

彰化縣 112 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選
作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

國小組

數學類

國中組

自然、科技類

人文社會類

組別： 數 學

作品名稱： 「格」中之魔

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

壹、研究訓練階段

我非常喜歡帶領學生進行「獨立研究」！因為「獨立研究」最重要的功能，就是能夠激發學生的好奇心，進而投入科學研究，並開發潛能的活動。一開始引導學生如何尋找「主題」，鼓勵孩子觀察日常生活中一些有趣的現象，從中找尋有興趣的題材來研究。研究的過程，是最棒的！因為過程中，學生可以培養研究態度與思考力，做中學進而學以致用，且可以增進師生互動。

一、近二年學校獨立研究課程之規畫

I、教學目標

- (1)培養學生主動學習、主動探索知識的態度。
- (2)培養學生蒐集資料、組織知識的能力。
- (3)培養學生自主學習的能力。
- (4)培養學生研究、撰寫研究報告及發表研究成果的能力。

II、教學理念

- (1)讓學生了解他們才是學習的主角，學習態度一定要積極認真、自動自發。
- (2)重視學習歷程，從學習歷程中得到啟發與省思。
- (3)尊重個別差異，提供多元選擇、多元學習的機會。

III、實施方式

(1)時間規畫					(2)課程規畫	(3)授課方式
學年	學期	課程安排	授課節數	學生數	本校提供的獨立研究訓練分為「訓練」及「研究」兩個階段。111學年上學期為訓練階段，教導學生獨立研究必備的基本技能與態度。111學下學期為研究階段，讓學生挑選主題進行研究，並製作簡報，練習口頭發表	訓練階段的進行方式，主要是教師邊講解，學生邊進行實際演練。在研究階段，則讓學生以個人或小組為單位，針對感興趣的主題進行深度探討，教師扮演輔助者的角色，留意學生的學習狀況，適時給予建議。
111	一	抽離	每週兩節	2		
111	二	抽離	每週兩節	2		

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

教學階段	授課單元	授課內容摘要
訓練階段	獨立研究的意義	1. 獨立研究的意義。 2. 研究者須具備的能力與態度。
	研究法簡介	實驗研究、歷史研究、敘述研究法。
	資料蒐集與篩選	1. 認識圖書編目，網路資源及工具書。 2. 參考資料的選擇、歸類與統整。
研究階段	找尋研究主題	找尋 3~5 個主題，分析其可行性，最後從中選擇一個較合適的主題進行研究。
	研究報告撰寫	1. 研究動機與目的。2. 文獻探討。 3. 研究方法。4. 研究結果分析與歸納。 5. 提出結論與建議。6. 作品說明書。
	研究成果發表	1. 簡報製作。2. 口頭發表練習。

貳、研究階段

一、研究動機

在學習的過程中，每個人都可能會接觸到數獨。數獨，為一種益智遊戲，在多宮格內填入適當的數字，條件：在一個九宮格內的數還有同一橫排和直排內的數都不能重複填。因此，只要找出一個漏洞，就可以把它補起來，從這個格子推敲到下一個格子。

另外一種玩法「魔方陣」，當我第一次接觸到時，覺得很新奇！它不同於數獨，只能填入1~9。魔方陣，隨著格數的增加，數字也跟著越大，而每個數在方陣裡都只能出現一次。

初次體驗時，可能需要思考一下…但研究至今，我現在已經有許多破解的方法，針對奇數和偶數各有不同的技巧。於是，那時的我就決定想找出「**自己的方法**」！或許不是最快的，不是最好的，但是裡面是屬於我的想法！

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

A. 擬定正式計畫：

1. 確定研究題目
2. 文獻參考與分析
3. 研究方法（研究新方法！）
4. 分析與討論
5. 結論
6. 撰寫作品書
7. 檢討與評鑑

B. 研究問題：

1. 偶數的魔方陣，還有其他的新方法嗎？
2. 新方法，可以運用在任何偶數的魔方陣中嗎？
3. 這些新方法中，有什麼規律嗎？

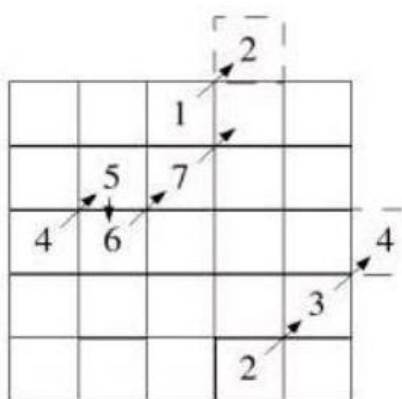
C. 擬定工作進度表：

111 – 112年	9-10月	11-12月	1-2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月
獨立研究認識與態度										
研究法介紹										
確定研究題目										
文獻參考與分析										
研究方法										
分析與討論										
結論										
撰寫「作品說明書」										
檢討與評鑑										

三、文獻探討

A. 魔方陣—方法介紹

(1) 在奇數魔方陣方面 最常見的方法如下：



1. 先將「1」放在第一橫排「正中央列」的位置，接著朝右（左）上走。
2. 當數字超出格子的範圍時，往同一排的最下（方向視情況而定。當數字在最右方，則往最左方走）方填。
3. 當最下方已經有數字時，則是往原先數字的下方走。
4. 若右上方已經有數字時，也是向下走。

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

上圖，為 7x7 的完成圖（朝右上走）。

64	2	3	61	60	6	7	57	260
9	55	54	12	13	51	50	16	260
17	47	46	20	21	43	42	24	260
40	26	27	37	36	30	31	33	260
32	34	35	29	28	38	39	25	260
41	23	22	44	45	19	18	48	260
49	15	14	52	53	11	10	56	260
8	58	59	5	4	62	63	1	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

上圖，為 8x8 完成圖。

- 8x8 魔方陣中，綠色格子部分就是主對角線及副對角線，也就是數字位置該交換並從右下開始排列的地方。
- 在方陣外的數就是該直排或該橫排的總和(260)。
- 當我們實際把數字帶進去時，經過加總計算時，就會知道**兩種方法只能使用在限定的數，並不能交換使用**。

四、資料分析

2	7	6
9	5	1
4	3	8

- 3x3 的魔方陣中把「5」放在中心，接著每個對角線相加都等於 10，在經過排列後，呈現出直、橫、斜相加總和都為 15。
- **我利用這個方法，試著做出 4x4 的魔方陣。**

◆ 新方法(一)

- (1) 第一步，先把 16 個數字分類。
- (2) 中間的藍色部分為 4x4 方陣的**中心**，橘色部分為 4 個**邊角**。紫色的部分則是以 1 和 16 為一組，2 和 15 為一組，3 和 14 為一組，最後 4 和 13 為一組，每組兩數的總和皆為 17
- (3) 分完組後，實際把數字帶入方格中，光是中心就有不同的**排列方法**，省去上下左右顛倒的排法，留下最有可能成功的 4 種，如下圖。

				0					0					0					0	
	7	8		15			7	8	15				7	9	16			7	9	16
	9	10		19			10	9	19				10	8	18			8	10	18
				0					0						0					0
0	16	18	0		0	17	17	0		0	17	17	0		0	15	19	0		0

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

上圖，為 4x4 的分類圖，不同顏色對應到不同區塊。

我認為，選擇四種可能中總和有 17 的那兩組，比較容易成功！

- 畢竟，我的分組也是兩數加總為 17
- 接著，把橘色部分的數帶進去。
- 但是，若像上文說的帶入邊角，不管怎麼調換都不可能成功，因為 5、6、11、12 任兩數都搭配不出 15 和 19 的總和。
- 因此，這四個數放在直排才能使這兩直排總和為 34，也就是我們最後所要的結果。

	6	12		18
	7	8		15
	10	9		19
	11	5		16
0	34	34	0	

左圖，中間兩直排呈現出總和為 34

從上圖，明顯看的出來橫排的總和並不是 17，所以必須調換紫色的分組，兩數加總必須是 16、19、15、18 而不是原來的 17。

上圖中第二橫排，也就是加總為 15 的那排，必須在填兩個數，而這兩數相加為 19，最後總合為 34。

能夠湊成 19 的兩數，只剩 $16+3$ 和 $15+4$ 。而我先試著把 $16+3$ 這組放進格中，接著第三橫排的兩數加總為 19，必須再加上 15，而能夠湊成 15 的也有兩組，分別是 $14+1$ 和 $13+2$ ，把 14 和 1 帶進格中…


卻發現剩下的四個數無論怎麼排列，都無法使四個橫排加總為 34。

	6	12		18
3	7	8	16	34
14	10	9	1	34
	11	5		16
17	34	34	17	

上圖中，剩下的四格，若填入 2、3、13、15，不管怎麼排列都無法使總合為 34。

因此，必須更改前面填入的數字。若把 14 和 1 改為 13 和 2，而 16 和 3 先不動，從下圖結果顯示，四列橫排的總合皆為 34，因此只剩下左右兩個直排。這時，就要變動紫色部分左右兩邊的位置。最左邊那排的總合應加 3，最右邊那排的總合應減 3。

1	6	12	15	34
3	7	8	16	34
13	10	9	2	34
14	11	5	4	34
31	34	34	37	



1	6	12	15	34
16	7	8	3	34
13	10	9	2	34
4	11	5	14	34
34	34	34	34	31

紅色邊框為該橫、直、斜排的總合。

第 2 排和第 4 排的數對調後，橫排和直排都成功了，但是斜排卻沒有，代表這樣的組合還有錯誤。

這時突然想到把左右兩列的數字都左右對調，或許可行。


不過由圖可知，還是差了 1。當 16 和 3 變成了 15 和 4，也還是不可行。最後，還能換的只剩中心了。

15	6	12	1	34
3	7	8	16	34
2	10	9	13	34
14	11	5	4	34
34	34	34	34	35

13	6	12	3	34
4	7	8	15	34
1	10	9	14	34
16	11	5	2	34
34	34	34	34	31

我還是選擇了上面所說，總和有 17 的另外一組。而 5、6、11、12 先暫時不換位置。

	6	12		18
	7	9		16
	10	8		18
	11	5		16
0	34	34	0	15



15	6	12	1	34
2	7	9	16	34
3	10	8	13	34
14	11	5	4	34
34	34	34	34	34

3	6	12	13	34
14	7	9	4	34
15	10	8	1	34
2	11	5	16	34
34	34	34	34	34

上面，為兩種 4x4 模方陣的排列方式。

紫色部分對調後，這兩種排列方法都能使斜排的總和為 34。

◆ 接著把這個分類方法帶入 6x6：

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30
36	35	34	33	32	31

						74
						0
	29	16	22	7		74
	8	17	19	30		74
	9	20	18	27		74
	28	21	15	10		74
						0
0	74	74	74	74	0	74

最外面紫色的是 4x4 沒有做到的部分，所以要試著把數字帶進去。

相同的，8×8 也是把對應的數排列進去：

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

								0
	38	44	50	11	22	37		202
	16	47	30	36	17	49		195
	52	18	31	33	48	13		195
	51	19	34	32	45	14		195
	12	46	35	29	20	53		195
	28	21	15	54	43	27		188
								0
0	197	195	195	195	195	193	0	195

上圖中雖然也是以 6×6 的方法去排列，但是橫排的總和卻不一樣了。因此，當我把其他的數帶進去空格中，都無法使總和相同。

								260
25	62	4	57	24	59	3	26	260
23	38	21	50	11	22	37	58	260
55	16	47	30	36	17	49	10	260
9	52	18	31	33	48	13	56	260
5	51	19	34	32	45	14	60	260
63	12	46	35	29	20	53	2	260
42	28	44	15	54	43	27	7	260
39	1	61	8	41	6	64	40	260
261	260	260	260	260	260	260	259	260

上圖，中藍色的總和兩格相差一。

								260
40	7	5	9	56	59	58	26	260
63	27	53	14	13	49	37	4	260
64	43	20	45	48	17	22	1	260
41	54	29	32	33	36	11	24	260
8	15	35	34	31	30	50	57	260
3	44	46	19	18	47	21	62	260
2	28	12	51	52	16	38	61	260
39	42	60	55	10	6	23	25	260
260	260	260	259	261	260	260	260	260

上圖，中藍色的總和兩格也相差一。

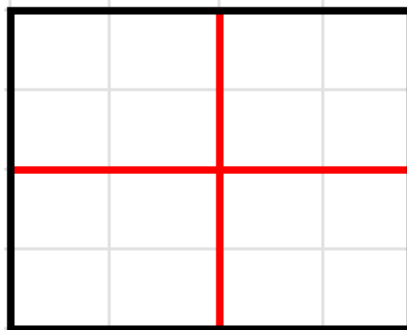
為什麼數字不管怎麼換都無法得到相同的總和？

我覺得是跟上文基本介紹中提到的：4 和 8 都是 4 的倍數，但是中間夾了 6 的方法，導致 8 的魔方陣無法順利完成。

★在我不斷的嘗試方法時，突然想到了另外一個不同的解法，與現在的分類、帶數字完全不一樣。

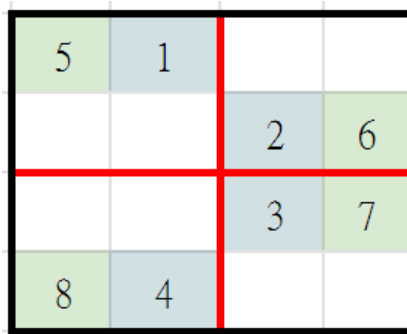
◆ 新方法(二)

在偶數的方格數中，中間都有條對稱軸。



上圖中，紅色的線條為此圖的對稱軸。

1. 首先從**對稱軸左上角**開始，下一格往右下方移動，接著下方遇到另一條對稱軸，直接垂直向下，最後往左下角移動。



2. 當8結束後，9的位置是在對稱軸的另一邊，接下來的的方法與剛才都一樣，只是**上下左右相反**。

				36
5	1	16	12	34
11	15	2	6	34
10	14	3	7	34
8	4	13	9	34
34	34	34	34	32

直排與橫排的總合是 34，但是兩斜邊的總和卻相差 2。

若把這個方法帶入其他的魔方陣，會產生什麼結果呢？

13	7	1	36	30	24	111
23	29	35	2	8	14	111
15	9	3	34	28	22	111
16	10	4	33	27	21	111
20	26	32	5	11	17	111
18	12	6	31	25	19	111
105	93	81	141	129	117	

從 6×6 的魔方陣看出來，直排的總合非常不整齊，這是因為數字分配的不平均。

以正中間兩排來看，4×4 的 1 和 4 在同一排，2 和 3 也在同一排，是平均的。

但是看到 6×6，1、3、4、6 在同一排，2、5 在另一排，最後總和當然差很多。

- ◆ 因此，我改變了排列方法，遇到對稱軸是不直接垂直向下排列，而是跟其他的一樣，往那格的斜下方填。

13	7	1	36	30	24	111
23	29	35	2	8	14	111
15	9	3	34	28	22	111
21	27	33	4	10	16	111
17	11	5	32	26	20	111
19	25	31	6	12	18	111
108	108	108	114	114	114	

上圖，為變更過的 6×6，左邊的總合都比右邊的多 3，同顏色的兩排為對稱的兩排，先以綠色的兩排來分析，兩排最上方的 24 和 13 相差了 11，下一排相差了 9。以此類推：7、5、3、1。3 剛好就是兩排相差的數。因此，把 17 和 20 調換，兩排的總合就為 111。接著藍色那排的最上

方是相差 23，下一排 21、19、17、15、13。而每一排的相差又相差二，

							129
13	7	1	36	30	24	111	
23	29	35	2	8	14	111	
15	9	3	34	28	22	111	
21	27	33	4	10	16	111	
20	11	5	32	26	17	111	
19	25	31	6	12	18	111	
111	108	108	114	114	111	93	

不管數字怎麼換，都無法讓左邊那排加 3，右邊那排減 3。

◆ 因此，6×6 似乎不適合這個方法。

								264
25	17	9	1	64	56	48	40	260
39	47	55	63	2	10	18	26	260
27	19	11	3	62	54	46	38	260
37	45	53	61	4	12	20	28	260
36	44	52	60	5	13	21	29	260
30	22	14	6	59	51	43	35	260
34	42	50	58	7	15	23	31	260
32	24	16	8	57	49	41	33	260
260	260	260	260	260	260	260	260	256

上圖，為 8×8 的完成圖

◆ 8×8 的直排和橫排都可以，斜排則是相差 4，是剛才 4×4 的兩倍。

41	31	21	11	1	100	90	80	70	60	505		
59	69	79	89	99	2	12	22	32	42	505		
43	33	23	13	3	98	88	78	68	58	505		
57	67	77	87	97	4	14	24	34	44	505		
45	35	25	15	5	96	86	76	66	56	505		
46	36	26	16	6	95	85	75	65	55	505		
54	64	74	84	94	7	17	27	37	47	505		
48	38	28	18	8	93	83	73	63	53	505		
52	62	72	82	92	9	19	29	39	49	505		
50	40	30	20	10	91	81	71	61	51	505		
495	475	455	435	415	595	575	555	535	515	500		

上圖的 10×10 橫排的總合都相同，但直排卻不一樣。

最右邊的總合 515 和最左邊的總合 495 相差了 20，左邊必須加 10，右邊必須要減 10，越往內移動，相差的數越大。

												876
61	49	37	25	13	1	144	132	120	108	96	84	870
83	95	107	119	131	143	2	14	26	38	50	62	870
63	51	39	27	15	3	142	130	118	106	94	82	870
81	93	105	117	129	141	4	16	28	40	52	64	870
65	53	41	29	17	5	140	128	116	104	92	80	870
79	91	103	115	127	139	6	18	30	42	54	66	870
78	90	102	114	126	138	7	19	31	43	55	67	870
68	56	44	32	20	8	137	125	113	101	89	77	870
76	88	100	112	124	136	9	21	33	45	57	69	870
70	58	46	34	22	10	135	123	111	99	87	75	870
74	86	98	110	122	134	11	23	35	47	59	71	870
72	60	48	36	24	12	133	121	109	97	85	73	870
870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	864

113	97	81	65	49	33	17	1	256	240	224	208	192	176	160	144	2056
143	159	175	191	207	223	239	255	2	18	34	50	66	82	98	114	2056
115	99	83	67	51	35	19	3	254	238	222	206	190	174	158	142	2056
141	157	173	189	205	221	237	253	4	20	36	52	68	84	100	116	2056
117	101	85	69	53	37	21	5	252	236	220	204	188	172	156	140	2056
139	155	171	187	203	219	235	251	6	22	38	54	70	86	102	118	2056
119	103	87	71	55	39	23	7	250	234	218	202	186	170	154	138	2056
137	153	169	185	201	217	233	249	8	24	40	56	72	88	104	120	2056
136	152	168	184	200	216	232	248	9	25	41	57	73	89	105	121	2056
122	106	90	74	58	42	26	10	247	231	215	199	183	167	151	135	2056
134	150	166	182	198	214	230	246	11	27	43	59	75	91	107	123	2056
124	108	92	76	60	44	28	12	245	229	213	197	181	165	149	133	2056
132	148	164	180	196	212	228	244	13	29	45	61	77	93	109	125	2056
126	110	94	78	62	46	30	14	243	227	211	195	179	163	147	131	2056
130	146	162	178	194	210	226	242	15	31	47	63	79	95	111	127	2056
128	112	96	80	64	48	32	16	241	225	209	193	177	161	145	129	2056
2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2048

上圖，為 16×16 的完成圖，斜邊的總合差為 4×4 差的 4 倍，相差了 8。

145	127	109	91	73	55	37	19	1	324	306	288	270	252	234	216	198	180	2925
179	197	215	233	251	269	287	305	323	2	20	38	56	74	92	110	128	146	2925
147	129	111	93	75	57	39	21	3	322	304	286	268	250	232	214	196	178	2925
177	195	213	231	249	267	285	303	321	4	22	40	58	76	94	112	130	148	2925
149	131	113	95	77	59	41	23	5	320	302	284	266	248	230	212	194	176	2925
175	193	211	229	247	265	283	301	319	6	24	42	60	78	96	114	132	150	2925
151	133	115	97	79	61	43	25	7	318	300	282	264	246	228	210	192	174	2925
173	191	209	227	245	263	281	299	317	8	26	44	62	80	98	116	134	152	2925
153	135	117	99	81	63	45	27	9	316	298	280	262	244	226	208	190	172	2925
154	136	118	100	82	64	46	28	10	315	297	279	261	243	225	207	189	171	2925
170	188	206	224	242	260	278	296	314	11	29	47	65	83	101	119	137	155	2925
156	138	120	102	84	66	48	30	12	313	295	277	259	241	223	205	187	169	2925
168	186	204	222	240	258	276	294	312	13	31	49	67	85	103	121	139	157	2925
158	140	122	104	86	68	50	32	14	311	293	275	257	239	221	203	185	167	2925
166	184	202	220	238	256	274	292	310	15	33	51	69	87	105	123	141	159	2925
160	142	124	106	88	70	52	34	16	309	291	273	255	237	219	201	183	165	2925
164	182	200	218	236	254	272	290	308	17	35	53	71	89	107	125	143	161	2925
162	144	126	108	90	72	54	36	18	307	289	271	253	235	217	199	181	163	2925
2907	2871	2835	2799	2763	2727	2691	2655	2619	3231	3195	3159	3123	3087	3051	3015	2979	2943	

上圖，為 18×18 的完成圖，與上面不是 4 的倍數的魔方陣有相同的規律，兩排相對的數總和差的相差都是 36。

181	161	141	121	101	81	61	41	21	1	400	380	360	340	320	300	280	260	240	220	4010
219	239	259	279	299	319	339	359	379	399	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182	4010
183	163	143	123	103	83	63	43	23	3	398	378	358	338	318	298	278	258	238	218	4010
217	237	257	277	297	317	337	357	377	397	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184	4010
185	165	145	125	105	85	65	45	25	5	396	376	356	336	316	296	276	256	236	216	4010
215	235	255	275	295	315	335	355	375	395	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186	4010
187	167	147	127	107	87	67	47	27	7	394	374	354	334	314	294	274	254	234	214	4010
213	233	253	273	293	313	333	353	373	393	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188	4010
189	169	149	129	109	89	69	49	29	9	392	372	352	332	312	292	272	252	232	212	4010
211	231	251	271	291	311	331	351	371	391	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	4010
210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	4010
192	172	152	132	112	92	72	52	32	12	389	369	349	329	309	289	269	249	229	209	4010
208	228	248	268	288	308	328	348	368	388	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	4010
194	174	154	134	114	94	74	54	34	14	387	367	347	327	307	287	267	247	227	207	4010
206	226	246	266	286	306	326	346	366	386	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	4010
196	176	156	136	116	96	76	56	36	16	385	365	345	325	305	285	265	245	225	205	4010
204	224	244	264	284	304	324	344	364	384	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197	4010
198	178	158	138	118	98	78	58	38	18	383	363	343	323	303	283	263	243	223	203	4010
202	222	242	262	282	302	322	342	362	382	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	4010
200	180	160	140	120	100	80	60	40	20	381	361	341	321	301	281	261	241	221	201	4010
4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4010	4000

上圖，為 20×20 的魔方陣，斜邊的總和相差了 2 的 5 倍。

221	199	177	155	133	111	89	67	45	23	1	484	462	440	418	396	374	352	330	308	286	264	5335
263	285	307	329	351	373	395	417	439	461	483	2	24	46	68	90	112	134	156	178	200	222	5335
223	201	179	157	135	113	91	69	47	25	3	482	460	438	416	394	372	350	328	306	284	262	5335
261	283	305	327	349	371	393	415	437	459	481	4	26	48	70	92	114	136	158	180	202	224	5335
225	203	181	159	137	115	93	71	49	27	5	480	458	436	414	392	370	348	326	304	282	260	5335
259	281	303	325	347	369	391	413	435	457	479	6	28	50	72	94	116	138	160	182	204	226	5335
227	205	183	161	139	117	95	73	51	29	7	478	456	434	412	390	368	346	324	302	280	258	5335
257	279	301	323	345	367	389	411	433	455	477	8	30	52	74	96	118	140	162	184	206	228	5335
229	207	185	163	141	119	97	75	53	31	9	476	454	432	410	388	366	344	322	300	278	256	5335
255	277	299	321	343	365	387	409	431	453	475	10	32	54	76	98	120	142	164	186	208	230	5335
231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	474	452	430	408	386	364	342	320	298	276	254	5335
232	210	188	166	144	122	100	78	56	34	12	473	451	429	407	385	363	341	319	297	275	253	5335
252	274	296	318	340	362	384	406	428	450	472	13	35	57	79	101	123	145	167	189	211	233	5335
234	212	190	168	146	124	102	80	58	36	14	471	449	427	405	383	361	339	317	295	273	251	5335
250	272	294	316	338	360	382	404	426	448	470	15	37	59	81	103	125	147	169	191	213	235	5335
236	214	192	170	148	126	104	82	60	38	16	469	447	425	403	381	359	337	315	293	271	249	5335
248	270	292	314	336	358	380	402	424	446	468	17	39	61	83	105	127	149	171	193	215	237	5335
238	216	194	172	150	128	106	84	62	40	18	467	445	423	401	379	357	335	313	291	269	247	5335
246	268	290	312	334	356	378	400	422	444	466	19	41	63	85	107	129	151	173	195	217	239	5335
240	218	196	174	152	130	108	86	64	42	20	465	443	421	399	377	355	333	311	289	267	245	5335
244	266	288	310	332	354	376	398	420	442	464	21	43	65	87	109	131	153	175	197	219	241	5335
242	220	198	176	154	132	110	88	66	44	22	463	441	419	397	375	353	331	309	287	265	243	5335
5313	5269	5225	5181	5137	5093	5049	5005	4961	4917	4873	5797	5753	5709	5665	5621	5577	5533	5489	5445	5401	5357	5324

上圖，為 22×22 魔方陣的完成圖，直排總和對應到相同顏色的方格，每個相同顏色的方格裡的兩數差，與旁邊的的差相減，結果都為 44，與上面的結果一樣，都有規律的。

265	241	217	193	169	145	121	97	73	49	25	1	576	552	528	504	480	456	432	408	384	360	336	312	6924
311	335	359	383	407	431	455	479	503	527	551	575	2	26	50	74	98	122	146	170	194	218	242	266	6924
267	243	219	195	171	147	123	99	75	51	27	3	574	550	526	502	478	454	430	406	382	358	334	310	6924
309	333	357	381	405	429	453	477	501	525	549	573	4	28	52	76	100	124	148	172	196	220	244	268	6924
269	245	221	197	173	149	125	101	77	53	29	5	572	548	524	500	476	452	428	404	380	356	332	308	6924
307	331	355	379	403	427	451	475	499	523	547	571	6	30	54	78	102	126	150	174	198	222	246	270	6924
271	247	223	199	175	151	127	103	79	55	31	7	570	546	522	498	474	450	426	402	378	354	330	306	6924
305	329	353	377	401	425	449	473	497	521	545	569	8	32	56	80	104	128	152	176	200	224	248	272	6924
273	249	225	201	177	153	129	105	81	57	33	9	568	544	520	496	472	448	424	400	376	352	328	304	6924
303	327	351	375	399	423	447	471	495	519	543	567	10	34	58	82	106	130	154	178	202	226	250	274	6924
275	251	227	203	179	155	131	107	83	59	35	11	566	542	518	494	470	446	422	398	374	350	326	302	6924
301	325	349	373	397	421	445	469	493	517	541	565	12	36	60	84	108	132	156	180	204	228	252	276	6924
300	324	348	372	396	420	444	468	492	516	540	564	13	37	61	85	109	133	157	181	205	229	253	277	6924
278	254	230	206	182	158	134	110	86	62	38	14	563	539	515	491	467	443	419	395	371	347	323	299	6924
298	322	346	370	394	418	442	466	490	514	538	562	15	39	63	87	111	135	159	183	207	231	255	279	6924
280	256	232	208	184	160	136	112	88	64	40	16	561	537	513	489	465	441	417	393	369	345	321	297	6924
296	320	344	368	392	416	440	464	488	512	536	560	17	41	65	89	113	137	161	185	209	233	257	281	6924
282	258	234	210	186	162	138	114	90	66	42	18	559	535	511	487	463	439	415	391	367	343	319	295	6924
294	318	342	366	390	414	438	462	486	510	534	558	19	43	67	91	115	139	163	187	211	235	259	283	6924
284	260	236	212	188	164	140	116	92	68	44	20	557	533	509	485	461	437	413	389	365	341	317	293	6924
292	316	340	364	388	412	436	460	484	508	532	556	21	45	69	93	117	141	165	189	213	237	261	285	6924
286	262	238	214	190	166	142	118	94	70	46	22	555	531	507	483	459	435	411	387	363	339	315	291	6924
290	314	338	362	386	410	434	458	482	506	530	554	23	47	71	95	119	143	167	191	215	239	263	287	6924
288	264	240	216	192	168	144	120	96	72	48	24	553	529	505	481	457	433	409	385	361	337	313	289	6924
6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6924	6912

上圖為 24×24 的魔方陣，直排、橫排加總為 6924，兩斜排的相差為 2 的 6 倍。

五、研究結果與討論

(I)、新方法

從 4×4 到 24×24 的偶數魔方陣排列中，我使用了兩種方法，因而發現了一些規則：

◆ 方法 1

- (1) 將數字分類，每一個類別中，兩數為一組，每組的加總相同。
- (2) 將每組數字帶入其相對位置，若符合則保留，不符則更改。
- (3) 在 4×4 ，4 格中心位置及對應數字由小到大

依序為左上 → 右下 → 右上 → 左下。

- (4) 上下兩邊塊為分類裡的一組。
- (5) 更改原分組，使左右邊塊及角塊的數達到直橫斜加總相同。

4×4 魔方陣完成後，同樣將 6×6 分組，並對照 4×4 ，把數帶入。在過程中，不斷的嘗試帶入不同方法，發現新的組合，並適時的調整，使每排達到平均。

◆ 方法 2

- (1) 從偶數魔方陣的對稱軸左(右)邊開始，往右下(左下)移動，
接著再往右下(左下)，每次的方向都相反。
- (2) 直到往下到最後一橫排，再回到上一排的外側(左右邊)繼續。
- (3) 當來到方格中的最左下角(右下角)，下一格數就往它的對稱方向。
- (4) 從最外側的右下(左下)開始，往最外側的左上(右上)移動，
接著再往右上(左上)。
- (5) 直到往上到上橫排，再回到上一排的內側(左右邊)。

◆ 分析與討論：

第 2 個方法，在數字總和的方面有相同的規律。

- 4 的倍數的魔方陣直橫都相同，唯獨斜的不一樣。
- 4×4 兩斜排與平均值都相差 2，8×8 則相差 4。
- 由此可知，一個 n×n 的魔方陣(n 的條件為不為 0 且是 4 的倍數)斜邊差為 $2(n\div 4)$ 。
- 若不為 4 的倍數的魔方陣，僅有一斜排或一橫排會達到平均，另外一排的總和會有規律的不同。

41	31	21	11	1	100	90	80	70	60	505
59	69	79	89	99	2	12	22	32	42	505
43	33	23	13	3	98	88	78	68	58	505
57	67	77	87	97	4	14	24	34	44	505
45	35	25	15	5	96	86	76	66	56	505
46	36	26	16	6	95	85	75	65	55	505
54	64	74	84	94	7	17	27	37	47	505
48	38	28	18	8	93	83	73	63	53	505
52	62	72	82	92	9	19	29	39	49	505
50	40	30	20	10	91	81	71	61	51	505
495	475	455	435	415	595	575	555	535	515	500
-10	-30	-50	-70	-90	90	70	50	30	10	

- 圖中，直排最右方比平均值多 10，最左方比平均值少 10，左邊第 2 排與右邊第 2 排也是。
- 每一排差的差又都相同，而中央的兩排則是相反數的關係。

10×10 相差的差為 20，14×14 為 28，18×18 為 36，22×22 為 44...

因此推論，一個 n×n 的魔方陣(n 的條件為不為 0 且不是 4 的倍數)

→ 每排總和差的相差為二分之 n，且正中間兩排的差的相差為相反數。

六、評鑑與檢討

從上方的研究中發現了**許多規律**。

第一種方法只有帶到 6×6 ，而在 8×8 的魔方陣中卡關了很久，一直無法得到期望的結果。

在最關鍵的時刻，靈光一閃的一個想法，帶來後續的結果。儘管這個方法無法讓所有的結果都滿足，但也是一種發現。

我認為這是一個很大的收穫，從剛開始對於這個題目感到困惑，不知該如何研究，到現在，**清楚的知道所有方法帶來的結果及其規律**。

七、參考資料

1. [常見程式演算 :: \$2\(2N+1\)\$ 魔方陣](#)
2. [常見程式演算 :: \$4N\$ 魔方陣](#)
3. [數獨的另類玩法！ - 科學月刊 Science Monthly](#)
4. [常見程式演算 :: 奇數魔方陣](#)
5. [魔方陣 Magic Square | 羊羽手札](#)