

# 彰化縣 107 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選 作品說明書

## 第一階段 研究訓練階段（教師撰寫）

### 一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校自三年級起提供資優學生相關課程服務，主要切分為兩大部分：研究技能訓練與獨立研究實踐。

課程目標：（一）能體驗發現及解決問題的過程。

（二）能熟練某領域的知識。

（三）能學會研究所需技能。

（四）能依個人興趣拓展相關知識。

（五）能培養正確與積極的研究態度。

（六）能學會與人分工合作的正確態度。

課程大綱如下圖：



## 二、學校如何提供該生獨立研究訓練

學校在安排獨立研究課程時，按照學生年級切分為三年級、四年級，以及高年級三層次，說明如下：

- (一) 三年級：針對三年級的資優生，會設計與學科相關的課程以拓展其知識基礎，每週安排兩節主題探索課程，主要在研究技巧的訓練方面，讓學生學習文書處理、資料蒐集與整理方法、圖書館運用、觀察與做筆記的能力、晤談方法。在資源教室的充實活動中，提供一般探索機會，搭配如數位相機、顯微鏡、簡單科學實驗技術等的操作練習。每年安排參訪多場展覽，讓學生能找出研究興趣與觀摩優秀作品，並隨時記錄有興趣的主題。
- (二) 四年級：在學科加深加廣方面與三年級相同，但進入此階段，學生已開始針對有興趣的主題進行研究，而非單純只蒐集資料。每週兩節課的獨立研究課程，四年級資優生主要擔任研究協助者，配合學長姐的引導，協助研究觀察與記錄工作，對於了解實際研究歷程與重點事項，是很重要的訓練。
- (三) 高年級：每週進行兩節課的獨立研究課程，實際進行研究，在教師協助下，完成「訂定主題」、「擬定工作進度與分配」、「擬定研究問題」、「蒐集資料與整理」、「尋求資源」、「實際研究與記錄」、「研究討論與發現」、「撰寫書面報告與分享」之流程。在此階段，教師的角色會依據學生能力，慢慢減少干預，擔任引導討論與技術指導工作，掌握學生計畫安排與實際進度是否得宜，並在學生完成報告時協助修改。

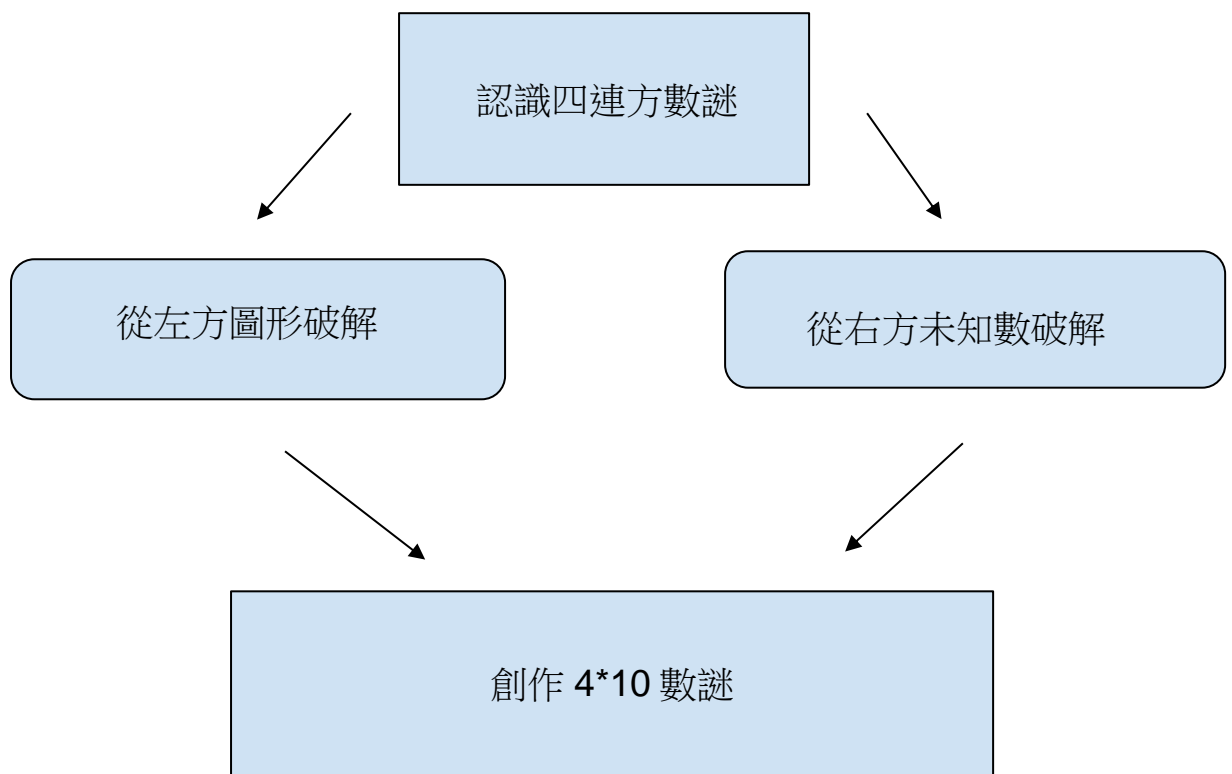
## 第二階段 獨立研究

### 一、研究動機

我們想要找一個研究題目，但是毫無頭緒。有一天，老師讓我們玩桌遊，其中有一個桌遊是「格格不入」，我們對它產生了濃厚的興趣，花了許多時間拼拼湊湊，但想不出怎麼破解這個桌遊。剛好老師在網路上看到一個關於格格不入和四連方的數謎，我們便決定要用它做為研究主題。

### 二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

#### (一)擬定正式研究計畫



#### (二)研究問題

1. 從右方未知數破解
2. 從左方圖形破解
3. 創作四連方數謎

(三)工作進度表

工作項目	九月	十月	十一月	十二月
1. 選擇主題	V			
2. 討論研究架構	V			
3. 從未知數破解		V		
4. 從圖形破解			V	
5. 創造新數謎				V
6. 撰寫研究報告				V

三、彙整相關文獻

(一)題目說明


$$= D \times E \times H$$

$$= A \times B \times J \times P$$

$$= A \times B \times P \times Q$$

$$= F \times F \times L$$

$$= G \times G \times J$$

$$= A \times B \times K \times N$$

$$= C \times M \times M$$

$$= A \times D \times G \times H$$

1. 這是一個由兩組四聯方組成的矩形(5\*8)。
2. 每個解答是由數字 1, 2, 3, 4 組成。
3. 每行是通過將未知數相乘得到的五位數。
4. 每個未知數是小於 100 的質數，且  $A < B < C < D \dots < N < P < Q$ 。

(二)質數：一個大於一的自然數，只有兩個正因數就稱為質數，質數有無限多個。測試一數是否為質數的方法就是將  $n$  除以每個大於一且小於等於  $n$  的平方根之整數  $m$ ，存在一個相除為整數的結果，則  $n$  不是質數；反之則是個質數。

(三)四連方：一種四格骨牌，每塊以四個全等的正方形所組成，四格骨牌屬於平面的圖案，在多連立方中有對應的四連立方或四立方體，是由四個全等的立方體組成。

#### 四、資料分析

(一)從右方未知數破解

1. 找出一百以內的質數：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

2. 因為尾數會出現 2 或 4，而且 A 要最小值，所以  $A=2$

3. 假設  $B=3$ 。

4. 八列算式分析：第三式有兩組極端值，所以數字的可能性比較容易界定範圍，所以從第三式開始破解。

5. 第三列

--	--	--	--	--

$$=A*B*P*Q$$

(1)因字母排序 P、Q 是第 21、22 個，P、Q 的可能性為 73、79、83、89、97。

(2)然後帶入假設的數字：

$$2*3*73*79=34602$$

$$2*3*73*89=38982$$

$$2*3*79*83=39342$$

$$2*3*73*97=42486$$

$$2*3*83*89=44322(\bigcirc)$$

$$2*3*79*89=42186$$

$$2*3*89*97=51798$$

$$2*3*79*97=45978$$

$$2*3*73*83=36354$$

$$2*3*83*97=48306$$

經過計算後可得知符合數字全都是 1、2、3、4 的只有一個，第三列為 44322； $A=2$ ， $B=3$ ， $P=83$ ， $Q=89$ 。

6. 第二列

$$\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} = A*B*J*P$$

(1)  $A*B*J*P = 2*3*J*83 = 498*J$

(2) 因字母排序 J 是第 10 個，所以 J 的可能性為 29、31、37、41、43、47、53。

(3) 然後帶入假設的數字：

$$498*29=14442$$

$$498*43=21414(\bigcirc)$$

$$498*31=15438$$

$$498*47=23406$$

$$498*37=18426$$

$$498*53=26394$$

$$498*41=20418$$

因左方格子，千位和百位數字要不一樣，且數字組合只能是 1、2、3、4，經過計算後可得知符合這兩個條件的只有一個，第二列為 21414；A=2，B=3，J=43，P=83。

#### 7. 第五列

$$\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} = G*G*J$$

(1)  $G*G*J \Rightarrow G*G*43$

(2) 因字母排序 G 是第 7 個，所以 G 的可能性為 19、23、29、31。

(3) 然後帶入假設的數字：

$$19*19*43=15523$$

$$29*29*43=36163$$

$$23*23*43=22747$$

$$31*31*43=41323(\bigcirc)$$

經過計算後，可得知符合數字組成是 1、2、3、4 的只有一個，第五列為 41323；G=31，J=43。

#### 8. 第八列

$$\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} = A*D*G*H$$

(1)  $A*D*G*H = 2*D*31*41 = 2542*D$

(2) 由於 G=31，而且字母排序 D 是第 4 個，所以 D 的可能性為 11、13、17、19。

(3) 然後帶入假設的數字：

$$2542*11=27962$$

$$2542*17=43214$$

$$2542*13=33046$$

$$2542*19=48298$$

經過計算後可得知符合數字組成是 1、2、3、4 的只有一個，第八列為 **43214**；A=2，D=17，G=31，H=41。

#### 9. 第一列

--	--	--	--	--

 =D\*E\*H

$$(1) D*E*H=17*E*41=697*E$$

(2) 因為 D=17，而且 E 的字母順序為第 5 個，所以 E 的可能性為 19、23、29。

(3) 然後帶入假設的數字：

$$697*19=13243$$

$$697*29=20213$$

$$697*23=16031$$

經過計算後可得知符合數字組成是 1、2、3、4 的只有一個，第一列為 **13423**；D=17，E=19，H=41。

#### 10. 第四列

--	--	--	--	--

 =F\*F\*L

(1) 因為已知 E=19，G=31，得  $19 < F < 31$ ，所以 F 的可能性為 23、29。

(2) 因為已知 J=43，且 L 的字母排序，得  $43 < L < 71$ ，所以 L 的可能性為 47、53、59、61、67。

(3) 然後帶入假設的數字：

$$23*23*47=24863$$

$$29*29*47=39527$$

$$23*23*53=28037$$

$$29*29*53=44573$$

$$23*23*59=31211$$

$$29*29*59=49619$$

$$23*23*61=32269$$

$$29*29*61=51301$$

$$23*23*67=35443$$

$$29*29*67=56347$$

經過計算後可得知符合數字組成是 1、2、3、4 的只有一個，第四列為 **31211**；F=23，L=59。

11. 第六列

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} = A * B * K * N$$

(1)  $A * B * K * N = 2 * 3 * K * N = 6 * K * N$

(2) 已知  $43 < K < 59$ ，所以 K 的可能性為 47、53； $61 < N < 79$ ，所以 N 的可能性為 67、71、73。

(3) 然後帶入假設的數字：

$$6 * 47 * 67 = 18894 \qquad 6 * 53 * 67 = 21306$$

$$6 * 47 * 71 = 20022 \qquad 6 * 53 * 71 = 22578$$

$$6 * 47 * 73 = 20586 \qquad 6 * 53 * 73 = 23214$$

經過計算後，可得知符合數字組成是 1、2、3、4 的的只有一個，第六列為 **23214**； $A=2$ ， $B=3$ ， $K=53$ ， $N=73$ 。

12. 第七列

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} = C * M * M$$

(1) 因為若有 5，個位必是 0 或 5，故不合。

(2) 已知  $B=3$ ， $D=17$ ，得  $7 \leq C < 17$ ，所以 C 的可能性為 7、11、13；已知  $L=59$ ， $N=73$ ， $61 \leq M < 73$ ，所以 M 的可能性為 61、67、71。

(3) 然後帶入假設的數字：

$$7 * 61 * 61 = 26047 \qquad 11 * 71 * 71 = 55451$$

$$7 * 67 * 67 = 31423 \qquad 13 * 61 * 61 = 48373$$

$$7 * 71 * 71 = 35287 \qquad 13 * 67 * 67 = 58357$$

$$11 * 61 * 61 = 40931 \qquad 13 * 71 * 71 = 65533$$

$$11 * 67 * 67 = 49379$$

經過計算後，可得知符合數字組成是 1、2、3、4 的的只有一個，第七列為 **31423**； $C=7$ ， $M=67$ 。

(二) 從左列方格破解

1. 分析八列圖形的可能性

(1) 第一列有  $4 * 4 * 3 * 4 * 2 = 384$  種可能性。(因式子沒有 A，所以 \*2)



(2) 第二列有  $4*4*3*4=192$  種可能性。

(因式子只有一個 A，末兩位只能是 14、22、34、42，所以末兩位\*4)

(3) 第三列有  $4*4*3*4=192$  種可能性。

(因式子只有一個 A，末兩位只能是 14、22、34、42，所以末兩位\*4)

(4) 第四列有  $4*4*3*4*2=384$  種可能性。(因式子沒有 A，所以\*2)

(5) 第五列有  $4*3*4*3*2=288$  種可能性。(因式子沒有 A，所以\*2)

(6) 第六列有  $4*2*3*4=96$  種可能性。

(因式子只有一個 A，末兩位只能=14、22、34、42，所以末兩位\*4)

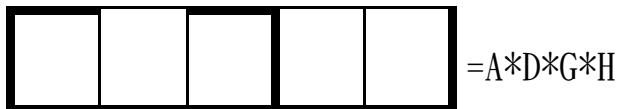
(7) 第七列有  $4*4*4*3*2=384$  種可能性。

(8) 第八列有  $4*3*2*3=72$  種可能性。

(因式子只有一個 A，末兩位只能是 14、34、42，所以末兩位\*3)

(9) 依據上面分析，先算第八列。

## 2. 第八列



(1) 列出 72 種可能性，並進行質因數分解，如下：

- |                    |                    |                     |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| 12314=2*47*131(X)  | 14214=2*3*2369(X)  | 23134=2*11567(X)    |
| 12334=2*7*881(X)   | 14234=2*11*647(X)  | 23142=2*3*.....(X)  |
| 12342=2*3*2057(X)  | 14242=2*7121(X)    | 23414=2*23*509(X)   |
| 12414=2*3*2069(X)  | 14314=2*17*421(X)  | 23434=2*11717(X)    |
| 12434=2*6217(X)    | 14334=2*3*.....(X) | 23442=2*3*.....(X)  |
| 12442=2*6221(X)    | 14342=2*71*101(X)  | 24114=2*3*.....(X)  |
| 13214=2*6607(X)    | 21314=2*10657(X)   | 24134=2*11*1097(X)  |
| 13234=2*13*509(X)  | 21334=2*10667(X)   | 24142=2*12071(X)    |
| 13242=2*3*.....(X) | 21342=2*3*.....(X) | 24314=2*12157(X)    |
| 13414=2*19*353(X)  | 21414=2*3*.....(X) | 24334=2*23*23*23(X) |
| 13434=2*3*.....(X) | 21434=2*7*1531(X)  | 24342=2*3*.....(X)  |
| 13442=2*11*13*47   | 21442=2*10721(X)   | 31214=2*15607(X)    |
| (○)                | 23114=2*7*1651(X)  | 31234=2*7*2231(X)   |

$31242=2*3*.....(X)$	$34214=2*17107(X)$	$42334=2*61*347(X)$
$31414=2*113*139(X)$	$34234=2*17117(X)$	$42342=2*3*.....(X)$
$31434=2*3*.....(X)$	$34242=2*3*.....(X)$	$43114=2*21557(X)$
$31442=2*79*199(X)$	$41214=2*3*.....(X)$	$43134=2*3*.....(X)$
$32114=2*16057(X)$	$41234=2*53*389(X)$	$43142=2*11*37*53$
$32134=2*16067(X)$	$41242=2*17*1213(X)$	$(\bigcirc)$
$32142=2*3*.....(X)$	$41314=2*7*2951(X)$	$43214=2*17*31*41$
$32414=2*19*853(X)$	$41334=2*3*.....(X)$	$(\bigcirc)$
$32434=2*16217(X)$	$41342=2*7*2953(X)$	$43234=2*21617(X)$
$32442=2*3*.....(X)$	$42114=2*3*.....(X)$	$43242=2*3*.....(X)$
$34114=2*37*461(X)$	$42134=2*21067(X)$	
$34134=2*3*.....(X)$	$42142=2*19*1109(X)$	
$34142=2*17071(X)$	$42314=2*21157(X)$	

(2)依上面式子，有  $2*11*13*47$ 、 $2*11*37*53$ 、 $2*17*31*41$  三種可能，目前無法判斷。

(3)等待第六列，得知  $K=53$ ，可刪除  $2*11*37*53$  一個式子，所以只剩下  $2*11*13*47$  和  $2*17*31*41$  兩式。

(4)若第八式= $2*11*13*47$ ，第七式可能= $12413$ 、 $12431$ 、 $32413$ 、 $32431$ 、 $42413$ 、 $42431$ 。

$12413=(\text{質數，不合})$

$32431=7*41*113(X)$

$12431=31*401(X)$

$42413=7*73*83(X)$

$32413=(\text{質數，不合})$

$42431=151*281(X) \rightarrow$  因全部不合

所以第八式只有可能是  $43214=2*17*31*41$ ， $A=2$ 、 $D=17$ 、 $G=31$ 、 $H=41$ 。

### 3. 第六列

					= $A*B*K*N$
--	--	--	--	--	-------------

(1)列出 96 種可能性，並進行質因數分解，如下：

$11214=2*3*7*89$

$11342=2*53*107$

$11242=2*7*11*73$

$11234=2*41*137$

$11322=2*3*17*37$

$11234=2*41*137$

11314=2*5657	21434=2*7*1531	32414=2*19*853
11322= <del>2*3*17*37</del>	22134=2*3*7*17*31	32434=2*16217
11342=2*53*107	22142=2*11071	33122=2*16561
11414=2*13*439	22314=2*3*3719	33142=2*73*227
11422=2*5711	22342=2*11171	33214=2*16607
11434= 2*5717	22414=2*7*1601	33242=2*11*1511
<del>12122=</del> 2*11*19*29	22434=2*3*3739	33422=2*17*983
12134=2*6067	23122=2*11*1051	33414=2*3*5569
12144= 2 <sup>4</sup> *3*11*23	23142=2*3*7*19*29	34122= <del>2*3*11*47</del>
12314=2*47*131	23214= <del>2*3*53*73</del>	34134=2*3*5689
12322= 2*61*101	23242=2*11621	34214=2*17107
12342=2*3*2057	23422=2*7 <sup>2</sup> *239	34234=2 <sup>2</sup> *8581
13122= 2*3 <sup>8</sup>	23414=2*23*509	34314=2*3*7*19*43
13134= 2*3*11*199	24122=2*7*1723	34322=2*131*131
13142= 2*6571	24134=2*11*1097	41234=2*53*389
13214=2*6607	24214=2*12107	41224=2 <sup>3</sup> *5153
13234=2*13*509	24234=2*3*7*557	41322= <del>2*3*71*97</del>
13244=2 <sup>2</sup> *7*11*43	24314=2*12157	41342=2*7*2953
13414=2*19*353	24322=2*12161	41422=2*139*149
13422=2*3*2237	31234= <del>2*7*23*97</del>	41434=2*20717
13434= 2*3*2239	31242=2*3*41*127	42134=2*21067
14122= 2*23*307	31322=2*15661	42142=2*19*1109
14134= 2*37*191	31342=2*15671	42314=2*21157
21234=2*3*3539	31422=2*3*5237	42342=2*3*7057
21242= <del>2*13*19*43</del>	31434=2*3*13 <sup>2</sup> *31	42414=2*3*7069
21322=2*7*1523	32134=2*16067	42434=2*7 <sup>2</sup> *433
21342=2*3*3557	32142=2*3*11*487	43122=2*3*7187
21414= <del>2*3*43*83</del>	32314=2*107*151	43142= <del>2*11*37*53</del>
21422=2*10711	32342=2*103*157	43214= <del>2*17*31*41</del>

$$43242=2*3*7207$$

$$44122=2*13*1697$$

$$44234=2*17*1301$$

$$43414=2*7^2*433$$

$$44134=2*22067$$

$$44314=2*22157$$

$$43422=2*3*7237$$

$$44214=2*3*7369$$

$$44322=2*3*83*89$$

(2) 上列分析，共有 14 式(紅色部分)符合，依據左列格子，中間三個數字不能重複，可扣除 3 式(刪除線)，剩下 11 式。

(3) 因為 B 和 K 中間共使用 7 個未知字母，又可刪除 7 式(雙刪除線)，剩下  $2*3*83*89$  和  $2*3*71*97$  這兩式，考量 N 之後還有兩個未知數(P、Q)，同樣不符合排除，所以第六列是 23214，且  $A=2$ ， $B=3$ ， $K=53$ ， $N=73$ 。

#### 4. 第七列

2	3	2	1	4	=A*B*K*N
					=C*M*M
4	3	2	1	4	=A*D*G*H

(1) 因第八列=43214，第六列=23214，並且第七列沒有 A，所以第七列末四位=1423，萬位可能為 1、3 或 4。

(2) 帶入數字，如下：

$$11423=1*11423(\text{質數，不合})$$

$$31423=7*4489=7*67*67$$

$$41423=23*1801(X)$$

所以第七列是 31423，且  $C=7$ 、 $M=67$ 。

#### 5. 第五列

					=G*G*J
2	3	2	1	4	=A*B*K*N
3	1	4	2	3	=C*M*M

(1) 因為已知第六列、第七列的萬位分別為 2、3，所以第五列有  $2*4*3*2=48$  種可能性。

(2) 列出 48 種可能性，並進行質因數分解，如下：

$14112=2^5 \times 3^2 \times 7^2$	$14331=3 \times 17 \times 281$	$41223=3 \times 7 \times 13 \times 151$
$14113=11 \times 1283$	$14332=2^2 \times 3583$	$41221=1 \times 41221$
$14123=29 \times 487$	$14412=2^2 \times 3 \times 1201$	$41231=1 \times 41232$
$14121=3^3 \times 523$	$14413=7 \times 29 \times 71$	$41232=2^4 \times 3 \times 859$
$14131=13 \times 1087$	$14423=1 \times 14423$	$41312=1 \times 41231$
$14132=2^2 \times 3533$	$14421=3 \times 11 \times 19 \times 23$	$41313=3 \times 47 \times 293$
$14212=2^2 \times 11 \times 17 \times 19$	$14431=1 \times 14431$	$41323=31 \times 31 \times 43$
$14213=61 \times 233$	$14432=2^5 \times 11 \times 41$	$41321=7 \times 5903$
$14223=3 \times 11 \times 431$	$41112=2^3 \times 3^2 \times 571$	$41331=3 \times 23 \times 599$
$14221=1 \times 14221$	$41113=1 \times 41113$	$41332=2^2 \times 10333$
$14231=7 \times 19 \times 107$	$41123=17 \times 41 \times 59$	$41412=2^2 \times 3 \times 7 \times 17 \times 29$
$14232=2^3 \times 3 \times 593$	$41121=3^3 \times 1523$	$41413=1 \times 41413$
$14312=2^2 \times 3533$	$41131=1 \times 41131$	$41423=23 \times 1801$
$14313=3 \times 13 \times 367$	$41132=2^2 \times 7 \times 13 \times 113$	$41421=3 \times 13807$
$14323=1 \times 14323$	$41212=2^2 \times 10303$	$41431=13 \times 3187$
$14321=1 \times 14321$	$41213=1 \times 41243$	$41432=2^3 \times 5179$

(3) 符合 G、G、L 三數條件的只有一個，所以第五列是 **41323**，且  $G=31$ ， $J=43$ 。

### 6. 第三列

$$\boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}} = A * B * P * Q$$

(1) 已知  $A=2$ ， $B=3$ ， $N=73$ ，所以  $A * B * P * Q$  最小值  $= 2 * 3 * 79 * 83 = 39342$ 。

(2) 第三列有  $1 * 3 * 4 * 4 = 48$  種可能性(末兩位只能 = 14、22、34、42)。

(3) 列出 48 種可能性，並進行質因數分解，如下：

$41122=2 \times 29 \times 709$	$41234=2 \times 53 \times 389$	$41342=2 \times 7 \times 2953$
$41134=2 \times 131 \times 157$	$41242=2 \times 17 \times 1213$	$41414=2 \times 20707$
$41142=2 \times 3 \times 6857$	$41314=2 \times 7 \times 13 \times 227$	$41422=2 \times 139 \times 149$
$41214=2 \times 3 \times 6869$	<b><math>41322=2 \times 3 \times 71 \times 97</math></b>	$41434=2 \times 20717$

42122=2*21061	42422=2*21211	43434=2x3x3x19x127
42134=2*21067	42434=2*7*7*433	44122=2x13x1697
42142=2*19*1109	43122=2*3*7187	44134=2x22067
42214=2*21107	43134=2*3*3*19*127	44142=2x3x7x1051
42234=25*3*7039	43142=2*11*37*53	44214=2x3x7369
42242=2*21121	43214=2*17*31*41	44234=2x17x1301
42314=2*21157	43234=2*21617	44242= 2x11x2011
42322=2*7*3023	43242=2*3*7207	44314= 2x22157
42342=2*3*7057	43314=2*3*7219	44322=2x3x83x89
42414=2*3*7069	43322=2*21661	44342=2x22171
42322=2*7*3023	43342=2*3*1667	44414= 2x53x419
42342=2*3*7057	43414=2*7*7*433	44422=2x7x19x167
42414=2*3*7069	43422=2*3*7237	44434=2x13x1709

(4) 因為  $P > N = 73$ ，所以四個當中只有 44322 符合條件，所以第三列是 44322，且  $P=83$ ， $Q=89$ 。

### 7. 第四列

4	4	3	2	2	=A*B*P*Q
					=F*F*L
4	1	3	2	3	=G*G*J

(1) 因第三列、第五列的數字已知，所以第四列有  $3*2*1*1*3=18$  種可能性。

(2) 列出 18 種可能性，並進行質因數分解，如下：

11211=3*37*101	12114=2*3 <sup>2</sup> *673	22113=3 <sup>5</sup> *7*13
11213=1*11213	21211=1*21211	22114=2*11057
11214=2*3 <sup>2</sup> *7*89	21213=3 <sup>2</sup> *2357	31211=23*23*59
12111=3*11*367	21214=2*10607	31213=7 <sup>4</sup> *13
12113=1*12113	22111=1*22111	31214=2*15607

$$32111=163*197$$

$$32113=17*1889$$

$$32114=2*160$$

(3)符合條件的只有一個，所以第四列是 31211，且  $F=23$ ， $L=59$ 。

### 8. 第二列

--	--	--	--	--

 =  $A*B*J*P$

(1)帶入數字，所以第二列是  $21414=2*3*43*83$ 。

### 9. 第一列

--	--	--	--	--

 =  $D*E*H$

(1)因已知其他列的數字，第一列只剩 2 種可能性。

(2)列出 2 種可能性，並進行質因數分解，如下：

$$12343=1*12343$$

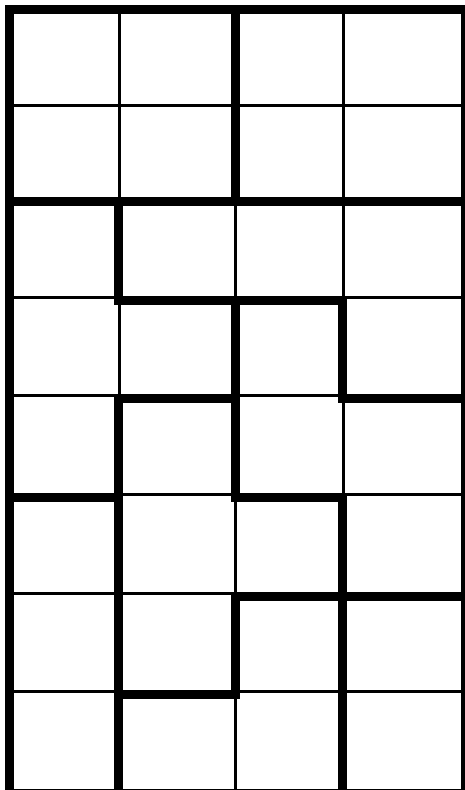
$$13243=17*19*41$$

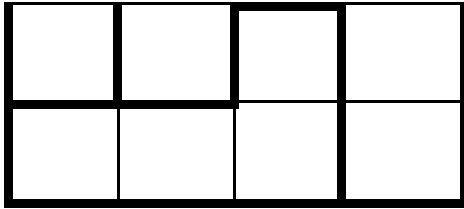
(3) 所以第一列是 13243，且  $D=17$ ， $E=19$ ， $H=41$ 。

### (三)自創新數謎

1. 因為題目是 "8\*5" 的四連方數謎，所以我們想嘗試 "4\*10" 的四連方數謎。

經過拼湊之後，做出如下的長方形拼圖。





2. 將數字"1、2、3、4"排列，可分為數字不重複和數字重複兩種情形，

數字重複： $4*4*4*4=256$

數字不重複： $4*3*2*1=24$

因為時間的關係，所以我們選擇做數字不重複的四連方數謎。

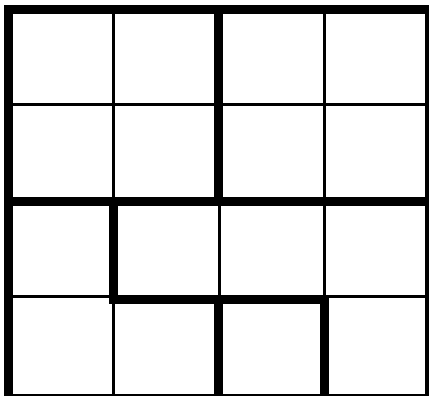
3. 將 24 種可能性數字一一列出並進行質因數分解。

1234=2*617	2341=1*2341	3421=11*311
1243=11*113	2413=19*127	4123=7*19*31
1324=2 <sup>2</sup> *331	2431=11*13*17	4132=2 <sup>2</sup> *1033
1423=1*1423	3124=2 <sup>2</sup> *11*71	4213=11*383
1432=2 <sup>3</sup> *179	3142=2*11*57	4231=1*4231
2134=2*11*97	3214=2*1607	4312=2 <sup>3</sup> *7 <sup>2</sup> *11
2143=1*2413	3241=7*463	4321=29*149
2314=2*13*89	3412=2 <sup>2</sup> *853	

4. 配合四連方的格式，挑選了十個不相同的數。

1324=A <sup>A</sup> *Q	1243=D*M	1342=A*D*I
2431=D*E*F	4312=A <sup>3</sup> *C <sup>A</sup> *D	2134=A*D*L
2314=A*E*K	2413=H*O	
3412=A <sup>A</sup> *853	3421=D*Q	

5. 我們設計的數謎如下：



= A<sup>A</sup>\*Q

= D\*E\*F

= A\*E\*K

= A<sup>A</sup>\*853

(1)這是一個由兩組四聯方組成的矩形(4\*10)。

(2)每個解答是由數字1, 2, 3, 4 組成且數字不重



				= D*M
				= A <sup>3</sup> *C <sup>A</sup> *D
				= H*O
				= D*Q
				= A*D*I
				= A*D*L

複。

(3)每行是通過將未知數相乘得到的四位數。

(4)每個未知數是小於 500的質數，且  $A < B < C < D \dots < N < P < Q$ 。

## 6. 破解

(1)第一式( $A^A * Q$ )

因有個位是偶數，所以  $A=2$ ，而且  $Q < 500$ ，所以  $1000 < A^A * Q < 2000$ 。依照排列第一式四位數可能是 1234、1243、1324、1342、1423、1432，而且是 4 的倍數不是 8 的倍數，所以是 **1324**， $1324=4*331$ ， $Q=331$ 。

(2)第四式( $A^A * 853$ )

因  $A=2$ ，所以  $2*2*853=3412$ ，所以第三式個位=4，十位=1 或 3。

(3)第三式( $A*E*K$ )

四位數可能=1234、2134、2314。

1234=2\*617(質數，不合)

2134=2\*1067=2\*11\*97(可用)

2314=2\*1157=2\*13\*89(可用)→確定千位=2。

(4)第五式( $D*M$ )

由第三式可知第五式的千位=1 和個位=3，第五式可能為 1243、1423。

1243=11\*113(可以)，1423=(質數，不合)，所以  $D=11$ 、 $M=113$ ，第五式=**1243**，由此得知第六式個位=2。

(5)第六式( $A^3 * C^A * D$ )

$A^3 * C^A * 11 = 2^3 * C^2 * 11 = 88 * C^2$

因為 C 為奇數，(個位是 8)\*(4 或 9)=(個位=2)→取 9，C 個位=3 或 7→先用 3、7 和 13。

$$88*3^2=792(X)$$

$$88*7^2=4312(\text{可以})$$

$$88*13^2=14872(\text{太大不合})$$

所以 C=7，第六式=**4312**，由此得知第七式百位=4。

(6) 第九式(A\*D\*I)

已知  $I \leq 89$ ，所以第九式四位數可能性為 1234、1324、2134、2314、3214、3124、1342、1432、3142、3412、4132、4312，其中 1342、2134、3124、4312 可被 22 除。

$$1342=22*61(\text{可以})$$

$$3124=22*142(\text{太大不合})$$

$$2134=22*97(\text{太大不合})$$

$$4312=22*196(\text{太大不合})$$

**I=61**，第九式=1342→第十式個位=4。

(7) 第二式(D\*E\*F)

第二式可能=2413、2431、4213、4231，其中 2431、4213 可被 11 整除。

$$2431=11*221=11*13*17。$$

4213=11\*383(質數，不合)→E=13、F=17，所以第二式=**2431**，第三式=**2314**=2\*13\*89，**K=89**。

(8) 第十式(A\*D\*L)

$$A*D*L=2*11*L=22L, 89 < L < 113。$$

四位數可能=1234、1324、2134、2314、3124、3214，其中 2134、3124 可被 22 整除。

$$2134=22*97$$

3124=22\*142(太大不合)→L=97、第十式=**2134**。

(9) 第七式(H\*O)

$$17 < H < 61, 113 < O < 331。$$

四位數可能=2413、3421。

$$2413=19*127$$

3421=11\*311→取 2413=19\*127→H=19、Y=127，第七式四位數=**2413**。

(10)第八式(D\*P)

第十式四位數可能=3241、3421

3421=11\*311→P=311、第八位四位數=3421。

### 五、研究結果與討論

(一)從右方未知數破解和左方圖形破解的答案是一致的，結果如下：

1	3	2	4	3	=D*E*H	=17*19*41
2	1	4	1	4	=A*B*J*P	=2*3*43*83
4	1	3	2	3	=A*B*P*Q	=2*3*83*89
3	1	2	1	1	=F*F*L	=23*23*59
4	1	3	2	3	=G*G*J	=31*31*43
2	3	2	1	4	=A*B*K*N	=2*3*53*73
3	1	4	2	3	=C*M*M	=7*67*67
4	3	2	1	4	=A*D*G*H	=2*17*31*41

(二)我們創造的新數謎如下：

1	3	2	4	=A <sup>A</sup> *Q	=2 <sup>2</sup> *331
2	4	3	1	=D*E*F	=11*13*17
2	3	1	4	=A*E*K	=2*13*89
3	4	1	2	=A <sup>A</sup> *853	=2 <sup>2</sup> *853
1	2	4	3	=D*M	=11*113

4	3	1	2	=A <sup>3</sup> *C <sup>A</sup> *D	=2 <sup>3</sup> *7 <sup>2</sup> *11
2	4	1	3	=H*O	=19*127
3	4	2	1	=D*Q	=11*311
1	3	4	2	=A*D*I	=2*11*61
2	1	3	4	=A*D*L	=2*11*97

#### 六、評鑑與檢討:上述每一階段的省思與收穫

A 同學：剛開始看到數謎時，我和同學就提出不同的解題方向，我認為可以從左方開始破解，同學認為可以從右方進行，於是我們想試試看，是否兩個方向都可行，所以有了這次的研究；計算過程當中，有時覺得很繁瑣很累，但憑著一股不服輸的精神以及老師的鼓勵，沒想到我們真的完成了這份研究報告，希望參加比賽能獲得好成績。

B 同學：一開始看到數謎時，覺得很複雜，而且左右兩邊都是未知數，覺得這種題目一定解不出來，沒想到認真思考後，我和同學有兩種不同的解題想法，所以就試試看。過程中，右邊的解題方法，我計算得很順利，但換到左邊如用圖形破解時，一直覺得很繁瑣，寫不出來，還好後來有冷靜的思考，耐著性子一一列出各種可能性，反省自己的耐性不足，常會有遺漏，或是推論不正卻，經過這次經驗，讓我了解到自己要更有耐心。

#### 七、參考資料

1. 維基百科-質數 <https://goo.gl/dfkUWk>
2. 維基百科-四格骨牌 <https://goo.gl/2BFWNL>
3. COMMENTARY ON WEEKLY PUZZLES  
<http://mathpuzzle.com/Solution.htm>