第一階段　研究訓練階段

一、 近二年學校獨立研究課程之規劃

近二年，獨立研究已發展成本校資優生的必修課程，並由輔導室負責規劃課程，其具體內容如下：

（一）上課時段

國一：每週一下午第五節彈性課程時間。

國二：每週三下午第五節彈性課程時間。

國三：每週三下午第五節彈性課程時間。

（二）上課地點

國一：資優教室。

國二：生物實驗室、理化實驗室、電腦教室、圖書館、資源教室、語文藝術教室。

國三：資優教室。

（三）核心能力

1. 國一

在老師的引導下：

(1) 能學會發現問題並積極蒐集相關資料。

(2) 能學會擬定架構與分析資料。

(3) 能統整研究資料與撰寫報告。

2. 國二

資優生自己選定數學、自然與生活科技、人文社會中，感興趣的主題，依據發現問題、資料蒐集、分析、統整、撰寫報告之能力，完成一份獨立研究報告。

3. 國三

(1) 發現問題、資料蒐集、分析、統整、撰寫報告之經驗傳承。

(2) 根據獨立研究主題，培養高中科學班人才。

（四）上課方式

1. 針對資優生的類別及特殊需要，將其學習經驗加以系統化組織。
2. 採分組教學，以安排適當的學習課程及活動，俾利資優生學習，獨立研究強調學生經由引導後，能根據自己的興趣，選擇研究主題，擬定研究計畫，並以適切的研究方法，進行資料蒐集、分析與解釋，以培養其獨立研究的能力。
3. 每週安排一節，邀請校內各領域教師指導資優生。
4. 安排兩次校外專家學者蒞校指導。
5. 配合校慶舉辦成果發表。

（五）檢核機制

每位資優生必須完成獨立研究作品，並在期末進行成果報告，期間，校方也積極鼓勵資優生將其作品參與獨立研作競賽。

二、 學校如何提供該生獨立研究訓練

（一）指導資優生訂定研究主題與資料蒐集

指導資優生從日常生活或各領域的學習內容中，覺察自己較感興趣的主題，接著訓練資優生自行訂定題目，與教師討論並確認題目後，著手進行資料蒐集與研讀討論資料內容。

（二）指導資優生擬定研究架構與分析資料

首先引導資優生思考研究動機，進而訂出研究目的以及待答問題，並討論以何種研究法進行研究，最後歸納研究心得，並能將各項討論過程系統記錄。

（三）指導資優生統整研究資料與撰寫報告

指導資優生能依獨立研究之摘要、主題、工作進度、研究問題、尋找資源、研究發現、擬定正式計畫及研究問題、

提出研究結果，以及對整個研究的評鑑與檢討，作一系統地撰寫，提出完整研究報告。

（四）提供行政支援

1. 場地支援

校方於每日課後或假日，提供教室、討論室、實驗室，協助研究團隊進行獨立研究。

2. 設備支援

因應獨立研究主題，提供必要實驗設備、模型與電腦等研究器材，以方便研究團隊進行獨立研究。

3. 經費支援

專款支付校外專家學者蒞校演講獨立研究相關主題之演講費與差旅費。

第二階段　獨立研究階段

一、研究動機

今年為了參加澳洲AMC的比賽，暑假做了很多歷屆試題，其中在2012中學初級卷的第30題引發了我們的興趣。原題目內容如下:泰勒發明一種方法來擴展一組數。例如將一組數[1，8]泰勒化，則可造出兩組數[2，9]與[3，10]，它們的每一項都由前組數的每一項各加1而得，再將這三組數依序合併在一起而得另一組數[1，8，2，9，3，10]。若他由只有一個數[0]的這組數開始，不斷地將它泰勒化，則可得一組數：[0，1，2，1，2，3，2，3，4，1，2，3，2，3，4，3，4，5，2，3，4，…]。請問這組數中的第2012個數是什麼？

我們原先利用土法煉鋼暴力解法求得第2012項，當時老師教了我們快速解法，就是利用三進位轉換，因為發現數位為3^n擴張，本數列的排列和三進位轉換也有異曲同工之妙，例如本題2012轉三進位就是2202112_3，將2+2+0+2+1+1+2再減1就是9，便是本題正解，這個題目引發了我們的興趣，而老師當時也提出了疑問，若第一個數非零呢?又或是數列非以1為公差呢?或是並非以三為倍數做數列的擴展，為了發現其中的奧秘，於是利用了數制的轉換及電腦的確認，展開了本次的獨立研究。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

為了方便描述起見，我們定義函數$T(\{a\},p)$代表起始數值為a，每次擴展為p組數的泰勒化。定義函數$T_n(\{a\},p)=\{t_1,t_2,t_3,\cdots\}$代表起始值a，每次擴展為p組數的泰勒化，經過n次擴展之後結果為$\{t_1,t_2,t_3,\cdots\}$。例：$T_1(\{0\},3)=\{0,1,2\}$為原題目的泰勒化經一次擴展的結果。我們有$T_n(\{a\},p)=T(T_{n-1}(\{a\},p),p)$

定義函數$T(\{a\},p\overline{m})$代表起始值a，第一次擴展p組數，以後每次擴展m組數的泰勒化。

定義函數$T_n(\{a\},p\overline{m})=\{t_1,t_2,t_3,\cdots\}$代表起始值a，第一次擴展p組

數，以後每次擴展 m 組數的泰勒化，經過 n 次擴展之後結果為 $\{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$。

定義函數 $T(\{a\}, \overline{pm})$ 代表起始值 a，依序循環擴展 p 組數、m 組數的泰勒化。

定義函數 $T_n(\{a\}, \overline{pm}) = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$ 代表起始值 a，依序循環擴展 p 組、m 組數的泰勒化，經過 n 次擴展之後結果為 $\{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$。

若 $T_n(\{a\}, \overline{pm}) = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$，

定義 $T_n(\{a\}, \overline{pm}) + \boxed{k} = \{t_1 + k, t_2 + k, t_3 + k, \cdots\}$

我們的研究問題如下

$T(\{0\}, 3)$ 是否能由三進位轉十進位快速求得第 k 個數。

$T_n(\{0\},3)$ 的最大數為何？

$T(\{0\}, 4)$ 是否能由四進位轉十進位快速求得第 k 個數。

$T_n(\{0\},4)$ 的最大數為何？

$T(\{0\}, 5)$ 是否能由五進位轉十進位快速求得第 k 個數。

$T_n(\{0\},5)$ 的最大數為何？

$T(\{a\}, 3)$ 是否能由 $T(0, 3)$ 快速求得第 k 個數。

$T_n(\{a\},3)$ 的最大數為何？

$T(\{0\}, p\overline{m})$ 是否有快速求得第 k 個數的方法。

$T(\{0\}, \overline{pm})$ 是否有快速求得第 k 個數的方法。

（一）第 1 週：2019 年 8 月 11 日~2019 年 8 月 17 日之進度為確定研究方向與主題。

（二）第 2 週：2019 年 8 月 18 日~2019 年 8 月 24 日之進度為上網收集相關資料與文獻探討。

（三）第 3 週：2019 年 8 月 25 日~2019 年 8 月 31 日之進度為學習各進位與十進位間的轉換。

（四）第 4 週：2019 年 9 月 1 日~2019 年 9 月 7 日之進度為

一個數{0}開始,每次擴展 3 組數的函數 $T(\{0\}, 3)$ 的情形。

一個數{0}開始,每次擴展 4 組數的函數 $T(\{0\}, 4)$ 的情形。

（五）第 5 週：2019 年 9 月 8 日~2019 年 9 月 14 日之進度為
一個數{0}開始,每次擴展 5 組數的函數 T({0}, 5)的情形。

（六）第 6 週：2019 年 9 月 15 日~2019 年 9 月 21 日之進度為
一個數{a}開始,每次擴展 3 組數的函數 T({a}, 3)的情形。

（七）第 7 週：2019 年 9 月 22 日~2019 年 9 月 28 日之進度為
T({0}, $p\bar{m}$)是否有快速求得第 k 個數的方法。

（八）第 8 週：2019 年 9 月 29 日~2019 年 10 月 5 日之進度為
T({0}, $\overline{pm}$)是否有快速求得第 k 個數的方法。

（九）第 9 週：2019 年 10 月 6 日~2019 年 10 月 12 日之進度為
再次研究 T({0}, $\overline{pm}$)是否有快速求得第 k 個數的方法。

（十）第 10 週：2019 年 10 月 13 日~2019 年 10 月 19 日之進度為
學校段考休息一週，進度暫停。

（十一）第 11 週：2019 年 10 月 20 日~2019 年 10 月 26 日之進度為
{0, 1}開始，每次擴展 3 組數的函數 T({0, 1}, 3)的情形。

（十二）第 12 週：2019 年 10 月 27 日~2019 年 11 月 2 日之進度為
彙整研究成果、撰寫獨立研究報告。

（十三）第 13 週：2019 年 11 月 3 日~2019 年 11 月 9 日之進度為
彙整研究成果、撰寫獨立研究報告。

（十四）第 14 週：2019 年 11 月 10 日~2019 年 11 月 16 日之進度為
評鑑、檢討、省思與收穫。

（十五）第 15 週：2019 年 11 月 17 日~2019 年 11 月 22 日之進度為
校內成果發表。

工作進度甘特圖如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
形成研究問題	■	■													
文獻探討		■	■												
資料分析				■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	

推導一般情形結果	[redacted]
撰寫研究報告	[redacted]
校內成果發表	[redacted]

三、彙整相關文獻

在暑假決定作這相關問題的研究時，我們搜尋了許多關鍵字如：「泰勒化」、「澳洲 AMC2012」、「三進位轉換」等並無發現相關的研究報告。也查了 2012 年後的許多科展作品，同樣並無相關的研究報告，也許我們的研究是最早的是第一人。在參考官網的參考解法後，便著手本獨立研究，尋求本題目在不同變因變化後的規律，並求其快速解法。

四、資料分析

（一）$T(\{0\},3)$的情形

可知從$T_0(\{0\},3)=\{0\}$開始，可得$T_1(\{0\},3)=\{0,1,2\}$、

$T_2(\{0\},3)=\{0,1,2,1,2,3,2,3,4\}$以及

$$T_3(\{0\},3)=\{0,1,2,1,2,3,2,3,4,1,2,3,2,3,4,3,4,5,2,3,4,3,4,5,4,5,6\}$$

$$=\{t_1,t_2,t_3,\cdots t_{27}\}$$

（其中$T_3(\{0\},3)$的三個部分可以看成$T_2(\{0\},3)$、$T_2(\{0\},3)+1$、$T_2(\{0\},3)+2$）。

由規則可推知$T_n(\{0\},3)$的最大數為 2n，

且在經過 n 次擴展後，共有3^n項。

因$3^6=729<2012<2187=3^7$，故要求出第 2012 項要從$T_7(\{0\},3)$開始看起。

由觀察以上規則可以看出，因 2012=729+729+544，故第 2012 項

$t_{2012}=t_{554}+2$；

而因 554=243+243+68，故第 554 項$t_{554}=t_{68}+2$；

再因 68=27+27+14，故第 68 項$t_{68}=t_{14}+2$；
又因 14=9+5，故第 14 項$t_{14}=t_5+1$；
最後因 5=3+2，故第 5 項$t_5=t_2+1$；
因此可知

$$\begin{aligned} t_{2012} &= t_{554}+2 \\ &= t_{68}+2+2 \\ &= t_{14}+2+2+2 \\ &= t_5+1+2+2+2 \\ &= t_2+1+1+2+2+2 \\ &= 1+1+1+2+2+2=9 \end{aligned}$$

由此可知每經過一次泰勒化所得到的一組數之個數是泰勒化前一組數的 3 倍，故可以考慮三進位制。

將泰勒化後所得到的數依序與三進位制中由小至大的數一一對應後可得下表：

第 n 項(十進位)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
泰勒化t_n	0	1	2	1	2	3	2	3	4	1
第 n 項(三進位)	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100

第 n 項(十進位)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
泰勒化t_n	2	3	2	3	4	3	4	5	2	…
第 n 項(三進位)	101	102	110	111	112	120	121	122	200	…

可發現泰勒化中的數，即為其所對應的三進位制中的數之數碼和，因此第 2012 個數即為三進位制中由小至大第 2012 個數之數碼和。又此數列第一個數為 0，故第 2012 個數為 2011。

$2011\div3=670...\boxed{1}$

$670\div3=223...\boxed{1}$

$223\div3=74...\boxed{1}$

$74\div3=24...\boxed{2}$

$24 \div 3 = 8 ... \boxed{0}$

$8 \div 3 = \boxed{2} ... \boxed{2}$

因$2011 = 2202111_3$，故所求為 2+2+0+2+1+1+1=9。

（二）$T(\{0\},4)$的情形可知從$T_0(\{0\},4) = \{0\}$，

可得$T_1(\{0\},4) = \{0,1,2,3\}$、

$T_2(\{0\},4) = \{0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6\}$以及

$T_3(\{0\},4) =$

$\{0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6,4,5,6,7,$

$2,3,4,5,3,4,5,6,4,5,6,7,5,6,7,8,3,4,5,6,4,5,6,7,5,6,7,8,6,7,8,9\}$

$=\{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{64}\}$

（其中$T_3(\{0\},4)$的四個部分可以看成$T_2(\{0\},4)$、$T_2(\{0\},4) + \boxed{1}$、

$T_2(\{0\},4) + \boxed{2}$、$T_2(\{0\},4) + \boxed{3}$）。

由規則可推知T_n的最大數為 3n，且在經過 n 次擴展後，共有4^n項。

因4^5=1024<2012<4096=4^6，故要求出第 2012 項要從$T_6(\{0\},4)$開始看起。

由觀察以上規則可以看出，因 2012=1024+988，

故第 2012 項t_{2012}=t_{988}+1；而因 988= 256+256+256+220，

故第 988 項t_{988}=t_{220}+3；再因 220=64+64+64+28，

故第 220 項；t_{220}=t_{28}+3；又因 28=16+12，故第 28 項；t_{28}=t_{12}+1；

最後因 12=4+4+4，故第 12 項；t_{12}=t_4+2；

因此可知

$$
\begin{aligned}
t_{2012} &= t_{988}+1 \\
&= t_{220}+3+1 \\
&= t_{28}+3+3+1 \\
&= t_{12}+1+3+3+1 \\
&= t_4+2+1+3+3+1 \\
&= 3+2+1+3+3+1 = 13
\end{aligned}
$$

由此可知每經過一次泰勒化所得到的一組數之個數是泰勒化前一組數的 4 倍，故可以考慮四進位制。

將泰勒化後所得到的數依序與四進位制中由小至大的數一一對應後可得下表：

第 n 項(十進位)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
泰勒化t_n	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3
第 n 項(四進位)	0	1	2	3	10	11	12	13	20	21

第 n 項(十進位)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
泰勒化t_n	4	5	3	4	5	6	1	2	3	…
第 n 項(四進位)	22	23	30	31	32	33	100	101	102	…

可發現泰勒化中的數，即為其所對應的四進位制中的數之數碼和，因此第 2012 個數即為四進位制中由小至大第 2012 個數之數碼和。又此數列第一個數為 0，故第 2012 個數為 2011。

$2011 \div 4 = 502...\boxed{3}$

$502 \div 4 = 125...\boxed{2}$

$125 \div 4 = 31...\boxed{1}$

$31 \div 4 = 7...\boxed{3}$

$7 \div 4 = \boxed{1}...\boxed{3}$

因$2011 = 133123_4$，故所求為 1+3+3+1+2+3=13。

（三）$T(\{0\},5)$的情形可知從$T_0(\{0\},5) = \{0\}$開始，

可得$T_1(\{0\},5) = \{0,1,2,3,4\}$、

$T_2(\{0\},5) = \{0,1,2,3,4,1,2,3,4,5,2,3,4,5,6,3,4,5,6,7,4,5,6,7,8\}$以及

$T_3(\{0\},5) = \{0,1,2,3,4,1,2,3,4,5,2,3,4,5,6,3,4,5,6,7,4,5,6,7,8,$

$1,2,3,4,5,2,3,4,5,6,3,4,5,6,7,4,5,6,7,8,5,6,7,8,9,2,\cdots 10,11,12\}$

（其中$T_3(\{0\},5)$的三個部分可以看成$T_2(\{0\},5)$、$T_2(\{0\},5) + \boxed{1}$、$T_2(\{0\},5) + \boxed{2}$、$T_2(\{0\},5) + \boxed{3}$、$T_2(\{0\},5) + \boxed{4}$）。

由規則可推知T_n的最大數為 4n，且在經過 n 次擴展後，共有5^n項。
因$5^4 = 625 < 2012 < 3125 = 5^5$，故要求出第 2012 項要從$T_5(\{0\},5)$開始看起。由觀察以上規則可以看出，因 2012=625+625+625+137，故第 2012 項$t_{2012} = t_{137} + 3$；而因 137=125+12，故第 137 項
$t_{137} = t_{12} + 1$；
再因 12=5+5+2，故第 12 項$t_{12} = t_2 + 2$；
因此可知

$$\begin{aligned} t_{2012} &= t_{137} + 3 \\ &= t_{12} + 1 + 3 \\ &= t_2 + 2 + 1 + 3 \\ &=1+2+1+3=7 \end{aligned}$$

由此可知每經過一次泰勒化所得到的一組數之個數是泰勒化前一組數的 5 倍，故可以考慮五進位制。
將泰勒化後所得到的數依序與五進位制中由小至大的數一一對應後可得下表：

第 n 項(十進位)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
泰勒化t_n	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5
第 n 項(五進位)	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14

第 n 項(十進位)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
泰勒化t_n	2	3	4	5	6	3	4	5	6	…
第 n 項(五進位)	20	21	22	23	24	30	31	32	33	…

可發現泰勒化中的數，即為其所對應的五進位制中的數之數碼和，因此第 2012 個數即為五進位制中由小至大第 2012 個數之數碼和。又此數列第一個數為 0，故第 2012 個數為 2011。
2011÷5=402...$\boxed{1}$
402÷5=80...$\boxed{2}$
80÷5=16...$\boxed{0}$

$16 \div 5 = \boxed{3} \ldots \boxed{1}$

$2011 = 31021_5$，故所求為 3+1+0+2+1=7

（四）T({1},3)的情形

可知從$T_0(\{1\},3) = \{1\}$開始，可得$T_1(\{1\},3) = \{1,2,3\}$、

$T_2(\{1\},3) = \{1,2,3,2,3,4,3,4,5\}$以及

$T_3(\{1\},3) = \{1,2,3,2,3,4,3,4,5,2,3,4,3,4,5,4,5,6,3,4,5,4,5,6,5,6,7\}$

$= \{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{27}\}$

（其中$T_3(\{1\},3)$的三個部分可以看成$T_2(\{1\},3)$、$T_2(\{1\},3) + \boxed{1}$、

$T_2(\{1\},3) + \boxed{2}$）。

由規則可推知T_n的最大數為 2n+1，且在經過 n 次擴展後，共有3^n項。

很明顯的$T_m(\{1\},3) = T_m(\{0\},3) + \boxed{1}$

（五）T({n},3)的情形

現在我們由數學歸納法證明$T_m(\{n\},3) = T_m(\{0\},3) + \boxed{n}$

n=1 時就是 T({1},3)的情形，前面已經說明$T_m(\{1\},3) = T_m(\{0\},3) + \boxed{1}$

假設 n=k 成立，即$T_m(\{k\},3) = T_m(\{0\},3) + \boxed{k}$

則當 n=k+1 時 可知$T_0(\{k+1\},3) = \{k+1\} = T_0(\{k\},3) + \boxed{1}$，

$T_1(\{k+1\},3) = \{k+1, k+2, k+3\} = T_1(\{k\},3) + \boxed{1}$、

$T_2(\{k+1\},3) = \{k+1, k+2, k+3, k+2, k+3, k+4, k+3, k+4$

$K+5\} = T_2(\{k\},3) + \boxed{1}$

及$T_3(\{k+1\},3) = \{k+1, k+2, k+3, K+2, k+3, k+4, k+3, k+$

4,k+5,k+2,k+3,k+4,k+3,k+4,k+5,k+4,k+5,k+6,k+3,,k+4,k+5,k+4,

k+5,K+6,k+5,k+6,k+7=T3{k},3+$\boxed{1}$

由此可知$T_m(\{k+1\},3) = T_m(\{0\},3) + \boxed{k+1}$

由數學歸納法可知$\forall n \in N \quad T_m(\{n\},3) = T_m(\{0\},3) + \boxed{n}$

（六）T({0},5$\bar{3}$)的情形

可知從$T_0(\{0\},5\bar{3})=\{0\}$開始，可得$T_1(\{0\},5\bar{3})=\{0,1,2,3,4\}$、

$T_2(\{0\},5\bar{3})=\{0,1,2,3,4,1,2,3,4,5,2,3,4,5,6\}$以及

$T_3(\{0\},5\bar{3})=\{0,1,2,3,4,1,2,3,4,5,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,2,3,4,5,6,3,4,5,6,7,$
$2,3,4,5,6,3,4,5,6,7,4,5,6,7,8\}=\{t_1,t_2,t_3,\cdots,t_{45}\}$

（其中$T_3(\{0\},5\bar{3})$的三個部分可以看成$T_2(\{0\},5\bar{3})$、$T_2(\{0\},5\bar{3})+\boxed{1}$、$T_2(\{0\},5\bar{3})+\boxed{2}$）。

由規則可推知T_n的最大數為 2n+2 $\forall n\in N$，且在經過 n 次擴展後共有$5(3^{n-1})$項。

因$5(3^{6-1})=1215<2012<3645=5(3^{7-1})$，故要求出第 2012 項要從$T_7(\{0\},5\bar{3})$開始看起。

由觀察以上規則可以看出，因 2012=1215+797，故第 2012 項

$t_{2012}=t_{797}+1$；

而因 797=405+392，故第 797 項$t_{797}=t_{392}+1$；

再因 392=135+135+122，故第 392 項$t_{392}=t_{122}+2$；

又因 122=45+45+32，故第 112 項$t_{112}=t_{32}+2$

然而 32=15+15+2，故第 32 項$t_{32}=t_2+2$

最後因$t_2=1$；

因此可知

$$
\begin{aligned}
t_{2012} &= t_{797}+1\\
&= t_{392}+1+1\\
&= t_{122}+2+1+1\\
&= t_{32}+2+2+1+1\\
&= t_2+2+2+2+1+1\\
&= 1+2+2+2+1+1=9
\end{aligned}
$$

由此可知每經過一次泰勒化所得到的一組數之個數是泰勒化前一組數的 3 倍，故可以考慮三進位制，又因其數等於$5(3^{n-1})$，所以將數字轉換的算法稍加轉換一下將變化後泰勒化，可得下面的算法：

2011÷5=402...$\boxed{1}$

402÷3=134. . . $\boxed{0}$

134÷3=44. . . $\boxed{2}$

44÷3=14. . . $\boxed{2}$

14÷3=4. . . $\boxed{2}$

4÷3=$\boxed{1}$. . . $\boxed{1}$

1+1+2+2+2+0+1=9

（七）$T(\{0\},\overline{43})$的情形

可知從$T_0(\{0\},\overline{43})=\{0\}$開始，可得$T_1(\{0\},\overline{43})=\{0,1,2,3\}$、

$T_2(\{0\},\overline{43})=\{0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5\}$以及

$T_3(\{0\},\overline{43})=\{0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6,2,3,4,5,3,4,$

$5,6,4,5,6,7,3,4,5,6,4,5,6,7,5,6,7,8\}=\{t_1,t_2,t_3,\cdots,t_{48}\}$

（其中$T_2(\{0\},\overline{43})$的三個部分可以看成$T_1(\{0\},\overline{43})$、$T_1(\{0\},\overline{43})+\boxed{1}$、$T_1(\{0\},\overline{43})+\boxed{2}$）。

（其中$T_3(\{0\},\overline{43})$的四個部分可以看成$T_2(\{0\},\overline{43})$、$T_2(\{0\},\overline{43})+\boxed{1}$、$T_2(\{0\},\overline{43})+\boxed{2}$、$T_2(\{0\},\overline{43})+\boxed{3}$）。

由規則可推知$T_0(\{0\},\overline{43})$的最大數，

當 n 為奇數時最大數是$3+5\times\frac{n-1}{2}$，當 n 為偶數時最大數是$5\times\frac{n}{2}$，

因$4^3\times3^3=1278<2012<6912=4^4\times3^3$，故要求出第 2012 項要從$T_7(\{0\},\overline{43})$開始看起。由觀察以上規則可以看出，

因 2012=1728+284，故第 2012 項$t_{2012}=t_{284}+1$；

而因 284=144+140，故第 284 項$t_{284}=t_{140}+1$；

再因 140=48+48+44，故第 140 項$t_{140}=t_{44}+2$；

又因 44=12+12+12+8，故第 44 項$t_{44}=t_8+3$；

最後 8=4+4，故第 8 項$t_8=t_4+1=3+1=4$；

因此可知

$$
\begin{aligned}
t_{2012}&=t_{284}+1\\
&=t_{140}+1+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= t_{44} + 2 + 1 + 1 \\
&= t_8 + 3 + 2 + 1 + 1 \\
&= t_4 + 1 + 3 + 2 + 1 + 1 \\
&= 3 + 1 + 3 + 2 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

2011÷4=502...$\boxed{3}$

502÷3=167...$\boxed{1}$

167÷4=41...$\boxed{3}$

41÷3=13...$\boxed{2}$

13÷4=3...$\boxed{1}$

3÷3=$\boxed{1}$...$\boxed{0}$

1+0+1+2+3+1+3=11

（八）T({0,1},3)的情形

可知從$T_0(\{0,1\},3) = \{0,1\}$開始，可得$T_1(\{0,1\},3) = \{0,1,1,2,2,3\}$、$T_2(\{0,1\},3) = \{0,1,1,2,2,3,1,2,2,3,3,4,2,3,3,4,4,5\}$以及

$T_3(\{0,1\},3) = \{0,1,1,2,2,3,1,2,2,3,3,4,2,3,3,4,4,5,1,2,2,3,3,4,2,3,3,4,4,5$
$3,4,4,5,5,6,2,3,3,4,4,5,3,4,4,5,5,6,4,5,5,6,6,7\}$

$= \{t_1, t_2, t_3, \cdots t_{54}\}$

(其中$T_3(\{0,1\},3)$的三個部分可以看成$T_2(\{0,1\},3)$、$T_2(\{0,1\},3)+1$、$T_2(\{0,1\},3)+2$)。

T({0,1},3)的奇數項就是T({0},3)，T({0,1},3)的偶數項就是T({1},3)。

由規則可推知$T_n(\{0,1\},3)$的最大數就是$T_n(\{1\},3)$的最大數為 2n+1，

且在經過 n 次擴展後，共有2×3^n項。

2012÷2=1006

故 T({0,1},3)的 2012 項就是T({1},3)的 1006 項。

1005÷3=335...$\boxed{0}$

335÷3=111...$\boxed{2}$

111÷3=37...$\boxed{0}$

$37 \div 3 = 12...\boxed{1}$

$12 \div 3 = 4...\boxed{0}$

$4 \div 3 = \boxed{1}...\boxed{1}$

1+1+0+1+0+2+0=5 又T({1},3)的起始值是 1 由前面的討論知

故 T({0, 1}, 3)的 2012 項是 5+1=6

五、研究結果與討論

經由上述研究，本研究發現：

(一)可由十位轉三進位快速求得 T({0}, 3)的第 k 個數。

(二)$T_n(\{0\},3)$的最大數為 2n。

(三)可由十進位轉四進位快速求得 T({0}, 4)的第 k 個數。

(四)$T_n(\{0\},4)$的最大數為 3n。

(五)可由十進位轉五進位快速求得 T({0}, 5)的第 k 個數。

(六)$T_n(\{0\},5)$的最大數為 4n。

(七)T({a}, 3)的第 k 個數即為 T({0}, 3)的第 k 個數再加上 a。

(八)$T_n(\{a\},3)$的最大數為 2n+a。

(九)T({0}, $p\overline{m}$)快速求得第 k 個數的方法為：

((k-1)÷p 的餘數)+($\left[\frac{k-1}{p}\right] \div m$的餘數)+ ($\left[\frac{k-1}{pm}\right] \div m$的餘數)+

($\left[\frac{k-1}{pmm}\right] \div m$的餘數)+⋯+ ($\left[\frac{k-1}{pm\cdots m}\right] \div m$的餘數)(其中[ ]為高斯符號)

(十)T({0}, $\overline{pm}$)快速求得第 k 個數的方法為：

((k-1)÷p 的餘數)+($\left[\frac{k-1}{p}\right] \div m$的餘數)+ ($\left[\frac{k-1}{pm}\right] \div p$的餘數)+

($\left[\frac{k-1}{p^2m}\right] \div m$的餘數)+ ($\left[\frac{k-1}{p^2m^2}\right] \div p$的餘數)+⋯(其中[ ]為高斯符號)

(十一) T({a, b}, 3)可將奇數項視為 T({a}, 3)，偶數項視為 T({b}, 3)

分開討論，即可快速求得第 k 個數

六、評鑑與檢討

(一)尋找研究動機的出發點

發覺問題：

在要作獨立研究時,決定研究題目是一件很困難的事,我們是七、八年級的學生，數學預備知識不多，我們看了很多科展、獨立研究的作品都看不懂,作品內容問老師之後也不是很懂，老師也說這些題目有些要用國三甚至高中所學的數學知識才能理解。

解決方法：

老師告訴我們不要捨近求遠,你們現在不是正在練習澳洲 AMC 競賽的歷屆試題，想想看裡面一定有很多值得研究的題目。

心得收穫：

的確如老師所言,我們就在澳洲 AMC 競賽的歷屆試題內找到我們要研究的主題。

(二)擬定正式計畫及研究問題的困難及解決方法

發覺問題：

獨立研究剛開始時，有很多符號要定義、說明。一臉茫然的我們不知該如何做起，嘗試了很多不同的方法下定義，都覺得不完美。

解決方法：

老師告訴我們，不同的變數可用不同的英文字母代替，接著再把相關的數學知識、符號寫出來，再一一套入使用。泰勒化的結果要用中括號或大括號也討論了很久。最後決定由函數、集合和循環小數的概念引入符號。

心得收穫：

在這過程中，我們學到數學是嚴謹的，定義一個能大家一目瞭然的符號是不簡單的。在面對問題時，目光不要太陝隘，不要只執著於一點，多擴散思考，並集思廣益，或許就會有新的想法出現。

(三)彙整相關文獻資料

發覺問題：

在暑假決定作這相關問題的研究時，我們搜尋了關鍵字如：「泰勒化」、「澳洲 AMC2012」、「三進位轉換」等並無發現相關的研究報告。(找到了不少「泰勒展開式」的文章)。

解決方法：

一開始只 google「泰勒化」、「澳洲 AMC2012」，找不到相關研究，老師建議我們多找其它關鍵字。因此我們繼續找了「三進位轉換」等關鍵字，老師也建議我們查了 2012 年後的許多科展作品，同樣並無相關的研究報告。

心得收穫：

在搜尋關鍵字的過程中，常發現我們總是一直找同樣的錯誤字詞，以致於浪費了很多時間，這也告訴我們互助合作可以減少時間的損耗，下次可以先把討論後想到的關鍵字寫在紙上，再分別找。另外雖然我們沒找到相關的研究資料，但也意外在網路上發現有算出餘數的計算機和進位轉換器。

(四)整理統計資料與資料分析(1)

發覺問題：

在研究 $T(\{0\}, p\overline{m})$ 及 $T(\{0\}, \overline{pm})$ 的快速算法時，我們無法直接由 m 進位轉十進位得到答案。我們也推出了快速解法，但不知如何用數學式表達。

解決方法：

老師引進了高斯符號，指導我們寫出數學式，解決了我們的問題。

心得收穫：

下次不論是在學習數學和其它科知識時，要從原理出發，才能徹底了解，也有助於公式的記憶，接著才能昇華到更高深的靈活運用。

(五)整理統計資料與資料分析(2)

發覺問題：

因為這一部分有很多變因要討論，將工作分派給各組員後，發現

每個人的格式不一，以致於報告亂成一鍋粥。

解決方法：

事先要求統一的格式，定義統一的符號。

心得收穫：

在做任何事前，先思索有什麼提高正確率與增加效率的方法，才不會花太多時間在補救上。

(六)提出研究成果與討論

發覺問題：

在研究的過程中，有時會因組員的怠惰或生病身體不適，未能準時完成老師指定作業，導致研究短暫的停擺。

解決方法：

透過團隊合作的理解對方的困難處，發揮同學愛一起解決同學的困難點。

心得收穫：

學會去尊重對方的想法和能力，接納和自己不同進度和態度，不以自我為中心，不管是對於我們的研究或是同儕的人際關係，都將有很大的幫助。

(七)心得省思和未來展望：

在一連串的研究完成後，有了諸多感觸，我們學會了如何在 word 上打出數學符號、方程式，這是一項日後都用得的到的技能；也學習了用數學歸納法證明，團隊合作的體悟更不用贅述了。另外常常在一個變因討論時原本沒有頭緒，但在後來大膽嘗試後才發現其中的奧祕和歸納出來的關係式，這也告訴了我們，不要畏難而不敢嘗試，迷團就像一層薄霧，大膽的走入後就沒什麼了不起的了。

因時間有限，我們目前只完成了 $T(\{0\},\overline{pm})$快速求得第 k 個數的方法，未來可試著研究 $T(\{a\},\overline{pm})$快速求得第 k 個數的方法，甚至是快速求得 $T(\{a\},\overline{pmn})$第 k 個數的方法。更進一步可快速求得求出 $T(\{a,b\},\overline{pmn})$ 及 $T(\{a,b,c\},\overline{pmn})$ 等第 k 個數的方法。

七、參考資料

(一)九章數學教育基金會澳洲 AMC 數學能力檢定歷屆試題

http://www.chiuchang.org.tw/modules/mydownloads/viewcat.php?cid=48

(二)進制轉換

http://www.kwuntung.net/hkunit/base/base.php

(三)餘數計算器

http://www.ab126.com/shuxue/2892.html