

彰化縣 107 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書

作品編號： 32008

組別：
國小組
國中組
數學類
自然與生活科技類
人文社會類

作品名稱：哥倆好 一對寶

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

為培養學生主動探究解決問題的能力，學校長期致力於專題課程的設計，鼓勵學生透過團隊合作，對於引發他們好奇心、感興趣的主題做深入的探討與研究。學期初辦理獨立研究說明會，藉由獲獎師生的經驗分享，激發學生們投入研究享受思考的興趣，鼓勵學生從生活中去發現主題。進行研究的指導與規畫方面，資優資源班學生於課程中即排定獨立研究課程，普通班學生則協助安排指導老師，透過老師的引導，利用課餘時間進行研究。課程內容規劃方面如下：

- 1.講授科學研究方法
- 2.講授實驗記錄、數據處理與誤差分析。
- 3.文獻探討與整理。
- 4.問題解決教學。
- 5.實驗操作及分工合作實驗與操作。
- 6.實地考察、參訪野外考察與實地參訪。
- 7.資訊科技融入研究專題報告，規劃並進行專題探討。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

這一組學生為數理資優班二年級學生，從一年級開始便有獨立研究課程，已具備思考法及科學研究方法，文獻探討的基本能力，在暑假期間持續尋找研究主題。二年級的獨立研究課按課程規畫在前三週經過討論共識後，確立研究主題為桌遊—Double 哆寶，接著依照每周研究計畫的進度規劃持續討論及研究。期間學生亦利用課餘及星期六的時間與指導老師進行討論及撰寫研究報告。

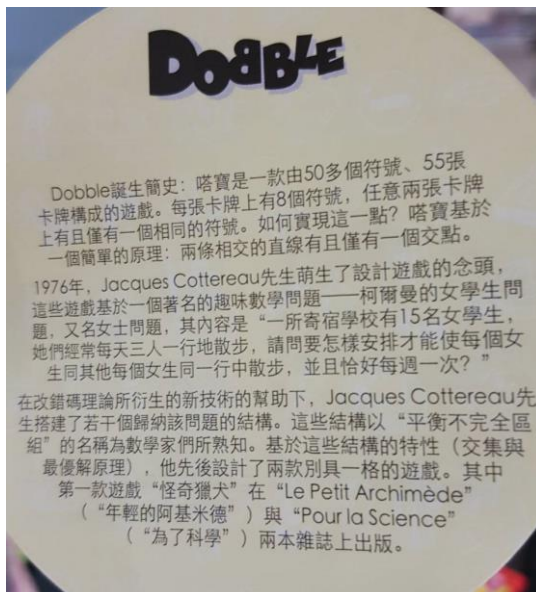
第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

上英文課時，老師帶大家玩了一個單字遊戲，每個人手上有兩張牌，自由找一個同學然後數 123 之後一起翻開，看到一樣的圖案，先用英文念出來的人獲勝，勝方可以把對方的牌收過來，最後 3 分鐘一到，拿到所有牌或手上牌最多的人則是最大贏家。這個遊戲超刺激，為了獲勝，大家很努力利用開戰前的 5 分鐘，拼命的背單字。

下課後，我們幾個同學意猶未盡，充滿好奇心的我們一邊回想著遊戲，一邊思考著為什麼---為何任兩張牌必有一個圖案相同？又為什麼剛好只會有一個圖案相同？難道真的沒有兩張牌的圖案是完全不相同嗎？又或者有沒有可能有兩個以上的圖案相同的牌呢？看起來有許多不同的圖案跟單字，到底是依據什麼規則製作出這副神奇的牌卡？這許許多多的疑問激起了我們想要深入去探究的好奇心。

後來老師告訴我們，她的這個遊戲是改良自學校新買的一組桌遊—Double 哆寶，於是我們將其借來，發現在遊戲簡介中有提到遊戲設計的原理是運用「兩條相交的直線有且僅有一個交點」，這讓我們更加驚訝，究竟這有什麼關係？讓我們想一探究竟。



二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一)擬定正式計畫



(二)研究問題:

1. 探討每張牌卡上擺放的圖案數量與不同圖案的種類數之間的關係
2. 研究任兩張牌卡必有一處相同的做法與原因〈牌卡的製作方式〉
3. 探討將每張牌卡上的圖案數量改變，與每個圖案出現的次數關係
4. 尋找任兩張牌卡恰有「兩個」圖案是相同的可能性
5. 嘗試找出更加淺顯易懂的哆寶製作方法

(三)工作進度表

從這學期開始的星期三第五節是我們的獨立研究課，工作進度甘特圖如下：

研究進度 \ 週次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
確立研究主題	■	■	■											
文獻探討		■	■	■	■	■								
形成研究問題					■	■	■	■	■	■				
資料分析							■	■	■	■	■	■		
撰寫研究報告								■	■	■	■	■	■	
反思檢討													■	■

(四)實驗設備

尺、圓規、筆電、影印機、紙筆、哆寶卡牌

三、彙整相關文獻：

為了能夠更深入的了解哆寶，我們整理了「哆寶喜歡捉迷藏」、「不可哆得的寶卡」以及「哆次的相遇」等獨立研究或科展的文獻。我們發現他們不但已經找出了原版哆寶的製作方式，並解釋了製作方式及理由，而且還改變了設計規則、探討了變數之間的關係，不過看完了他們的研究內容後，我們似乎仍有一些疑問還沒有獲得解答，也想要找出更淺顯易懂的製作方式，便展開了這次的研究。

我們將文獻探討過程中已有研究結果的部分與原先擬定要研究的問題做了對照：

研究問題	已有研究結果	參考文獻
1. 探討每張牌卡上擺放的圖案數量與不同圖案的種類數間的關係	有	1 神奇桌遊—哆寶 2 不可「哆」得的「寶」卡
2. 研究任兩張牌卡必恰有一處相同的做法與原因〈牌卡的製作方式〉	有	1 不可「哆」得的「寶」卡 2 「哆」次的相遇

3. 探討將每張牌卡上的圖案數量改變，與每個圖案出現的次數關係	有	1 神奇桌遊—哆寶 2 不可「哆」得的「寶」卡
4. 尋找任兩張牌卡恰有「兩個」圖案是相同的可能性	待研究	
5. 嘗試找出更加淺顯易懂的哆寶製作方法	待研究	

接下來，針對其中的第 1 到 3 個問題個文獻或研究中已有的結果將其摘錄重點如下，對於已有的研究結果，我們有一些新的想法，將於資料分析中描述，至於目前尚未有研究結果的第 4 題及有持續發揮空間的第 5 題，則作為我們研究的重點，將紀錄於研究成果與討論的主題裡。

(一) 探討每張牌卡上擺放的圖案數量與不同圖案的種類數間的關係

根據「神奇桌遊—哆寶」的研究報告，我們可以得知下結果：

1. 利用表格分析出哆寶牌卡出現的次數，計算出總張數為 55 張，總符號數為 57 種，出現六次的符號有 1 種，出現七次的符號有 14 種，出現八次的符號則有 42 種。

圖案(數字)	1	2	3	4	5	6	7
出現次數	8	8	8	8	8	8	8
圖案(數字)	9	10	11	12	13	14	
出現次數	8	8	8	8	8	8	
圖案(數字)	15	16	17	18	19	20	21
出現次數	8	8	8	8	8	8	8
圖案(數字)	22	23	24	25	26	27	28
出現次數	8	8	8	8	8	8	8
圖案(數字)	29	30	31	32	33	34	35
出現次數	8	8	8	8	8	8	8
圖案(數字)	36	37	38	39	40	41	42
出現次數	8	8	8	8	8	8	8
圖案(數字)	43	44	45	46	47	48	49
出現次數	8	8	8	8	8	8	8
圖案(數字)	50	51	52	53	54	55	56
出現次數	8	8	8	8	8	8	8
圖案(數字)	57						
出現次數	8						

2. 他們以小推大，從每張牌上有 2 個圖案到每張牌卡上有 8 個圖案，依序觀察出圖案數量與總排卡數之間的關係。

每張卡牌的圖案個數	每種圖案出現次數	圖案種類	卡牌總張數
2	2	3	3
3	3	7	7
4	4	13	13
5	5	21	21
6	6	31	31
8	8	57	57

3. 當每張牌卡上有 n 個圖案時，每個圖案出現 n 次，所以總牌卡是 $n*(n-1)+1$ 張。

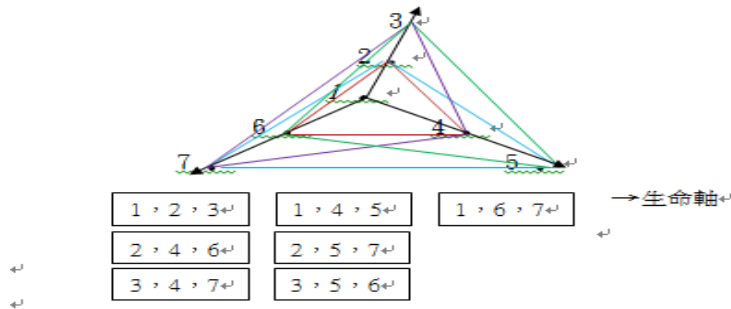
如果一張牌有 n 個花色，就等於由 1 向外發射 n 條生命軸，由 2,3,4,...,n 每點可連成 $n-1$ 條線則可以連成

$$(n-1)(n-1)=1+(n-1)+(n-1)(n-1)=1+(n-1)(1+n-1)=1+(n-1)*n=n*(n-1)+1$$

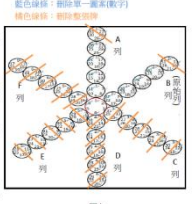
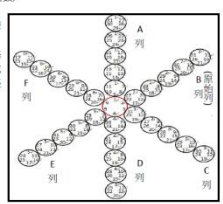
條線，也就是可以作成 $n*(n-1)+1$ 卡；並發現所需圖案也是 $n*(n-1)+1$ 個。

(二) 研究任兩張牌卡必恰有一處相同的做法與原因

1. 在「不可「哆」得的「寶」卡」研究中，他們是使用生命軸的概念，將牌卡畫出來。



2. 在中和高中的研究中，則是列舉出 5 種方法：

第一種：錯置法	第二種：無限法
<p>1. 刪除法</p> <p>在研究 $n-1$ 為合數的特殊牌組過程中我們也嘗試了一種特別設定——刪除法，但是其完成牌組的辦法完全相同。</p> <p>首先我們找到一個最難且大於目標數的不連續正數(即此數-1 為質數)，然後製作此數的牌組，再將每張牌的圖案數減至目標數(即從最末端代換較小的數)。在刪除法中，最少圖案使用，經過這步後從 A 列開始檢查，遇到不符合規定的牌就刪除，最後牌只剩下目標數-2 張(只剩下 A 列及 B 列)。A、B 列是目標數以外的牌組(即刪除法一種無意義的刪除)。</p> <p>於是發現剩下的 A、B 列與錯置法的 A、B 列完全相同，故可利用錯置法直接畫出其餘的牌列，即其牌組完全與錯置法相同。</p>  <p style="text-align: center;">圖九</p>	<p>(二) 無限法</p> <p>如果圖案數沒有設限(即 $m \geq n$ 不受 n 影響)，我們可以利用此法畫出無限多牌。</p> <p>以：一張牌上有 3 個圖案 ($n=3$)，任兩張牌共有 1 個圖案相同，我們固定 1，另外再加上兩個圖案，</p> <p>$1, 2, 3$ $1, 4, 5$ $1, 6, 7$...</p> <p>每增加一張牌，可以一直向外再擴展兩種圖案，再可製造出無限多牌，每一張牌都含有一個與其他牌相同的圖案(數字 1) 所代表的圖案，此類為第一圖案，每張牌除了第一圖案以外會剩下 $n-1$ 個圖案，依照圖案規則充實，這些剩下的圖案都不相同。</p> <p>由此可推論牌數及總圖案數的關係：</p> $p = m \times (n-1) + 1$ <p style="text-align: center;">總圖案數 總牌數 一張牌的圖案數(除第一圖案) 第一圖案</p>
第三種：限制法	第四種：平移法
<p>(三) 限制法</p> <p>以一張牌上共有 4 個圖案 ($n=4$)，任兩張牌共有 1 個圖案相同為例：</p> <p>1, 2, 3, 4 甲卡 1, 5, 6, 7 乙卡 2, 5, 8, 9 丙卡 3, 6, 8, 10 丁卡 4, 7, 9, 10 戊卡</p> <p>在甲卡中取一個數字，增加另外三個數字以組成 4 個數字之乙卡；從甲卡和乙卡中各取一個數字並增加另外兩個數字給丙卡……以此類推，最後從甲卡、乙卡、丙卡、丁卡各挑一個數字組成戊卡。此時的牌數是最大值，為 5 張牌。同理可證，以一張牌共有 n 個圖案，任兩張牌有一個圖案相同：</p> $m = n + 1$ <p>總牌數 有 n 個數字為首的選擇可創造新牌 甲卡(基礎牌)</p> $p = [n \times (n+1)] \div 2$ <p>總圖案數 一張牌的圖案數 總牌數(= m) 每個圖案出現兩次</p>	<p>(四) 平移法(原班搬遷)</p> <p>(n 的限制：$n \geq 3, n \in \mathbb{Z}, n-1$ 為質數)</p> <p>以一張牌上共有 6 個圖案 ($n=6$)，任兩張牌共有 1 個圖案相同為例：以基礎牌(1, 2, 3, 4, 5, 6)為中心放射出 6 列。</p> <p>一列共延伸出 5 張牌，因為每張牌填入基礎牌中的一個數字後，還是五個數字構成此牌，此五個數字必須各從第一列的每張牌各取一個數字，才能構成完整牌組。</p> <p>A 列和基礎牌皆有共同數字 1，扣除基礎牌已有的數字(從 7, 8, 9, 10...) 依序填入卡牌補滿。B 列和基礎牌皆有共同數字 2，必須取基礎牌、A1、A2、A3、A4、A5 各取一個數字，構成第一張牌，以此類推完成 B 列。</p> 

第五種：錯置法

「哆」次的相遇——只有唯一，都是至「寶」

(五) 錯置法

(n 的限制： $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}, n-1$ 為合數)
以一張牌上共有 5 個圖案 ($n=5$)，任
兩張牌共有 1 種圖案相同為例：

C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4
3	3	3	3	4	4	4	3
6	7	8	9	6	7	8	9
11	12	13	10	12	13	10	11
16	17	14	15	17	14	15	16
21	18	19	20	19	20	21	18

圖七

我們用平移法探討，發現 $n-1$ 不是質數時會遇到重複的問題，因此，我們將平移量錯開以重組牌組。

以與基礎牌相同的數字 4 來說，平移量為 $\{0, 2, 0, 2\}$ ，若平移量相等，將與數字 2 的平移量相等，所產生的數字會重複，故平移量不能相等。因此我們將 C 列及 D 列的平移量錯開，如圖八所示。

四、資料分析

已經做過的研究成果中，我們對於兩個部分有些自己的想法，一個是「為什麼設計哆寶牌卡時，當每張牌上有 n 個圖案時，每個圖案出現 n 次？」大家似乎沒有很仔細的探討；另一個是對於「為什麼總牌數及總圖案數是 $n(n-1)+1$ ？」我們另有證明的方法。

(一) 為什麼當每張牌上有 n 個圖案時，每個圖案出現 n 次？

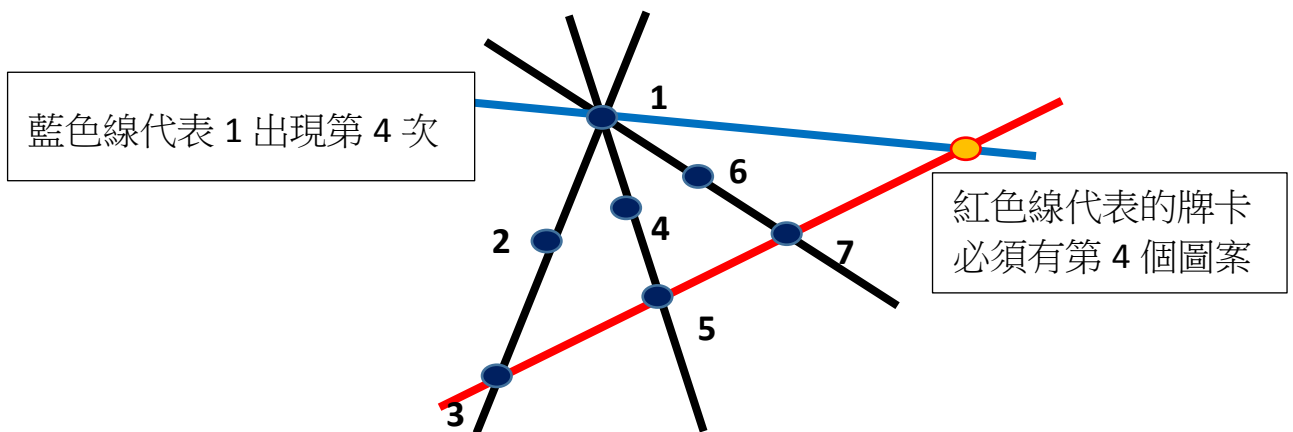
我們一開始是用最少圖案最少牌卡先進行測試，與在「不可「哆」得的「寶」卡——數學桌遊卡的探究」這份作品不謀而合，但是發現每張牌上的每個圖案只出現兩次時，以每張牌上有 8 個圖案來說，需要 36 種圖案，卻只製作出 9 張牌，相較於實際的哆寶牌有 57 種圖案 57 張牌卡而言，玩起來的趣味性及製作的經濟效益是差蠻大的。

【每張牌上皆有 8 個圖，圖案出現 2 次 vs. 出現 8 次】

	每個圖案只出現 2 次	每個圖案只出現 8 次
圖案種類	36 種	57 種
牌卡總數	9 張	57 張
玩起來的趣味性		👍
製作的經濟效益		👍

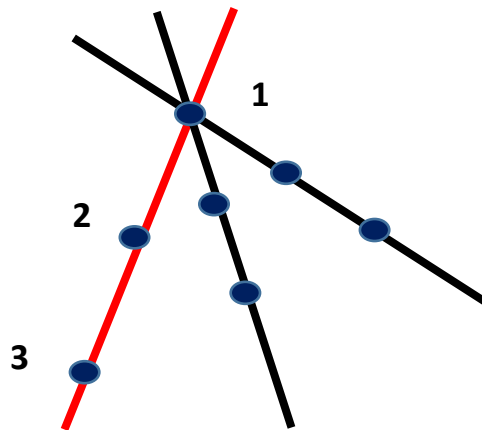
所以這時我們大膽推測，每張圖出現次數越多，可以做出的牌卡數增多量是大於圖案種類的增加量，而牌卡越多，遊戲也會越有趣。但為什麼哆寶牌卡讓每個圖出現 8 次，跟每張牌上的有 8 個圖案一樣呢？如果出現 9 次牌卡的數量不是更多嗎？

我們以每張牌上有 3 個圖案，有圖案出現 4 次來討論看看：



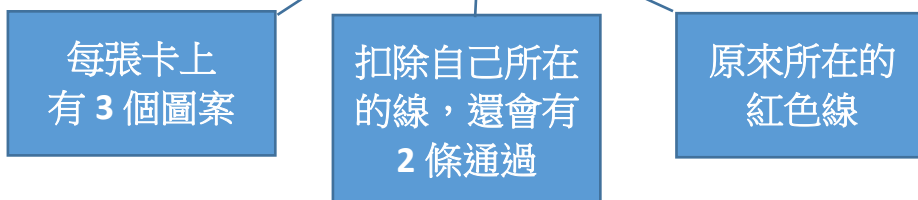
由上圖可以清楚的看出，當 1 出現 4 次時，代表有 4 張牌卡上有 1，我們以直線代表每一張牌，此時紅色線上會有 4 個點，代表其中就會有一張牌上面必須是 4 個圖案，這樣與每張牌上有 3 個圖案會出現矛盾。所以為讓每張牌上的圖案數相同，又希望能有最多張牌數，就是當每張牌有 n 個圖案時，每個圖案出現 n 次。

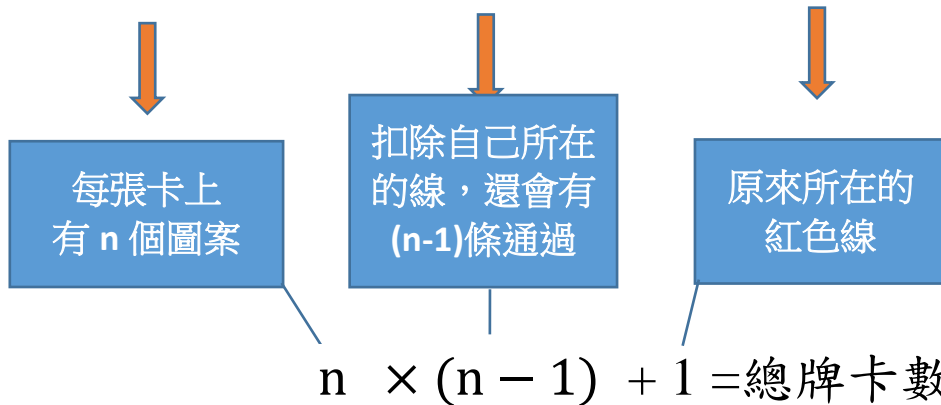
(二) 為什麼總牌數及總圖案數是 $n(n-1)+1$?



這次我們一樣以每張牌上有 3 個圖案來討論，因為每個圖出現 3 次，也就是每個點會有 3 條線通過，扣除自己所在的線，還會有 2 條通過。所以當 3 個圖案時，會有 $3 \times 2 + 1 = 7$ ，共 7 條直線。

$$3 \times 2 + 1 = 7$$





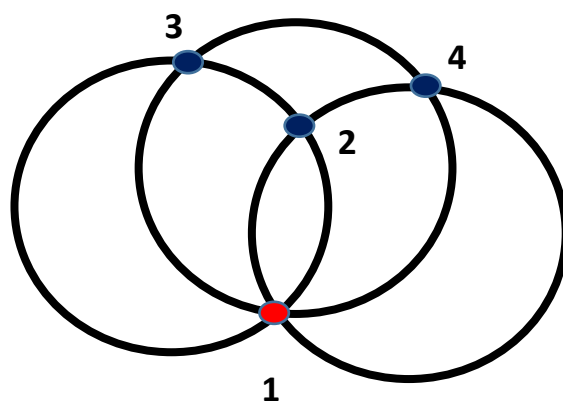
所以當每張牌上有 n 個圖案時，通過每個圖案的直線會有 $n-1$ 條，再加上原本自己所在的這一條直線，則是所有直線的總數，如此一來，也就是總共的牌卡數 $= n(n-1)+1$ 。

五、研究結果與討論

其實在一開始對這個遊戲充滿好奇，大家說出自己心中的疑惑時，其中有一個問題是：為什麼每兩張卡都一定會有圖案一樣，且恰恰好啾啾好只有一個圖案一樣？有沒有可能是恰有兩個圖案一樣呢？

這個問題就在某天靈光一閃中，似乎有了點眉目。這個遊戲設計的原理是運用直線相交於一點的概念去設計，所以我們在之前問題的討論也都朝向直線的圖形來幫助我們思考。這天學長口中喃喃念著：「半徑…，兩圓相交於兩點…」忍不住大叫了一聲，真是一語驚醒夢中人，顧不得一旁驚嚇的學長，開始拿出紙筆，從平常討論的直線，換成圓形來試試看。

圓形畫起來更是容易眼花撩亂，所以還是先嘗試每張牌上有 3 個圖案的情形。



依上圖所示，每個圓代表一張牌，每個圓兩兩都有兩個交點，代表每張牌都有兩個圖案與另一張牌相同，我們將牌卡寫出來對照。

A 卡	1,2,3
B 卡	1,4,3
C 卡	1,4,2
D 卡	4,3,2

接著確認兩兩間都有兩個圖案相同：

卡片組合	A+B	A+C	A+D	B+C	B+D	C+D
相同圖案	1,3	1,2	2,3	1,4	3,4	2,4

證實在每張牌上有 3 個圖案的情況下，我們的推測是正確的。但是當圓的數量增多時，要如何清楚的討論，我們還需要再持續克服。此外，對於遊戲而言，有兩個圖案一樣，似乎是減低了遊戲的難度，所以或許可以再想想如何創造更適合這個情境的遊戲規則。

不過我們意外發現，這副牌還可以三個人玩，任三張牌都會有也恰好有一個圖案相同呢，真是太妙了！

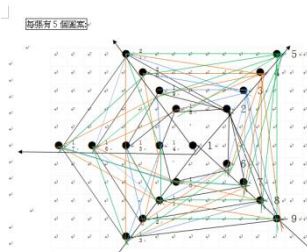
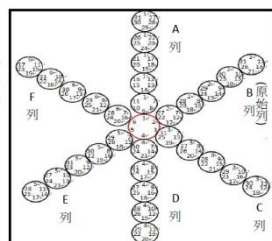
卡片組合	A+B+C	A+B+D	A+C+D	B+C+D
相同圖案	1	3	2	4

這又讓我們找到一個新的問題：哆寶有沒有可能任三張恰有一個圖案相同呢？敬請拭目以待。

我們這次獨立研究擬定的最後一個研究問題，就是嘗試找出更加淺顯易懂的哆寶製作方法。在目前已經有討論到如何製作出哆寶的方法中，都得要很仔細的去對照，又或者有許多的連線引導尋找數群，但不容易清楚明瞭，所以我們試著尋找其他可能。

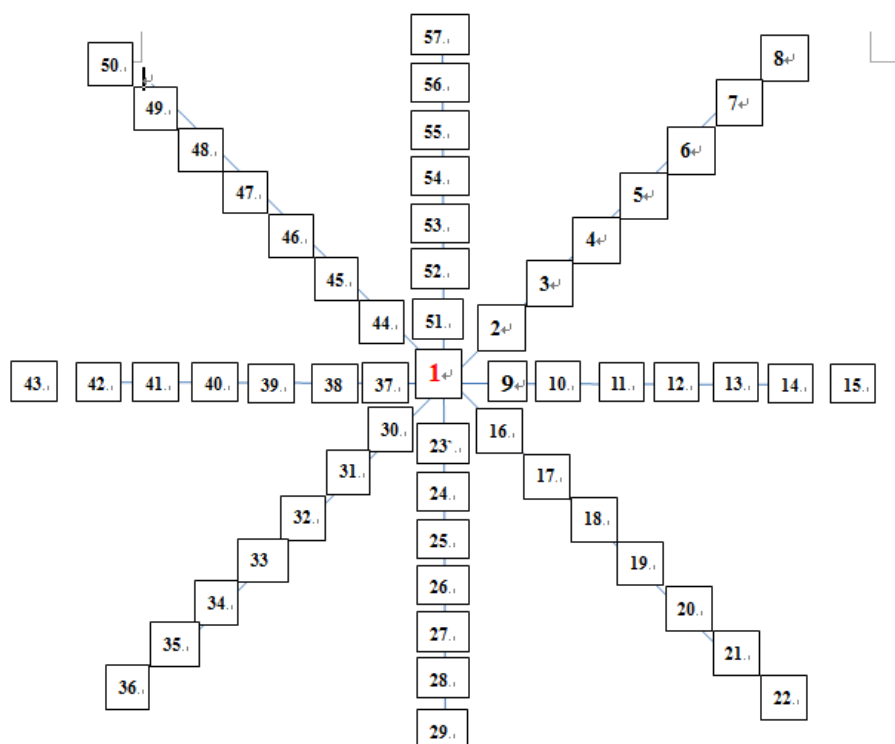
【方法一】螺旋法

在仔細研究過目前科展作品中提出的方法，高中組(左下圖)用一個圖形即表現出其所有牌卡，雖然看起來簡潔，但不易看出如何產出



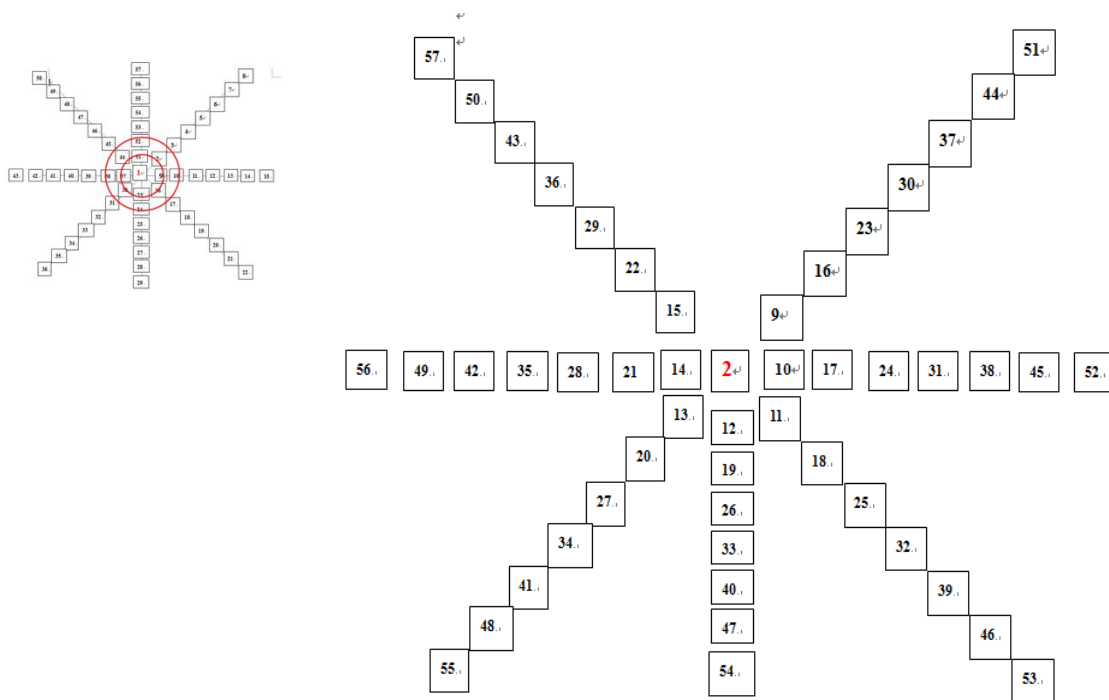
這個圖。國中組(右上圖)則是方法比較容易了解，但因為連線很多，也容易產生錯亂。

所以我們運用其根本原理「直線的交點」，以及參考上述兩種方式，決定用八個圖形將其畫出。下圖以「1」為中心，發散出 8 條直線，因為「1」這個圖案換出現 8 次，底下代表這 8 張牌卡，換句話說，這 8 張牌卡一拿出來，兩兩間恰好圖形「1」就是一樣的圖形。而包含圖形「1」的牌卡已經全部出現。



序號	「1」為共同圖案之所有牌卡							
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	9	10	11	12	13	14	15
3	1	16	17	18	19	20	21	22
4	1	23	24	25	26	27	28	29
5	1	30	31	32	33	34	35	36
6	1	37	38	39	49	41	42	42
7	1	44	45	46	47	48	49	50
8	1	51	52	53	54	55	56	57

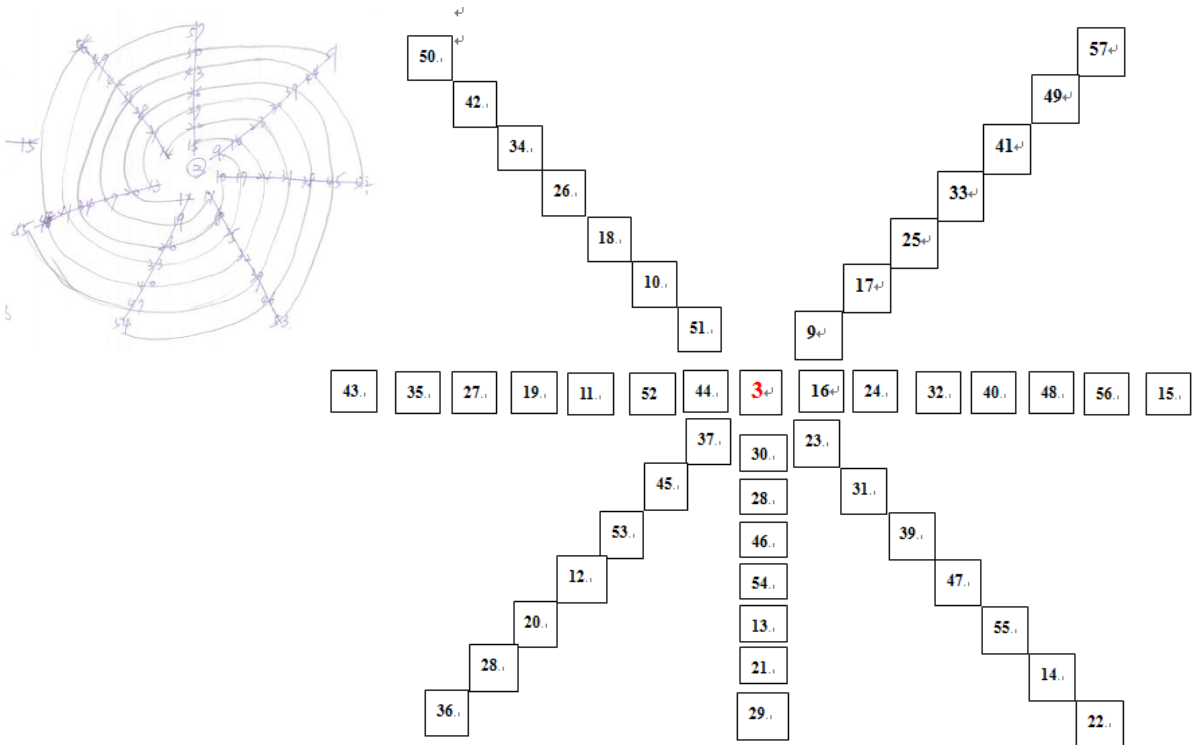
接著，我們以此為基底，去畫出共同圖案是「2」的所有牌卡。因為「2」已經在上圖中出現一次，所以還有7次，也就是代表由「2」發散出去要有7條線。因為每張牌卡恰只有一個圖案相同，所以我們將上圖中的圖以同心圓方式，找出以「2」為共同點的7條線。進行到這裡，包含圖形「2」的牌卡已經全部出現。



序號	「2」為共同圖案之所有牌卡							
1	1	2	3	4	5	6	7	8
9	2	9	16	23	30	37	44	51
10	2	10	17	24	31	38	45	52
11	2	11	18	25	32	39	46	53
12	2	12	19	26	33	40	47	54
13	2	13	20	27	34	41	48	55
14	2	14	21	28	35	42	49	56
15	2	15	22	29	36	43	50	57

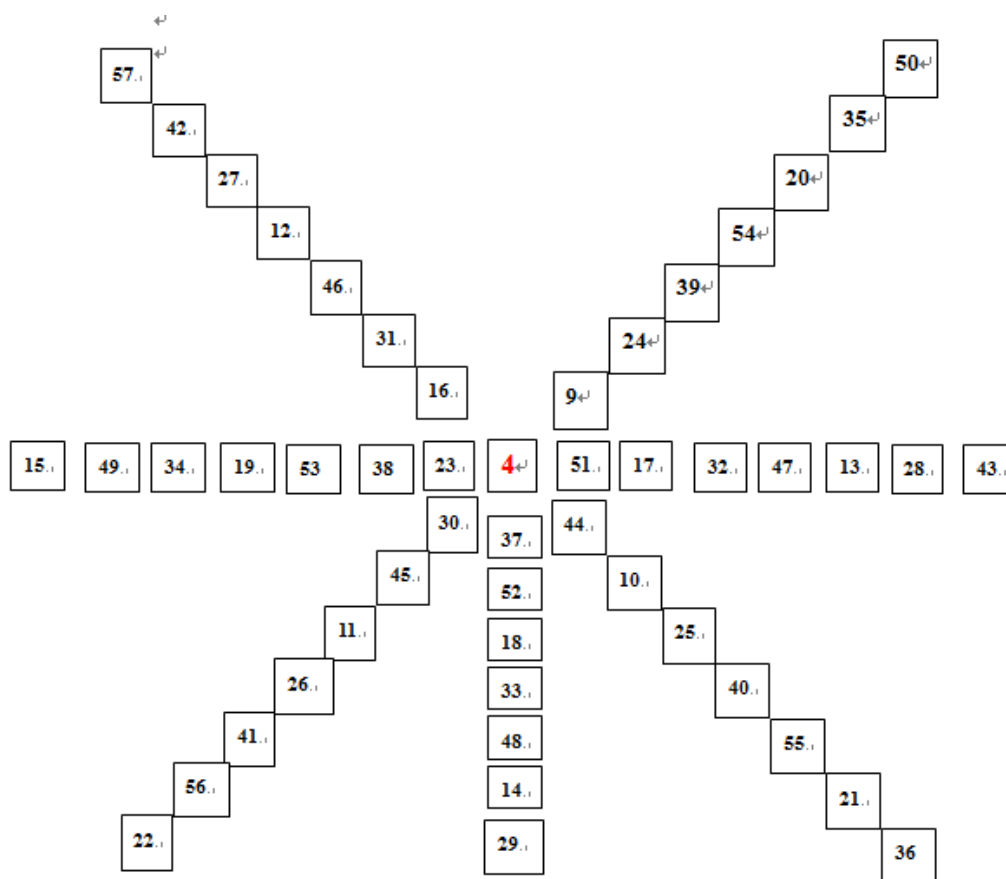
再來，想藉由相同的方法，以共同圖案為「2」的上圖做基底，以同心圓去畫共同圖案是「3」的所有牌卡，結果會回到以「1」為中

心的牌卡圖案，所以我們改變策略，採用螺旋方式選取圖案，得出底下以「3」為共同點的7條線。進行到這裡，包含圖形「3」的牌卡已經全部出現。



序號	「3」為共同圖案之所有牌卡							
1	1	2	3	4	5	6	7	8
16	3	9	17	25	33	41	49	57
17	3	16	24	32	40	48	56	15
18	3	23	31	39	47	55	14	22
19	3	30	38	46	54	13	21	29
20	3	37	45	53	12	20	28	36
21	3	44	52	11	19	27	35	43
22	3	51	10	18	26	34	42	50

螺旋的選取法成功，於是我們以共同圖案為「3」的上圖做基底，這個方法繼續畫出以「4」為共同圖案的所有牌卡。這次相當順利的完成了以「4」為共同點的7條線。進行到這裡，包含圖形「4」的牌卡已經全部出現。



序號	「4」為共同圖案之所有牌卡							
1	1	2	3	4	5	6	7	8
23	4	9	17	25	33	41	49	57
24	4	16	24	32	40	48	56	15
25	4	23	31	39	47	55	14	22
26	4	30	38	46	54	13	21	29
27	4	37	45	53	12	20	28	36
28	4	44	52	11	19	27	35	43
29	4	51	10	18	26	34	42	50

感覺螺旋法似乎會成功，正在欣喜之餘，卻遭遇了打擊。仿照此方法畫出的以「5」為共同圖案的所有牌卡，圖形跟以「3」為共同圖案的圖形重複了！以「6」為共同圖案的所有牌卡圖形則是跟以「4」為共同圖案的圖形重複了。也就是以「5」、以「7」跟以「3」為共同圖案的圖畫出來會相同，以「4」、以「6」跟以「8」為共同圖案的圖畫出來會相同。也就是這個方法只能進行到以「4」為共同圖案，製作出 29 張牌卡。

【方法二】斜線法

後來我們觀察到上述方法中的列表，若從「2」為共同圖案之所有牌卡列出的矩陣，採斜角取圖案，得到「3」為共同圖案的所有牌卡，在以「3」為共同圖案之所有牌卡列出的矩陣繼續採斜角取圖案，能得出符合條件的「4」為共同圖案的所有牌卡。重點來了，納在推下去，會不會成功呢？答案是「BinGo！」，我們完成了 57 張牌。

「1」為共同圖案之所有牌卡							
1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	10	11	12	13	14	15
1	16	17	18	19	20	21	22
1	23	24	25	26	27	28	29
1	30	31	32	33	34	35	36
1	37	38	39	40	41	42	43
1	44	45	46	47	48	49	50
1	51	52	53	54	55	56	57

「2」為共同圖案之所有牌卡

1	2	3	4	5	6	7	8
2	9	16	23	30	37	44	51
2	10	17	24	31	38	45	52
2	11	18	25	32	39	46	53
2	12	19	26	33	40	47	54
2	13	20	27	34	41	48	55
2	14	21	28	35	42	49	56
2	15	22	29	36	43	50	57

取套色部分的矩陣，採斜角取圖案，得到以「3」為共同圖案之7張牌卡(有一張已經在「1」為共同圖案之所有牌卡中)。

得到以「3」為共同圖案之7張牌卡

3	9	17	25	33	41	49	57
3	16	24	32	40	48	56	15
3	23	31	39	47	55	14	22
3	30	38	46	54	13	21	29
3	37	45	53	12	20	28	36
3	44	52	11	19	27	35	43
3	51	10	18	26	34	42	50

取套色部分的矩陣，採斜角取圖案，得到以「4」為共同圖案之7張牌卡。

「4」為共同圖案之7張牌卡

4	9	18	27	36	38	47	56
4	10	19	28	30	39	48	57
4	11	20	29	31	40	49	51
4	12	21	23	32	41	50	52
4	13	22	24	33	42	44	53
4	14	16	25	34	43	45	54
4	15	17	26	35	37	46	55

取套色部分的矩陣，採斜角取圖案，得到以「5」、以「6」、以「7」、以「8」為共同圖案之7張牌卡。

5	9	19	29	32	42	45	55
5	10	20	23	33	43	46	56
5	11	21	24	34	37	47	57
5	12	22	25	35	38	48	51
5	13	16	26	36	39	49	52
5	14	17	27	30	40	43	53
5	15	18	28	31	41	44	54

6	9	20	24	35	39	43	54
6	10	21	25	36	40	44	55
6	11	22	26	30	41	45	56
6	12	16	27	31	42	46	57
6	13	17	28	32	36	47	51
6	14	18	29	33	37	48	52
6	15	19	23	34	38	49	53

7	9	21	26	31	36	48	53
7	10	22	27	32	37	49	54
7	11	16	28	33	38	43	55
7	12	17	29	34	39	44	56
7	13	18	23	35	40	45	57
7	14	19	24	36	41	46	51
7	15	20	25	30	42	47	52

8	9	22	28	34	40	46	52
8	10	16	29	35	41	47	53
8	11	17	23	36	42	48	54
8	12	18	24	30	36	49	55
8	13	19	25	31	37	43	56
8	14	20	24	32	38	44	57
8	15	21	25	33	39	45	51

我們覺得這個方法很簡單可完成，也因為這次的成功，我們還想繼續找看看是不是有其他也很簡便的作法。

六、評鑑與檢討

(一) 尋找研究動機的出發點

發覺問題：

在擬定研究計畫前，因為我們沒有去查看其他研究資料，想了很多問題後，才去彙整相關文獻，才發現我們決定做的東西已經有人做過了，所以只好換個方向繼續研究。

解決方法：

我們花了更多的時間去思考還有哪些題目是值得我們去深入的探討，也查看了更多的資料，希望我們的研究成果能夠獨樹一幟。

心得收穫：

我們學到了下次研究前必須先參考其他的資料，也可以從其他研究結果中找到答案來解答我們的疑惑。而且即使已經有人研究過的問題，也會有新的發展方向。

(二)擬定正式計畫及研究問題的困難及解決方法

發覺問題：

我們的研究剛起步時，面對問題一臉茫然的我們，完全不知該從何做起，只能毫無頭緒的不停思考著，想破了頭也找不出個所以然。

解決方法：

老師建議我們先去看看其他人的研究報告，再來討論我們的研究應該要從哪個方面著手。老師用曼陀羅思考法協助我們提出想法及方向，而且我們也花了一些時間去閱讀和理解其他組別的研究內容。

心得收穫：

在於研究過程中是否有懷著滿腔的熱情去深入的探討事物的奇妙所在，才有機會獲得成功並擁有創新的突破。另外，好的思考工具真的能帶來幫助。

(三)彙整相關文獻資料

發覺問題：

參考完其他組別的研究報告後，我們決定做個表格來區分哪些是尚未研究過的，但是因為我們都不擅長操作電腦，我們發現光是製作一個表格就花了非常多的時間。

解決方法：

我們決定分工合作，一個人上網查詢電腦的操作方式，另一個人則負責打其他的報告內容，比起兩個人的時間都花在同一件事上來講，更有效率多了。

心得收穫：

我們學會了如何操作 Google 文件以及許多電腦的使用方式，在未來做報告時，也會更得心應手，我們也學到了團隊分工的重要性，有夥伴合作總比一個人孤軍奮鬥好。

(四)整理統計資料與資料分析

發覺問題：

一開始我們不知道從何下手，接下來覺得要把自己的想法與討論清楚的呈現，而且還要將自己的研究與之前的研究有區隔，覺得很不容易。

解決方法：

善用平時課餘的閒暇時間，先各自思考研究問題，等到能夠一起討論時，再拿出來和組員、老師一起研究，不但能夠節省討論的時間，還能培養獨立思考的能力。

心得收穫：

在「不可「哆」得的「寶」卡—數學桌遊卡的探究」這份作品中，一開始他們是用最少圖案最少牌卡先進行測試，發現英雄所見略同，我們也是如此，不過觀摩他們列出牌卡的方式，我們也想到一個更簡易的寫法，這個靈感也幫助我們開發更簡單易懂的哆寶牌卡的製作方法。

(五)提出研究成果與討論

發覺問題：

在討論的過程中也會有意見相左的時候，我們有著各不相同的想法，而有時也會拿不定主意，我們有時也會沒有想法，導致研究又短暫的停擺。

解決方法：

透過不斷的理解對方的想法，及耐心的傾聽對方的思考結果，去取得一個平衡點，當我們沒有想法時，我們試著求助老師，或者搜尋相關資料查找研究的靈感。

心得收穫：

學會去尊重對方的想法，接納和自己不同的研究角度，不以自我為中心，不管是對於我們的研究或是你我的人際關係，都將有很大的幫助。

(六)未來可改善：

我們還是有一些想法持續發生中，接下來的課程裡，將繼續對這個主題深入研究：

1. 證實當一張牌卡上有 3 個圖案時，有可能每張牌卡有兩個圖案相同，可以繼續討論牌卡上有 4 個以上圖案的情形
2. 開發更適合有兩個圖案一樣時的遊戲規則。
3. 繼續研究哆寶有沒有可能任三張恰有一個圖案相同呢？這副牌可以三個人玩嗎？
4. 學習英文老師，改良哆寶成為大家學數學的好夥伴。

七、參考文獻：

- (一) 國中數學第五冊康軒版
- (二) 國中數學第二冊翰林版
- (三) 金門安瀾國小(民103)。神奇桌遊—哆寶。金門地區第五十四屆科展國小組數學科作品。
- (四) 新北市立中和高中(民105)。「哆」次的相遇——只有唯一，都是至「寶」新北市地區第五十四屆科展高中組數學科作品。
- (五) 彰化縣第 58 屆科展作品。不可「哆」得的「寶」卡—數學桌遊卡的探究。