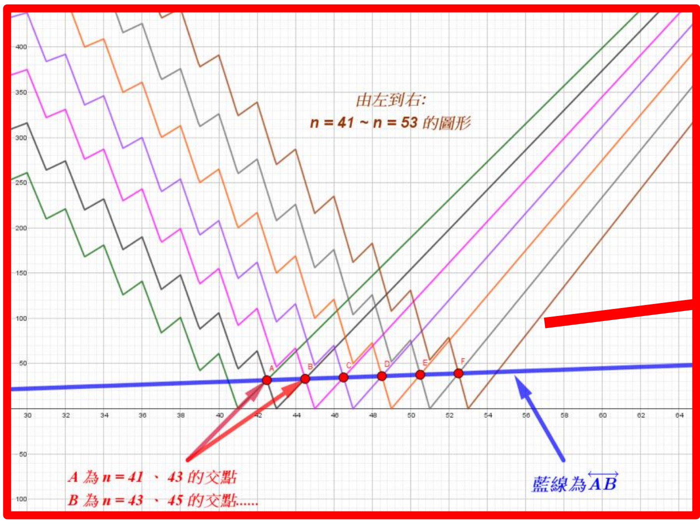
⟹ 三角形面積依然呈現

為「連續整數」！

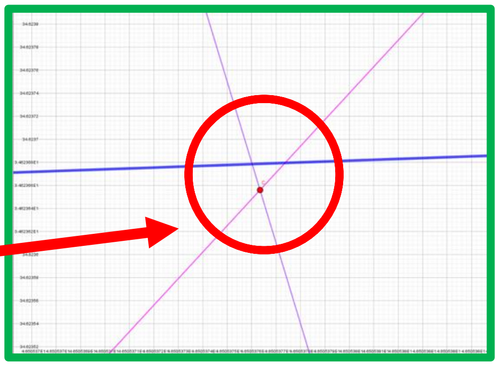


◆ 研究１０：探討 n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形「交點」之幾何性質為何？

巨觀



微觀

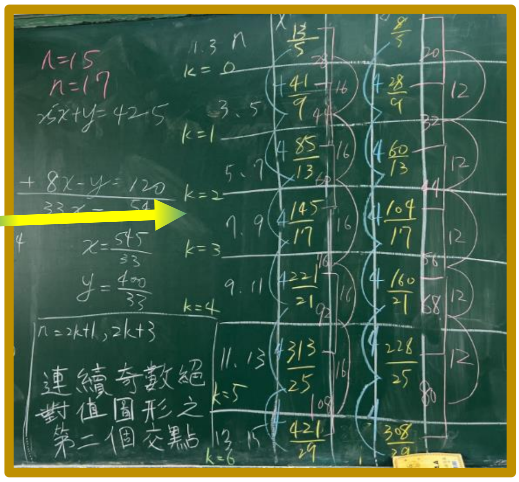


交點 → 不在直線上！

從幾何圖形中，發現 n 值為連續奇數之 $f(x)$ 幾何圖形的各「交點」$\Longrightarrow$ 於巨觀看似皆在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上⋯實則經放大至微觀後，會發現各「交點」並不同在一條直線上。

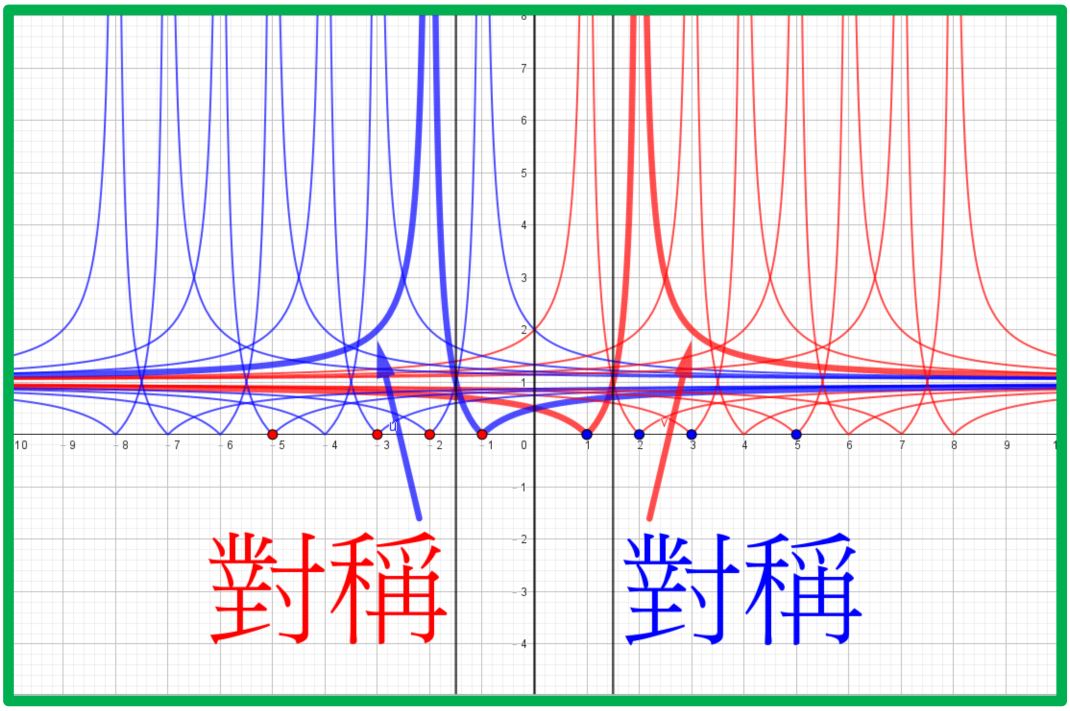
猜測 $\Longrightarrow$ n 值為連續奇數之 $f(x)$ 幾何圖形各「交點」，會在圓錐曲線上嗎？⋯研究後發現，**各點會很接近在圓錐曲線軌跡上**，但不在圓錐曲線上！

★ **發現規則！** ★



◆ 研究１１：

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x-n|}{|x-(n+1)|} \quad 與 \quad f(x)=\dfrac{|x+n|}{|x+(n+1)|} \quad 之 \quad \textbf{對稱性}。\\[2ex] f(x)=\dfrac{|x-(n+1)|}{|x-n|} \quad 與 \quad f(x)=\dfrac{|x+(n+1)|}{|x+n|} \quad 之 \quad \textbf{對稱性}。\end{cases}$$



五、 研究結果與討論：

★定義：

$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$

1. 若 $n=2k \Rightarrow$ 定義：

(i). $f(i+1)-f(i)>0, \forall\, i\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「滑梯」的幾何特徵！

(ii). $f(i+1)-f(i)=0, \forall\, i\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(iii). $f(i+1)-f(i)<0, \forall\, i\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「鋸齒」的幾何特徵！

$i<n$

2. 若 $n=2k+1 \Rightarrow$ 定義：

(i). $f(i+1)-f(i)<0, \forall\, i\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「滑梯」的幾何特徵！

(ii). $f(i+1)-f(i)=0, \forall\, i\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(iii). $f(i+1)-f(i)>0, \forall\, i\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「鋸齒」的幾何特徵！

$i<n$

★ 結論1：$x=n$ 值之「中位數」$\Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(i). 若 $n=4u+3 \Rightarrow y_2-y_1=f(2k+2)-f(2k+1)=-2u+2k$

Then if「$k=u$」$\Rightarrow y_2-y_1=0 \Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(ii). 若 $n=4u+4 \Rightarrow y_2-y_1=f(2k+3)-f(2k+2)=2u-2k$

Then if「$k=u$」$\Rightarrow y_2-y_1=0 \Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

★ 結論2：$f(x)$ 幾何圖形之「水平」幾何特徵！

(i). $n=(4u+1) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！

(ii). $n=(4u+2) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！

(iii). $n=(4u+3) \Rightarrow \underline{(2u+1)\le x\le(2u+2)}$時，$f(x)$有「水平」的幾何特徵 ！

(iv). $n=(4u+4) \Rightarrow \underline{(2u+2)\le x\le(2u+3)}$時，$f(x)$有「水平」的幾何特徵 ！

★ 結論３：$f(x)$ 幾何圖形之「滑梯、水平、鋸齒」統整表（一般化）

n	1	2	3	4	5	6	…	…	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	…	…	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+1	−		−		−		⋯		−		−		+		+		⋯		+		+						
	$\frac{2u}{2}=u$ 個 滑 梯												$\frac{4u-2u}{2}=u$ 個 鋸 齒														

n	1	2	3	4	5	6	…	…	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	…	…	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+2		+		+		+		⋯		+		+		−		−		⋯		−		−					
		$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個 滑 梯												$\frac{(4u+1)-(2u+1)}{2}=u$ 個 鋸 齒													

n	1	2	3	4	5	6	…	…	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	…	…	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+3	−		−		−				−		−		水平		+		⋯		⋯		+		+				
	$\frac{2u}{2}=u$ 個 滑 梯														$\frac{(4u+2)-(2u+2)}{2}=u$ 個 鋸 齒												

n	1	2	3	4	5	6	…	…	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	…	…	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+4		+		+		+		⋯		+		+		水平		−		−		⋯		−		−			
		$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個 滑 梯														$\frac{(4u+3)-(2u+3)}{2}=u$ 個 鋸 齒												

★ 結論４：$f(x)$ 幾何圖形之「幾何特徵」結構表（一般化）

n	頂點座標	極值	滑梯（左邊）	水平	鋸齒（右邊）	方向	第一條直線	第二條直線	兩直線交點	圖形另一半（對稱直線）	對稱圖形交點	軸
4u+1	(4u+1, 0)	m	u	0	u	上	$2ux+y=8u^2+6u+1$	$(2u+1)x+y=8u^2+6u+1$	$(0,8u^2+6u+1)$	$(2u+1)x-y=8u^2+6u+1$	(4u+1,0)	X=4u+1
4u+2	(4u+2,2u+1)	M	u	0	u	下	$(2u+1)x-y=8u^2+10u+3$	$(2u+2)x-y=8u^2+10u+3$	$(0,-8u^2-10u-3)$	$(2u+1)x+y=8u^2+10u+3$	(4u+3,0)	x=4u+3
4u+3	(4u+3, 0)	m	u	1	u	上	$(2u+1)x+y=8u^2+14u+6$	$(2u+2)x+y=8u^2+14u+6$	$(0,8u^2+14u+6)$	$(2u+2)x-y=8u^2+14u+6$	(4u+3,0)	x=4u+3
4u+4	(4u+4,2u+2)	M	u	1	u	下	$(2u+2)x-y=8u^2+18u+10$	$(2u+3)x-y=8u^2+18u+10$	$(0,-8u^2-18u-10)$	$(2u+2)x+y=8u^2+18u+10$	(4u+5,0)	x=4u+5

★ 結論５：$f(x)$ 之兩直線上依序之「三角形面積」$\Rightarrow$ 為「連續整數」！

✧ $\boxed{n=2k}$ $\Rightarrow$

$$\Delta_{P_{2i}P_{2i+1}P_{2i+2}}=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i}}\\ \overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i+2}}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & -k+2i\\ 1 & k+2i+2\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|-4i-2|=2i+1(\text{奇})$$

$$\Delta_{P_{2i+1}P_{2i+2}P_{2i+3}}=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{P_{2i+2}P_{2i+1}}\\ \overrightarrow{P_{2i+2}P_{2i+3}}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & -k-2i-2\\ 1 & k-2i-2\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|4i+4|=2i+2(\text{偶})$$

✧ $\boxed{n = 2k+1}$ $\Longrightarrow$

✧ $\Delta_{Q_{2i}\,Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i}}\\ \\ \overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i+2}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & k+2i+1\\ 1 & -k+2i+1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-4i-2| = 2i+1(\text{奇})$

✧ $\Delta_{Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+1}}\\ \\ \overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & k-2i-1\\ 1 & -k-2i-3\end{vmatrix} = \frac{1}{2}|4i+4| = 2i+2(\text{偶})$

★ **結論 6：n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形之「交點」之幾何性質。**

n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形之各個「交點」

$\Longrightarrow$ 發現這些交點的軌跡，會非常接近一條直線…

六、 評鑑與檢討

➢ **A 學生心得：**

獨立研究進行之初，我對於研究題目只有較模糊的概念，每當論證出新的幾何性質公式時，我都會思考這個公式所代表的幾何含義為何？因而，於前段的研究時間總是一知半解，一度懷疑自己的能力。

後來，我終於能夠透徹了解此研究作品的主軸與精髓，思考速度也變快了不少，對於研究方向與方法也總能夠提出一番新的見解！

因此，於完成研究結論後，我更能獲得滿足與成就感！而同學的付出及老師的教導更是功不可沒，一同努力讓此研究作品更上一層樓！

➢ B 學生心得：

我很常計算錯誤，我如果計算錯誤，就要重頭計算，所以我會非常仔細檢查，讓我出錯的機率少一點。此研究的公式論證推導，「計算」佔了非常重要的角色，本想說只是一堆沒有關連的數字，結果它竟然可以用一個算式找到規律，進而論證推導出「公式」！

這讓我有了好奇心，想要在此研究作品中找到更多的規律！

➢ **未來展望：**

(I). $f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$

1. 進一步探討 n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形「交點」之**幾何性質**與**幾何特徵**為何？
2. 若**修改** $f(x)$ 方程式中的**「部份幾項」**，對 $f(x)$ 之幾何圖形會有什麼影響？進一步探討其中**方程式**與**幾何圖形之間的關係**…

(II). **研究** $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x-n|}{|x-(n+1)|} \text{ 與 } f(x) = \dfrac{|x+n|}{|x+(n+1)|} \text{ 之 } \textbf{對稱性}。\\ f(x) = \dfrac{|x-(n+1)|}{|x-n|} \text{ 與 } f(x) = \dfrac{|x+(n+1)|}{|x+n|} \text{ 之 } \textbf{對稱性}。\end{cases}$

研究此類方程式 $f(x)$ 之幾何性質與幾何特徵…

七、參考資料

1、109 學年彰化縣獨立研究「數學類」得獎作品：

「 Mathmagic 絕對值得一看－極值天堂雲蹤覓 」

https://www.rcse.chc.edu.tw/files.php?m=result2&file=0b7d57ac53d5ca9befc16a1549b278cc

2、科學 Online： 數學之旅：三角形面積公式(III)

https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=66359