彰化縣108學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

組別：

□國小高年級組

（四、五、六年級）

■國中組

■數學類

□自然與生活科技類

□人文社會類

作品名稱：探討奇偶個數字的中位數與平均數之穩定狀態

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予評審並退件。

彰化縣108學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（內文）

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

獨立研究是資優教育具特色的一環，參與獨立研究作品甄選更是本校推動科學教育、語文教育中的一項活動。本校的獨立研究課程分成語文與數理兩類提供通過語文組、數理組及一般智能組學生修習；在老師引導下，透過獨立研究過程的學習，訓練學生蒐集資料、分析資料、統整與發表之能力；並培養學生對研究領域之專精化程度與深入研究之精神。

(一)抽離式資優班課程中設立獨立研究、專題研究等相關課程:

七年級時讓資優生找出小組或個人感興趣的主題，進行研究。八年級時將更加強調研究之完整性，檢視報告進行充實與修改，增進研究報告撰寫與發表之能力。近幾年更將新興科技的智能車創作融入於課程中，提升學生的創作力；此外，輔導室亦會於每年寒暑假皆會辦理資優生的增能營隊。

(二)對一般學生辦理研究性社團:

本校利用社團活動時間及週六上午時間成立研究性社團(科展、獨立研究、網界博覽會、機器人程式語言、…)，延聘校內外專業、有經驗的老師，以團隊方式共同規劃、開辦相關研習課程。本校師生近幾年亦相當踴躍投入縣內辦理之獨立研究競賽，數學、自然與生活科技及人文社會類均曾獲獎，得獎學生會利用社團時間進行經驗分享與傳承。

(三)教師增能研習:

邀請獨立研究、科展相關領域教授、專家蒞校進行獨立研究、科展的講座，期待透過指導老師的增能研習，能有更好的能力與方式帶領學生深入探究、分析每一個議題。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

資優資源班的課程透過系統化的設計，讓學生從瞭解主題方向的擬定、資料的收集、問題的設定、資料的分析技巧、內容編輯…等，以培養學生探究的能力。無論是資優資源班學生或是一般生，只要有興趣者，指導老師會透過密集的引導、時間規劃的安排、小組協調，讓參與的學生能夠自主性地完成相關研究內容。針對資源不足之處，則由老師對外尋求協助，待作品完成後，協助學生製作簡報、訓練發表的技巧，讓學生從整個歷程中學到不少解決問題的能力。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

在國三課程機率與統計單元中，介紹了三個集中量數:算數平均數、中位數及眾數；其中數列的平均數易受到極端值影響，導致所得數值可能失去真實性與代表性，我們在報導中看到這則資訊:全國平均月薪為5萬元，但實際上大多數工作族群並未得到這樣的薪資待遇。取而代之的中位數就來得重要許多，中位數是和位置有關的數值，N項數列經過排序後在正中央的數值(數列為偶數項則取第$\frac{N}{2}$、$\frac{N}{2}+1$項之平均)。在龍騰數亦優23期動手玩數學專欄中一道中位數與平均數的遊戲。給定三個已知數，例如：$a_1 = 53, a_2 = 13, a_3 = 41$，此三個數的中位數是41。如果想讓53,13,41,a_4這四個數的平均數等於前三個數的中位數41，那麼a_4必須滿足

$$\frac{53+13+41+a_4}{4} = 41 \Rightarrow a_4 = 57。$$

若繼續想要讓 53,13,41,57 的中位數$\frac{41+53}{2} = 47$與 53,13,41,57,a_5的平均數相等，那麼a_5必須滿足

$$\frac{53+13+41+57+a_5}{5} = 47 \Rightarrow a_5 = 71。$$

如果這樣繼續下去，讓前 k 項$53,13,41,57,\cdots,a_k$的中位數與前 k+1 項$53,13,41,57,\cdots,a_k,a_{k+1}$的平均數相等，那麼可以得到一個數列$\langle a_n \rangle$，不

禁讓我們對此數列產生高度的好奇，在此規則運算下，數列是否存在一定的規律?中位數與平均數最後是否趨於一致?原數列三數間的關係又會如何影響此數列的變化呢?於是開啟我們的研究之路。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一)擬定正式計畫、研究問題

1. 利用一次加入 2 個相同數字，觀察中位數與平均數的變化與穩定情形。
2. 利用一次加入 4、6、3、5 個相同數字，觀察中位數與平均數的變化與穩定情形。

(二)工作進度表

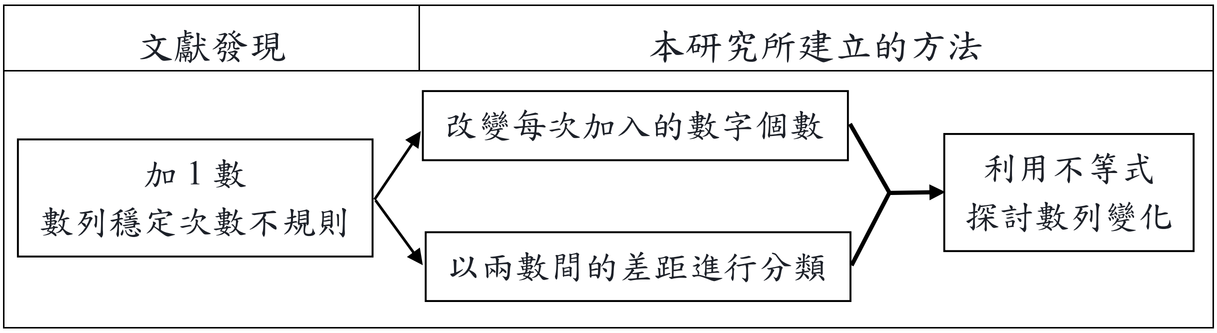
預定進度甘梯圖	8/15 | 8/31	9/1 | 9/15	9/16 | 9/31	10/1 | 10/15	10/16 | 10/30	11/1 | 11/7	11/8 | 11/15	11/16 | 11/23
擬定研究問題	■							
尋找資源	■	■						
文獻整理與討論		■	■					
討論初步研究發現			■	■				
深入探討研究問題				■	■	■		
提出研究結果						■	■	
歸納研究結果							■	■
進度累計（%）	10	20	35	50	70	80	90	100

三、彙整相關文獻

在 105 學年度台中市中小學科學展覽高中組作品《均中求穩》一文中利用 Excel 的統計指令快速求得數列的各項數值的變化規則，試圖探討數列中位數與平均數最後是否會相同?雖然此文獻從大量數據中，找出某些數列的變化關係，例如:原數列a_1, a_2, a_3間如果成線性變化，穩定值也會成線性變化；原數列為(1, 1+k, 1+k)~(1, 1+k, 2k+1)間，穩定值有對稱的情形發生。但可惜的是文獻並未針對為何不同數列間

的穩定次數呈現不規則變化的情形說明原因，也未提出是否能從原數列前三項就能找出最終穩定值的數學模式。基於這些原因，本研究發現會影響到最後穩定值與穩定次數的原因有兩個：其中一個是**原數列三數間的差距比例**；另一個是**中位數的取值方式**，當數列一次加入一數時，將使數列產生奇、偶個數不停變動的情形，當數列是偶數項時，中位數取第 $\frac{N}{2}$、$\frac{N}{2}+1$ 項之平均，此時中位數是虛擬值(並未真正出現出現在數列中)，一旦加入一新數後，此虛擬中位數即消失，也因此導致原數列的穩定值與穩定次數無法找出一般式。

於是本研究試想以**加入偶數個相同數**來固定數列為奇數項，讓中位數皆為數列排序後正中央的數值，企圖改善文獻數列變化的不規則，並從數列每一項所落在的範圍，推測數列的變化情形與原數列**兩數間的差距**有關，嘗試利用**不等式找範圍**，探討數列的變化情形。



四、資料分析

(一) 名詞與符號釋義

1. **穩定**:假設原數列 $a_1=2, a_2=5, a_3=5$，根據 $\boxed{\text{數列前 k 項的中位數=數列前 k+1 項的平均數}}$ 之運算規則，我們依序可以求得 $a_4, a_5, a_6, \cdots$ 的值如下:

Step1. $\frac{2+5+5+a_4}{4}=5 \Rightarrow a_4=5\times4-(2+5+5)=8$。

將數列由小到大排列2,5,5,8的中位數為 $\frac{5+5}{2}=5$。

Step2. $\frac{2+5+5+8+a_5}{5}=5 \Rightarrow a_5=5\times5-(2+5+5+8)=5$。

將數列由小到大排列2,5,5,5,8的中位數為5。

Step3. $a_6 = 5 \times 6 - (2+5+5+5+8) = 5$。

往後依照相同的規則運算得到數列 2,5,5,8,5,5,5,5,⋯，所以我們可以得知$a_7 = a_8 = 5$，且$k \geq 5$的a_k值皆為 5 達到穩定，此即為本研究數列穩定的意思。而在本研究中的「一次穩定」代表原數列在加入第一組相同數字後，使$\boxed{\text{新數列的平均數=原數列的中位數}}$，爾後再加入的二、三⋯組相同數字皆等於第一組相同數字即為「一次穩定」;「n 次穩定」代表原數列在加入第 n 組相同數字後，使$\boxed{\text{新數列的平均數=原數列的中位數}}$，爾後再加入的 n+1、n+2⋯組相同數字皆等於第 n 組相同數字即為「n 次穩定」。***a*、*b*、*c***指未加入數字前，原數列的三個數值。

2. $\boldsymbol{Q_i}$:指加入的第 i 組數字，能使數列達到穩定，經規則運算不再變動，此時稱所加入的數字為穩定值Q_i。例如:Q_1代表加入的第 1 組數字，能使數列達到穩定，此時稱此數字為穩定值Q_1。
3. $\boldsymbol{x_i}$:指在原數列中所加入的第 i 組數字。例如: x_1代表在原數列中所加入的第 1 組數字。
4. $\boldsymbol{Md_i}$:指加入第 i 組數字後，數列的中位數。例如:Md_0代表加入第 0 組數字後，數列的中位數，此即原始數列的中位數；Md_1代表加入第 1 組數字後，數列的中位數。

(二) 利用一次加入相同 2 數，找出數列的穩定狀態

在原文獻中，我們發現數列在加入 1 個數時，會產生數列奇、偶個數不停改變的情況，當數列為偶數項時，中位數為一虛擬數值，不存在於數列中，再加入 1 個數後，前一步驟求得的數列中位數即消失。此情況下，藉由 Excel 計算公式 MEDIAN(B$1:B3)*$A4-SUM(B$1:B3)輔助，我們可以從數據資料(如圖 4-2-1)清楚觀察到:

①當原數列(1,2,2)有兩數相等時，第一次加入$x_1 = 3$，數列為(1,2,2,3)未達穩定；但在第二次加入$x_2 = 2$後，即能使數列達穩定狀態，爾後只要加入 2 皆能使數列保持穩定，故我們稱此數列為二次穩定。

②當原數列(1,2,3)成等差時，第一次加入數字$x_1 = 2$，即能使數列達到穩定狀態，我們稱此數列為一次穩定。

③當原數列三數間的差距大於1:2時，例如:數列(1,2,14)甚至要到加入的第 196 組數字後才能達到穩定，可知中位數受數列奇、偶個數的影響，導致數列穩定次數並不具有規律。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
5	2	2	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
6	2	2	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
7	2	2	1	-2.5	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25	-4.25
8	2	2	1	-3.5	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75	-5.75
9	2	2	1	-2.25	-2.75	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
10	2	2	1	-2.75	-3.25	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
11	2	2	1	-6	-3.75	-4.25	-9.75	-15.25	-16.63	-16.63	-16.63	-16.63	-16.63	-16.63	-16.63
12	2	2	1	-7	-4.25	-4.75	-11.25	-17.75	-19.38	-19.38	-19.38	-19.38	-19.38	-19.38	-19.38
13	2	2	1	-6.375	-9.625	-16.63	-11.13	-5.625	-9.125	-9.125	-9.125	-9.125	-9.125	-9.125	-9.125
14	2	2	1	-7.125	-10.88	-18.88	-12.38	-5.875	-9.875	-9.875	-9.875	-9.875	-9.875	-9.875	-9.875
15	2	2	1	-4.125	-6.5	-4.25	-9.875	-9.875	-5	-10.63	-10.63	-10.63	-10.63	-10.63	-10.63
16	2	2	1	-4.375	-7	-4.25	-10.63	-10.63	-5	-11.38	-11.38	-11.38	-11.38	-11.38	-11.38
17	2	2	1	-4.625	-7.5	-4.25	-11.38	-10.31	-5	-7.875	-7.875	-7.875	-7.875	-7.875	-7.875
18	2	2	1	-4.875	-8	-4.25	-12.13	-10.94	-5	-8.125	-8.125	-8.125	-8.125	-8.125	-8.125
19	2	2	1	-9.875	-8.5	-4.25	-8.125	-6.813	-5	-6	-15.5	-23.81	-23.81	-23.81	-23.81
20	2	2	1	-10.63	-9	-4.25	-8.375	-6.938	-5	-6	-16.5	-25.69	-25.69	-25.69	-25.69
21	2	2	1	-10.06	-4.25	-4.25	-28.31	-7.063	-5	-6	-16.19	-9.188	-10.5	-10.5	-10.5
35	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-13.31	-9.5	-5	-6	-17.56	-15.03	-11.72	-21.69	-17.56
36	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-13.44	-9.625	-5	-6	-17.94	-15.34	-11.78	-22.31	-17.94
37	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-27.09	-5	-6	-33.34	-11.61	-11.84	-14.84	-28.72
38	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-28.16	-5	-6	-34.53	-11.7	-11.91	-15.03	-29.66
39	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-10.94	-5	-6	-15	-11.19	-22.94	-14	-14.75
40	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.06	-5	-6	-15.13	-11.25	-23.56	-14.13	-14.88
41	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.19	-5	-6	-57.53	-22.2	-13.3	-27.06	-15
42	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.31	-5	-6	-59.72	-22.8	-13.39	-27.81	-15.13
43	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.44	-5	-6	-17.56	-18.69	-12.81	-15.13	-15.25
44	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.56	-5	-6	-17.69	-19.06	-12.88	-15.25	-15.38
45	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.69	-5	-6	-17.81	-13.81	-12.94	-15.38	-59.09
46	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.81	-5	-6	-17.94	-13.94	-13	-15.5	-61.16
47	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-11.94	-5	-6	-15.13	-12.59	-13.06	-15.63	-17.69
48	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.06	-5	-6	-15.13	-12.66	-13.13	-15.75	-17.81
49	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.19	-5	-6	-15.13	-12.72	-13.19	-41.91	-14.88
50	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.31	-5	-6	-15.13	-12.78	-13.25	-43.09	-14.88
51	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-12.44	-5	-6	-15.13	-11.25	-13.31	-17.19	-14.88
199	2	2	1	-7	-4.25	-4.25	-11.25	-10.94	-5	-6	-15.13	-11.25	-16.45	-23.03	-14.88

原數列三數

所加入的數值

圖 4-2-1 一次加入 1 個數的數列穩定情形

【黃底為數列達穩定的數值】

為改善上述數列奇、偶個數不停變動而影響中位數的情形，故我們試圖將加入數列的數字個數改變為偶數個，來固定數列為奇數項，探究在此新情境下，數列的變化是否具有一定的規則?而在計算數列各數值時，我們發現到所加入的數會受到原數列間差距大小改變其落在的範圍，於是本研究就以原數列間的差距將數列進行分類，嘗試利用不等式找範圍的方式探討數列的變化情形。首先我們就以一次加入

2 個相同數字來進行討論。

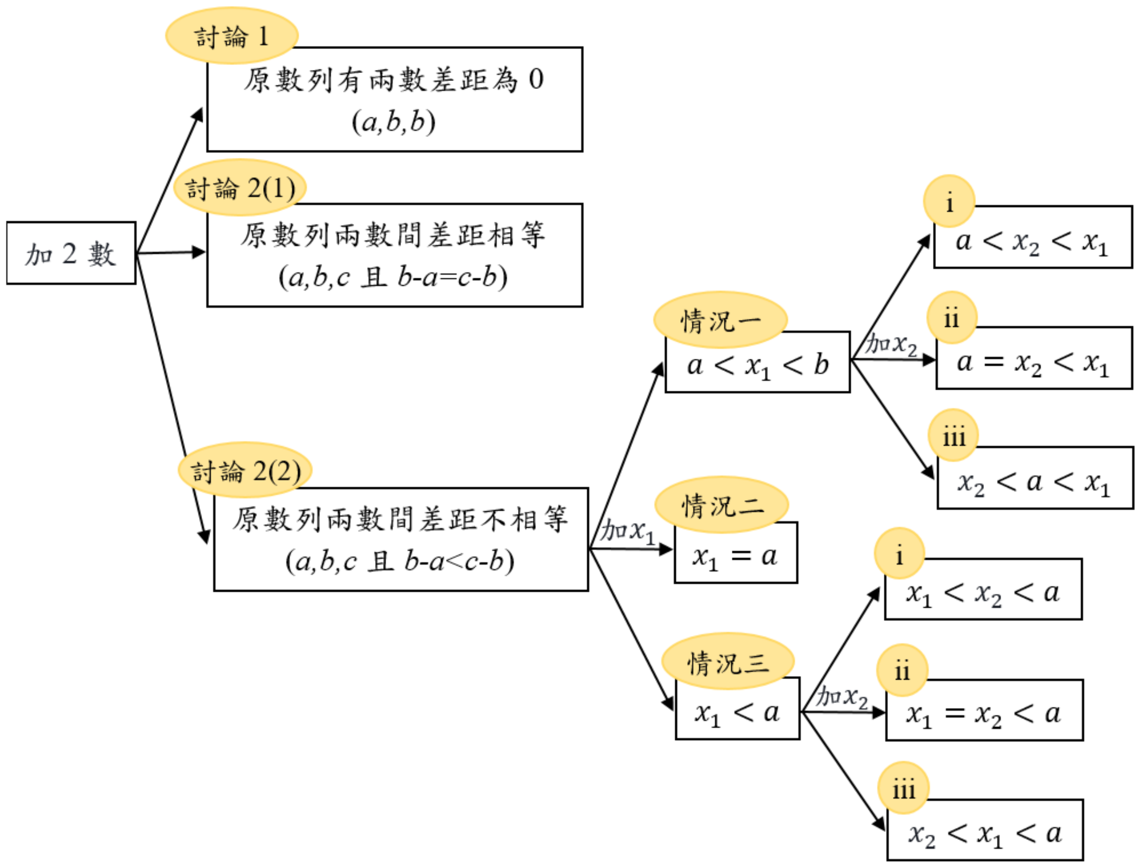
藉由 Excel 計算公式(MEDIAN(B$1:B3)*$A4-SUM(B$1:B3))/2 輔助，我們可以從數據資料(如圖 4-2-2)發現到，數列穩定情形大幅改善，且存在一定的變化規則。於是我們進一步透過下列的代數運算做更深入的探討與整理。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	原數列三數
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
4	2.5	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	Step1 兩數
5	2.5	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	
6	2	2	0.25	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	Step2 兩數
7	2	2	0.25	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	
8	2	2	1.5	1	-1.25	-3.5	-5.75	-8	-10.25	-10.25	-10.25	-10.25	Step3 兩數
9	2	2	1.5	1	-1.25	-3.5	-5.75	-8	-10.25	-10.25	-10.25	-10.25	
10	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	Step4 兩數
11	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	
12	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	Step5 兩數
13	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	
14	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	Step6 兩數
15	2	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	

圖 4-2-2 一次加入 2 個相同數的數列穩定情形

【黃底為數列達穩定的數值】

◆ 討論步驟



1. 原數列$\boldsymbol{a < b = c}$，此時中位數為$\boldsymbol{Md_0 = b}$

①加入 2 個x_1

$$\Rightarrow \frac{a+2b+2x_1}{5} = b$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 5b - (a+2b) = -a+3b$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-a+3b}{2} = \frac{2b+(b-a)}{2} = b + \frac{b-a}{2} > b$$

此時數列為

a、b、b、$\dfrac{-a+3b}{2}$、$\dfrac{-a+3b}{2}$，$Md_1 = b$

②加入 2 個x_2

$$\Rightarrow \frac{a+2b+2x_1+2x_2}{7} = b$$

$\Rightarrow 2x_2 = 7b - (a+2b+2x_1) = 7b - 5b = 2b$，$x_2 = b = Md_1$

此時所加入的x_2即為前一數列的中位數Md_1，故數列為二次穩定，穩定值$Q_2 = b$。

> 原數列(2,4,4)為例，此時$a = 2, b = c = 4$，中位數$Md_0 = 4$。
>
> Step1. $x_1 = \dfrac{-2+3\times 4}{2} = 5 > 4$
>
> 將數列由小到大排列2,4,4,5,5的中位數$Md_1 = 4$。
>
> Step2. $2x_2 = 7\times 4 - (2+2\times 4+2\times 5) = 8 \Rightarrow x_2 = 4 = Md_1$
>
> 所以數列(2,4,4)為二次穩定，穩定值$Q_2 = 4$。

2. 原數列$\boldsymbol{a < b < c}$，此時中位數為$\boldsymbol{Md_0 = b}$

①加入 2 個x_1

$$\Rightarrow 2x_1 = 5b - (a+b+c) = 4b - a - c = 2b + (b-a) - (c-b)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2b+(b-a)-(c-b)}{2}$$

(1) 若$\boldsymbol{b - a = c - b}$(等差數列)，

$x_1 = b = Md_0$，也就是說所加入的x_1為原數列的中位數Md_0，故數列為一次穩定，穩定值$Q_1 = b$。

原數列(2,4,6)為例，此時$a = 2, b = 4, c = 6$，中位數$Md_0 = 4$。

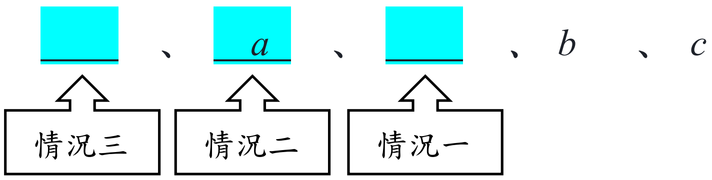
Step1. $x_1 = \dfrac{2 \times 4 + (4-2) - (6-4)}{2} = 4 = Md_0$

所以數列(2,4,6)為一次穩定，穩定值$Q_1 = 4$。

(2) 若$\boldsymbol{b - a < c - b}$

$$x_1 = \frac{4b - a - c}{2} = b + \frac{(b-a) - (c-b)}{2} < b$$

✧ x_1的可能範圍



【情況一】$\boldsymbol{a < x_1 < b}$

$\Rightarrow a < \dfrac{4b - a - c}{2} \Rightarrow 2a < 4b - a - c \Rightarrow 3a < 4b - c$

$\Rightarrow c - b < 3(b - a)$

此時數列為

a、$\dfrac{4b-a-c}{2}$、$\dfrac{4b-a-c}{2}$、b、c，$Md_1 = \dfrac{4b-a-c}{2}$

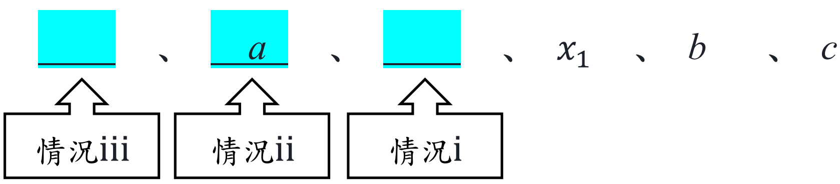
②加入 2 個x_2

$$\Rightarrow 2x_2 = 7\left(\frac{4b-a-c}{2}\right) - 5b = \frac{18b - 7a - 7c}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{18b - 7a - 7c}{4} = \frac{4b + 7(b-a) - 7(c-b)}{4}$$

$$\because x_2 - x_1 = \frac{10b - 5a - 5c}{4} = \frac{5}{4}[(b-a) - (c-b)] < 0 \quad \therefore x_2 < x_1$$

✧ x_2的可能範圍



i. $\boldsymbol{a < x_2 < x_1}$

$\Rightarrow a < \dfrac{18b - 7a - 7c}{4} < \dfrac{4b - a - c}{2}$

$\Rightarrow 4a < 18b - 7a - 7c < 8b - 2a - 2c$

$\Rightarrow \begin{cases} 11a < 18b - 7c \\ 10b < 5a + 5c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(c - b) < 11(b - a) \\ b - a < c - b \end{cases} \Rightarrow 7(c - b) < 11(b - a)$

此時數列為

a、x_2、x_2、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1 = \dfrac{4b - a - c}{2}$

③加入 2 個x_3

$\Rightarrow 2x_3 = 9\left(\dfrac{4b - a - c}{2}\right) - \dfrac{28b - 7a - 7c}{2} = 4b - a - c$

$\Rightarrow x_3 = \dfrac{4b - a - c}{2} = Md_2$

此時所加入的x_3即為前一數列的中位數Md_2，故數列為三次穩定，穩定值$Q_3 = \dfrac{4b - a - c}{2}$。

> 原數列(2,4,7)為例，此時$a = 2, b = 4, c = 7$，中位數$Md_0 = 4$。
>
> Step1. $x_1 = \dfrac{4 \times 4 - 2 - 7}{2} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow 2 < x_1 < 4$
>
> 將數列由小到大排列$2, \dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}, 4, 7$的中位數$Md_1 = \dfrac{7}{2}$。
>
> Step2. $x_2 = \dfrac{18 \times 4 - 7 \times 2 - 7 \times 7}{4} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow 2 < x_2 < x_1$
>
> 將數列由小到大排列$2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}, 4, 7$的中位數$Md_2 = \dfrac{7}{2}$。
>
> Step3. $x_3 = \dfrac{4 \times 4 - 2 - 7}{2} = \dfrac{7}{2} = Md_2$
>
> 所以數列(2,4,7)為三次穩定，穩定值$Q_3 = \dfrac{7}{2}$。

ii. $\boldsymbol{x_2 = a}$

$\Rightarrow \dfrac{18b - 7a - 7c}{4} = a \Rightarrow 7(c - b) = 11(b - a)$

此時數列為

a、a、a、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1 = \dfrac{4b - a - c}{2}$

③加入 2 個x_3

$$\Rightarrow 2x_3 = 9\left(\frac{4b-a-c}{2}\right) - (2a+5b) = \frac{26b-13a-9c}{2}$$

$$= \frac{11(b-a)+15b-2a-9c}{2} = 4b-a-c$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{4b-a-c}{2} = Md_2$$

此時所加入的x_3即為前一數列的中位數Md_2，故數列為三次穩定，穩定值$Q_3 = \frac{4b-a-c}{2}$。

原數列(2,9,20)為例，此時$a=2, b=9, c=20$，中位數$Md_0 = 9$。

Step1. $x_1 = \frac{4\times 9-2-20}{2} = 7 \Rightarrow 2 < x_1 < 9$

將數列由小到大排列2,7,7,9,20的中位數$Md_1 = 7$。

Step2. $x_2 = \frac{18\times 9-7\times 2-7\times 20}{4} = 2$

將數列由小到大排列2,2,2,7,7,9,20的中位數$Md_2 = 7$。

Step3. $x_3 = \frac{4\times 9-2-20}{2} = 7 = Md_2$

所以數列(2,9,20)為三次穩定，穩定值$Q_3 = 7$。

iii. $x_2 < a$

$$\Rightarrow \frac{18b-7a-7c}{4} < a \Rightarrow 7(c-b) > 11(b-a)$$

此時數列為

x_2、x_2、a、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1 = \frac{4b-a-c}{2}$

③加入 2 個x_3

同理，$x_3 = \frac{4b-a-c}{2} = Md_2$

故數列為三次穩定，穩定值$Q_3 = \frac{4b-a-c}{2}$。

原數列$(2,4,8)$為例，此時$a=2, b=4, c=8$，中位數$Md_0=4$。

Step1. $x_1=\dfrac{4\times4-2-8}{2}=3\Rightarrow 2<x_1<4$

將數列由小到大排列$2,3,3,4,8$的中位數$Md_1=3$。

Step2. $x_2=\dfrac{18\times4-7\times2-7\times8}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_2<2$

將數列由小到大排列$\frac{1}{2},\frac{1}{2},2,3,3,4,8$的中位數$Md_2=3$。

Step3. $x_3=\dfrac{4\times4-2-8}{2}=3=Md_2$

所以數列$(2,4,8)$為三次穩定，穩定值$Q_3=3$。

【情況二】$\boldsymbol{x_1=a}$

$\Rightarrow \dfrac{4b-a-c}{2}=a\Rightarrow c-b=3(b-a)$

此時數列為a、a、a、b、c，$Md_1=a$

②加入 2 個x_2

$\Rightarrow 2x_2=7a-(3a+b+c)=4a-b-c$

$\Rightarrow x_2=\dfrac{4a-b-c}{2}=\dfrac{4a-b-(4b-3a)}{2}=\dfrac{7a-5b}{2}<a$

此時數列為

$\dfrac{4b-a-c}{2}$、$\dfrac{4b-a-c}{2}$、a、a、a、b、c，$Md_2=a$

③加入 2 個x_3

$\Rightarrow 2x_3=9a-7a=2a$，$x_3=a=Md_2$

故數列為三次穩定，穩定值$Q_3=a$。

原數列$(2,4,10)$為例，此時$a=2, b=4, c=10$，中位數$Md_0=4$。

Step1. $x_1=\dfrac{4\times4-2-10}{2}=2=a$

將數列由小到大排列$2,2,2,4,10$的中位數$Md_1=2$。

Step2. $x_2=\dfrac{7\times2-5\times4}{2}=-3\Rightarrow x_2<2$

將數列由小到大排列 $-3,-3,2,2,2,4,10$ 的中位數 $Md_2=2$。

Step3. $x_3=2=Md_2$

所以數列 $(2,4,10)$ 為三次穩定，穩定值 $Q_3=2$。

【情況三】$x_1<a$

$$\Rightarrow \frac{4b-a-c}{2}<a\Rightarrow c-b>3(b-a)$$

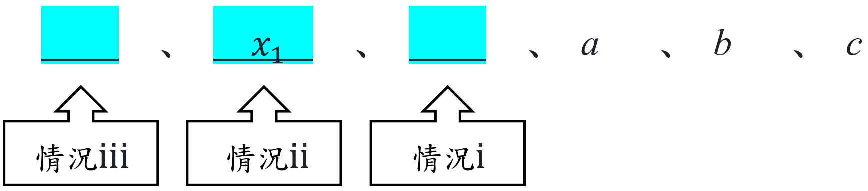
此時數列為

$$\frac{4b-a-c}{2}、\frac{4b-a-c}{2}、a、b、c，Md_1=a$$

②加入 2 個 x_2

$$\Rightarrow 2x_2=7a-5b，x_2=\frac{7a-5b}{2}<a$$

✧ x_2 的可能範圍



i. $x_1<x_2<a$

$$\Rightarrow \frac{4b-a-c}{2}<\frac{7a-5b}{2}\Rightarrow 9b-c<8a\Rightarrow c-b>8(b-a)$$

此時數列為

$$x_1、x_1、x_2、x_2、a、b、c，Md_2=x_2=\frac{7a-5b}{2}$$

③加入 2 個 x_3

$$\Rightarrow 2x_3=9\left(\frac{7a-5b}{2}\right)-7a=\frac{49a-45b}{2}，x_3=\frac{49a-45b}{4}$$

$$\because x_3-x_2=\frac{49a-45b}{4}-\frac{7a-5b}{2}=\frac{35(a-b)}{4}<0\quad \therefore x_3<x_2$$

不管 x_3 在 (i) $x_1<x_3<x_2$、(ii) $x_3=x_1$ 或 (iii) $x_3<x_1$，此時三數列

$$\begin{cases}(\text{i})\,x_1、x_1、x_3、x_3、x_2、x_2、a、b、c\\(\text{ii})\,x_1、x_1、x_1、x_1、x_2、x_2、a、b、c \text{ 的中位數 } Md_3 \text{ 皆為 } x_2\\(\text{iii})\,x_3、x_3、x_1、x_1、x_2、x_2、a、b、c\end{cases}$$

④加入 2 個x_4

$$\Rightarrow 2x_4 = 11\left(\frac{7a-5b}{2}\right) - \frac{63a-45b}{2} = \frac{14a-10b}{2} = 7a-5a$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{7a-5b}{2} = Md_3$$

故數列為四次穩定，穩定值$Q_4 = \frac{7a-5b}{2}$(不受原數列c值影響)。

原數列(2,4,22)為例，此時$a=2, b=4, c=22$，中位數$Md_0 = 4$。

Step1. $x_1 = \frac{4\times4-2-22}{2} = -4 \Rightarrow x_1 < 2$

將數列由小到大排列$-4,-4,2,4,22$的中位數$Md_1 = 2$。

Step2. $x_2 = \frac{7\times2-5\times4}{2} = -3 \Rightarrow x_1 < x_2 < 2$

將數列由小到大排列$-4,-4,-3,-3,2,4,22$的中位數$Md_2 = -3$。

Step3. $x_3 = \frac{49\times2-45\times4}{4} = -\frac{41}{2} \Rightarrow x_3 < x_1 < x_2$

將數列由小到大排列$-\frac{41}{2},-\frac{41}{2},-4,-4,-3,-3,2,4,22$的$Md_3 = -3$。

Step4. $x_4 = \frac{7\times2-5\times4}{2} = -3 = Md_3$

所以數列(2,4,22)為四次穩定，穩定值$Q_4 = -3$。

ii. $x_2 = x_1$

$$\Rightarrow \frac{7a-5b}{2} = \frac{4b-a-c}{2} \Rightarrow 8a = 9b-c \Rightarrow c-b = 8(b-a)$$

此時數列為

x_1、x_1、x_1、x_1、a、b、c，$Md_2 = x_1 = \frac{4b-a-c}{2}$

③加入 2 個x_3

$$\Rightarrow 2x_3 = 9\left(\frac{4b-a-c}{2}\right) - (9b-a-c) = \frac{18b-7a-7c}{2}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{18b-7a-7c}{4}$$

$$\because x_3 - x_2 = \frac{18b-7a-7c}{4} - \frac{8b-2a-2c}{4} = \frac{10b-5a-5c}{4}$$

$$= \frac{5}{4}(2b-a-c) = \frac{5}{4}[(b-a)-(c-b)] < 0$$

$\therefore x_3 < x_2$

此時數列為x_3、x_3、x_1、x_1、x_1、x_1、a、b、c，$Md_3 = x_1$

④加入 2 個x_4

$$\Rightarrow 2x_4 = 11\left(\frac{4b-a-c}{2}\right) - \frac{36b-9a-9c}{2} = 4b-a-c$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{4b-a-c}{2} = Md_3$$

故數列為四次穩定，穩定值$Q_4 = \dfrac{4b-a-c}{2}$。

原數列(2,4,20)為例，此時$a = 2, b = 4, c = 20$，中位數$Md_0 = 4$。

Step1. $x_1 = \dfrac{4\times 4-2-20}{2} = -3 \Rightarrow x_1 < 2$

將數列由小到大排列$-3,-3,2,4,20$的中位數$Md_1 = 2$。

Step2. $x_2 = \dfrac{7\times 2-5\times 4}{2} = -3 \Rightarrow x_2 = x_1$

將數列由小到大排列$-3,-3,-3,-3,2,4,20$的中位數$Md_2 = -3$。

Step3. $x_3 = \dfrac{18\times 4-7\times 2-7\times 20}{4} = -\dfrac{41}{2} \Rightarrow x_3 < x_2 = x_1$

將數列由小到大排$-\dfrac{41}{2},-\dfrac{41}{2},-3,-3,-3,-3,2,4,20$的$Md_3 = -3$。

Step4. $x_4 = \dfrac{4\times 4-2-20}{2} = -3 = Md_3$

所以數列(2,4,20)為四次穩定，穩定值$Q_4 = -3$。

iii. $\boldsymbol{x_2 < x_1}$

$$\Rightarrow \frac{7a-5b}{2} < \frac{4b-a-c}{2} \Rightarrow c-b < 8(b-a)$$

此時數列為

x_2、x_2、x_1、x_1、a、b、c，$Md_2 = x_1 = \dfrac{4b-a-c}{2}$

③加入 2 個x_3

$$\Rightarrow 2x_3 = 9\left(\frac{4b-a-c}{2}\right) - 7a = \frac{36b-23a-9c}{2}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{36b-23a-9c}{4}$$

$$\because x_3 - x_1 = \frac{36b-23a-9c}{4} - \frac{8b-2a-2c}{4} = \frac{28b-21a-7c}{4}$$

$$= \frac{7}{4}(4b-3a-c) = \frac{5}{4}[3(b-a)-(c-b)] < 0$$

$\therefore x_3 < x_1$

不管x_3在(i)$x_2 < x_3 < x_1$、(ii)$x_3 = x_2$或(iii)$x_3 < x_2$，此時三數列

$$\begin{cases} \text{(i)}x_2、x_2、x_3、x_3、x_1、x_1、a、b、c \\ \text{(ii)}x_2、x_2、x_2、x_2、x_1、x_1、a、b、c\text{的中位數}Md_3\text{皆為}x_1 \\ \text{(iii)}x_3、x_3、x_2、x_2、x_1、x_1、a、b、c \end{cases}$$

④加入 2 個x_4

同理，$x_4 = \dfrac{4b-a-c}{2} = Md_3$

故數列為四次穩定，穩定值$Q_4 = \dfrac{4b-a-c}{2}$。

原數列(2,4,16)為例，此時$a = 2, b = 4, c = 16$，中位數$Md_0 = 4$。

Step1. $x_1 = \dfrac{4\times4-2-16}{2} = -1 \Rightarrow x_1 < 2$

將數列由小到大排列$-1,-1,2,4,16$的中位數$Md_1 = 2$。

Step2. $x_2 = \dfrac{7\times2-5\times4}{2} = -3 \Rightarrow x_2 < x_1$

將數列由小到大排列$-3,-3,-1,-1,2,4,16$的中位數$Md_2 = -1$。

Step3. $x_3 = \dfrac{36\times4-23\times2-9\times16}{4} = -\dfrac{23}{2} \Rightarrow x_3 < x_2$

將數列由小到大排列$-\dfrac{23}{2},-\dfrac{23}{2},-3,-3,-1,-1,2,4,16$的$Md_3 = -1$。

Step4. $x_4 = \dfrac{4\times4-2-16}{2} = -1 = Md_3$

所以數列(2,4,16)為四次穩定，穩定值$Q_4 = -1$。

◆ 小結論

為突破文獻中位數容易受數列奇、偶個數影響的情形，導致穩定狀態不具規律，故本研究改為一次加入 2 個相同數，使得新數列的項數固定為奇數項，也就是說中位數確實存在於數列中，來探討數列的穩定狀態。藉由 Excel 的數據分析輔助，在原數列(a,b,c)間的差距大小分類下，透過不等式的方式逐一討論，彙整結果如下:

1. 原數列存在兩數相同$(a < b = c)$

數列為二次穩定，且穩定值為b。

2. 原數列成等差$(b-a=c-b)$

數列為一次穩定，且穩定值為b(等差中項)。

3. 原數列間的差距不相等$(b-a<c-b)$

(1) $c-b<3(b-a)$

數列為三次穩定，且穩定值為$\dfrac{4b-a-c}{2}$，即所加入的第一組數字。

(2) $c-b=3(b-a)$

數列為三次穩定，且穩定值為a。

(3) $c-b>3(b-a)$

(i) $c-b>8(b-a)$

數列為四次穩定，穩定值為$\dfrac{7a-5b}{2}$，其值只受原數列最小或最大兩數之影響。

(ii) $c-b\le 8(b-a)$

數列為四次穩定，且穩定值為$\dfrac{4b-a-c}{2}$。

(三) 利用一次加入 4 個相同數，找出數列的穩定狀態

接續研究(二)一次加入 2 個相同數的方法，來探討數列一次加入 4 個相同數時，其穩定狀態是否存在相同的規則。

1. 原數列$a<b=c$，此時$Md_0=b$

①加入 4 個x_1

$$\Rightarrow 4x_1=7b-(a+2b)=-a+6b$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-a+5b}{4}=\frac{4b+(b-a)}{4}=b+\frac{b-a}{4}>b$$

此時數列為a、b、b、x_1、x_1、x_1、x_1，$Md_1=\dfrac{-a+5b}{4}$

②加入 4 個x_2

$$\Rightarrow 4x_2=11\left(\frac{-a+5b}{4}\right)-7b=\frac{-11a+27b}{4}，x_2=\frac{-11a+27b}{16}$$

$$\because x_2-x_1=\frac{-7a+7b}{16}=\frac{7}{16}(b-a)>0 \quad \therefore x_2>x_1$$

此時數列為a、b、b、x_1、x_1、x_1、x_1、x_2、x_2、x_2、x_2，$Md_2 = x_1$

③加入 4 個x_3

$$\Rightarrow 4x_3 = 15x_1 - (a + 2b + 4x_1 + 4x_2) = -a + 5b$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{-a + 5b}{4} = Md_2$$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{-a + 5b}{4}$。

2. 原數列$a < b < c$，此時$Md_0 = b$

①加入 4 個x_1

$$\Rightarrow 4x_1 = 7\mathrm{b} - (a + b + c) = 6b - a - c = 4b + (b - a) - (c - b)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4b + (b - a) - (c - b)}{4}$$

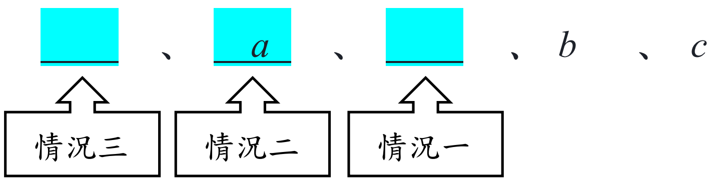
(1) 若$b - a = c - b$(等差數列)，

$x_1 = b = Md_0$，故數列為一次穩定，且穩定值$Q_1 = b$。

(2) 若$b - a < c - b$

$$x_1 = \frac{4b + (b - a) - (c - b)}{4} = b + \frac{(b - a) - (c - b)}{4} < b$$

✧ x_1的可能範圍



【情況一】$a < x_1 < b$

$$\Rightarrow a < \frac{6b - a - c}{4} \Rightarrow 4a < 6b - a - c \Rightarrow c - b < 5(b - a)$$

此時數列為

a、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_1 = \dfrac{6b - a - c}{4}$

②加入 4 個x_2

$$\Rightarrow 4x_2 = 11x_1 - (a + b + c + 4x_1) = \frac{38b - 11a - 11c}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{38b - 11a - 11c}{16} = \frac{16b + 11(b - a) - 11(c - b)}{16}$$

$$\because x_2 - x_1 = \frac{7}{16}[(b - a) - (c - b)] < 0 \quad \therefore x_2 < x_1$$

✧ x_2的可能範圍

$\underline{\quad}$ 、 $\underline{a}$ 、 $\underline{\quad}$ 、 x_1 、 b 、 c

情況iii　情況ii　情況i

i. $\boldsymbol{a < x_2 < x_1}$

$\Rightarrow a < \dfrac{38b-11a-11c}{16}$

$\Rightarrow 16a < 38b-11a-11c \Rightarrow 11(c-b) < 27(b-a)$

此時數列為a、x_2、x_2、x_2、x_2、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 4 個x_3

$\Rightarrow 4x_3 = 15x_1 - (a+b+c+4x_1+4x_2) = 6b-a-c$

$\Rightarrow x_3 = \dfrac{6b-a-c}{4} = Md_2$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{6b-a-c}{4}$。

ii. $\boldsymbol{x_2 = a}$

$\Rightarrow \dfrac{38b-11a-11c}{16} = a \Rightarrow 11(c-b) = 27(b-a)$

此時數列為a、a、a、a、a、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 4 個x_3

$\Rightarrow 4x_3 = 15x_1 - (5a+b+c+4x_1) = 6b-a-c$

$\Rightarrow x_3 = \dfrac{6b-a-c}{4} = Md_2$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{6b-a-c}{4}$。

iii. $\boldsymbol{x_2 < a}$

$\Rightarrow \dfrac{38b-11a-11c}{16} < a \Rightarrow 11(c-b) > 27(b-a)$

此時數列為x_2、x_2、x_2、x_2、a、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 4 個x_3

同理，$x_3 = \dfrac{6b-a-c}{4} = Md_2$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{6b-a-c}{4}$。

【情況二】$\boldsymbol{x_1 = a}$

$\Rightarrow \dfrac{6b-a-c}{4} = a \Rightarrow c-b = 5(b-a)$

此時數列為a、a、a、a、a、b、c，$Md_1 = a$

②加入 4 個x_2

$\Rightarrow 4x_2 = 11a-(5a+b+c) = 6a-b-c$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{6a-b-c}{4} < \dfrac{6a-2a}{4} = a$

此時數列為x_2、x_2、x_2、x_2、a、a、a、a、a、b、c，$Md_2 = a$

③加入 4 個x_3

$\Rightarrow 4x_3 = 15a-(5a+b+c+4x_2) = 4a$，$x_3 = a = Md_2$

故數列為三次穩定，穩定值$Q_3 = a$。

【情況三】$\boldsymbol{x_1 < a}$

$\Rightarrow \dfrac{6b-a-c}{4} < a \Rightarrow c-b > 5(b-a)$

此時數列為x_1、x_1、x_1、x_1、a、b、c，$Md_1 = \dfrac{6b-a-c}{4}$

②加入 4 個x_2

$\Rightarrow 4x_2 = 11x_1-(a+b+c+4x_1) = \dfrac{38b-11a-11c}{4}$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{38b-11a-11c}{16}$

$\because x_2 - x_1 = \dfrac{7}{16}[(b-a)-(c-b)] < 0 \quad \therefore x_2 < x_1$

此時數列為

x_2、x_2、x_2、x_2、x_1、x_1、x_1、x_1、a、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 4 個x_3

$\Rightarrow 4x_3 = 15x_1-(a+b+c+4x_1+4x_2) = 6b-a-c$

$\Rightarrow x_3 = \dfrac{6b-a-c}{4} = Md_2$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = a$。

(四) 利用一次加入 6 個相同數，找出數列的穩定狀態

由上述討論(二)和討論(三)的結果，同理可證得一次加入 6 個相同數的數列穩定狀態，如下:

1.　原數列$\boldsymbol{a < b = c}$

數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{-a+7b}{6}$。

2.　原數列$\boldsymbol{a < b < c}$

(1)　若$\boldsymbol{b - a = c - b}$(等差數列)，

數列為一次穩定，且穩定值$Q_1 = b$。

(2)　若$\boldsymbol{b - a < c - b}$

【情況一】$\boldsymbol{a < x_1 < b}$

數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{8b-a-c}{6}$。

【情況二】$\boldsymbol{x_1 = a}$

數列為三次穩定，穩定值$Q_3 = a$。

【情況三】$\boldsymbol{x_1 < a}$

數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{8b-a-c}{6}$。

(五) 利用一次加入 3 個相同數，找出數列的穩定狀態

於討論(二)至(四)一次加入偶數個相同數使數列項數固定為奇數項，確實能有效找出數列的穩定次數與穩定數值。而此時，我們不禁好奇，一次加入奇數個相同數時，數列穩定狀態真的皆不具有規則嗎?於是我們對一次加入 3 個數做了以下的討論:

當原數列一次加入 3 個相同數時，仍然存在數列為偶數項時，中位數是正中間兩數之平均為虛擬數值的情形。在這樣的情況下，我們先行透過 Excel 計算公式輔助，得到數據資料如圖 4-5-1，來進一步觀察數列的穩定狀態，發現下列的情形:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	原數列三數
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
4	2.3333	2	1.6667	1.3333	1	0.6667	0.3333	0	-0.333	-0.667	-1	-1.333	-1.667	-2	-2.333	
5	2.3333	2	1.6667	1.3333	1	0.6667	0.3333	0	-0.333	-0.667	-1	-1.333	-1.667	-2	-2.333	Step1 三數
6	2.3333	2	1.6667	1.3333	1	0.6667	0.3333	0	-0.333	-0.667	-1	-1.333	-1.667	-2	-2.333	
7	2.5	2	1	-6E-16	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	-3.5	-4	-4.5	-5	-5.5	-6	
8	2.5	2	1	-6E-16	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	-3.5	-4	-4.5	-5	-5.5	-6	Step2 三數
9	2.5	2	1	-6E-16	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	-3.5	-4	-4.5	-5	-5.5	-6	
10	2.8333	2	1.6667	1.3333	1	0.1667	-0.667	-1.5	-2.333	-3.167	-4	-4.833	-5.667	-6.5	-7.333	
11	2.8333	2	1.6667	1.3333	1	0.1667	-0.667	-1.5	-2.333	-3.167	-4	-4.833	-5.667	-6.5	-7.333	Step3 三數
12	2.8333	2	1.6667	1.3333	1	0.1667	-0.667	-1.5	-2.333	-3.167	-4	-4.833	-5.667	-6.5	-7.333	
13	2.75	2	1.6667	1.3333	1	-0.583	-2.167	-3.75	-5.333	-6.917	-8.5	-9.25	-10	-10.75	-11.5	
14	2.75	2	1.6667	1.3333	1	-0.583	-2.167	-3.75	-5.333	-6.917	-8.5	-9.25	-10	-10.75	-11.5	
15	2.75	2	1.6667	1.3333	1	-0.583	-2.167	-3.75	-5.333	-6.917	-8.5	-9.25	-10	-10.75	-11.5	
16	2.9167	2	1.6667	1.3333	1	-1.083	-3.167	-5.25	-7.333	-9.417	-11.5	-12.42	-13.33	-14.25	-15.17	
17	2.9167	2	1.6667	1.3333	1	-1.083	-3.167	-5.25	-7.333	-9.417	-11.5	-12.42	-13.33	-14.25	-15.17	⋮
18	2.9167	2	1.6667	1.3333	1	-1.083	-3.167	-5.25	-7.333	-9.417	-11.5	-12.42	-13.33	-14.25	-15.17	
19	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-2.458	-5.333	-5	-4.667	-4.333	-4	-5.667	-7.333	-9	-10.67	
20	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-2.458	-5.333	-5	-4.667	-4.333	-4	-5.667	-7.333	-9	-10.67	
21	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-2.458	-5.333	-5	-4.667	-4.333	-4	-5.667	-7.333	-9	-10.67	
37	4.2708	2	1.6667	1.3333	1	-7.729	-3.833	-6.625	-5.333	-14.42	-4	-15.75	-21	-14.88	-14.75	
38	4.2708	2	1.6667	1.3333	1	-7.729	-3.833	-6.625	-5.333	-14.42	-4	-15.75	-21	-14.88	-14.75	Step12 三數
39	4.2708	2	1.6667	1.3333	1	-7.729	-3.833	-6.625	-5.333	-14.42	-4	-15.75	-21	-14.88	-14.75	⋮
61	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-3.771	-12.31	-20	-5.333	-16	-4	-11	-14.92	-21.44	-15.25	
62	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-3.771	-12.31	-20	-5.333	-16	-4	-11	-14.92	-21.44	-15.25	Step20 三數
63	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-3.771	-12.31	-20	-5.333	-16	-4	-11	-14.92	-21.44	-15.25	⋮
109	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-8.911	-6.323	-15.69	-5.333	-14.7	-4	-24.38	-17.17	-25	-15.25	
110	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-8.911	-6.323	-15.69	-5.333	-14.7	-4	-24.38	-17.17	-25	-15.25	Step36 三數
111	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-8.911	-6.323	-15.69	-5.333	-14.7	-4	-24.38	-17.17	-25	-15.25	⋮
229	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-4.396	-6.667	-14.7	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	
230	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-4.396	-6.667	-14.7	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	Step76 三數
231	3.375	2	1.6667	1.3333	1	-4.396	-6.667	-14.7	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	⋮
511	3.375	2	1.667	1.333	1	-4.396	-6.667	-16.25	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	
512	3.375	2	1.667	1.333	1	-4.396	-6.667	-16.25	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	Step170 三數
513	3.375	2	1.667	1.333	1	-4.396	-6.667	-16.25	-5.333	-14.42	-4	-16	-17.17	-21.44	-15.25	

圖 4-5-1 一次加入 3 個相同數的數列穩定情形

雖然在(1,2,3)等差數列穩定次數為一次，以及數列(1,2,4)、(1,2,5)和(1,2,6)其穩定次數皆為三次，但其餘數列中，有數列甚至在加入第 76 組數字才達到穩定，如數列(1,2,11)，有的更是在加了 170 組數字後才達到穩定，如數列(1,2,9)。由此可知，當原數列一次加入 3 個相同數時，數列的穩定狀態並未具有規律。

(六) 利用一次加入 5 個相同數，找出數列的穩定狀態

有別於一次加入 3 個相同數不具有規律性，當一次加入 5 個相同數時，不管x_1的數落在哪個範圍，我們透過數列的排列情形，可以得知$Md_1 = x_1$確實存在於數列中，如下圖 4-6-1 所示，改善了數列奇、偶個數對中位數的影響。於是我們對數列的穩定狀態做進一步的討論

如下:

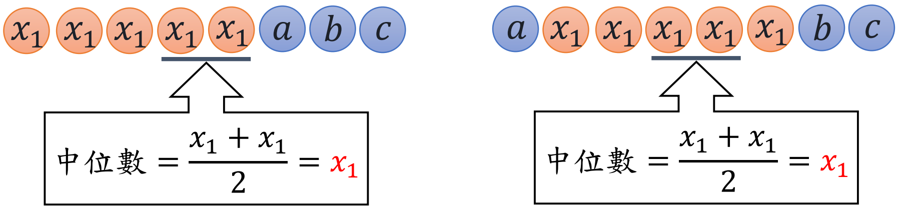


圖 4-6-1 原數列(a,b,c)第一次加入 5 個相同數的中位數

1. 原數列$a<b=c$，此時$Md_0=b$

①加入 5 個x_1

$$\Rightarrow 5x_1=8b-(a+2b)=-a+6b$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-a+6b}{5}=\frac{5b+(b-a)}{5}=b+\frac{b-a}{5}>b$$

此時數列為

a、b、b、x_1、x_1、x_1、x_1、x_1，$Md_1=\frac{-a+6b}{5}$

②加入 5 個x_2

$$\Rightarrow 5x_2=13\left(\frac{-a+6b}{5}\right)-8b=\frac{-13a+38b}{5}，x_2=\frac{-13a+38b}{25}$$

$$\because x_2-x_1=\frac{-8a+8b}{25}=\frac{8}{25}(b-a)>0 \quad \therefore x_2>x_1$$

此時數列為:

a、b、b、x_1、x_1、x_1、x_1、x_1、x_2、x_2、x_2、x_2、x_2，$Md_2=x_1$

③加入 5 個x_3

$$\Rightarrow 5x_3=18x_1-(a+2b+5x_1+5x_2)=-a+6b$$

$$\Rightarrow x_3=\frac{-a+6b}{5}=Md_2$$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3=\frac{-a+6b}{5}$。

2. 原數列$a<b<c$，此時$Md_0=b$

①加入 5 個x_1

$$\Rightarrow 5x_1=8\mathrm{b}-(a+b+c)=7b-a-c=5b+(b-a)-(c-b)$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{5b+(b-a)-(c-b)}{5}$$

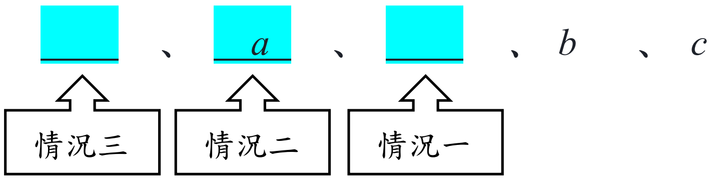
(1) 若$b-a=c-b$(等差數列)

$x_1=b=Md_0$，故數列為一次穩定，且穩定值$Q_1=b$。

(2) 若$b-a<c-b$

$$x_1=\frac{5b+(b-a)-(c-b)}{5}=b+\frac{(b-a)-(c-b)}{5}<b$$

✧ x_1的可能範圍



【情況一】$a<x_1<b$

$$\Rightarrow a<\frac{7b-a-c}{5}\Rightarrow 5a<7b-a-c\Rightarrow c-b<6(b-a)$$

此時數列為

a、x_1、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_1=\dfrac{7b-a-c}{5}$

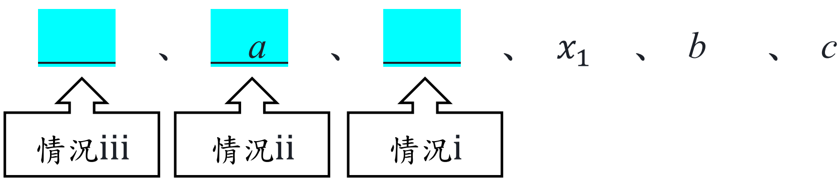
②加入 5 個x_2

$$\Rightarrow 5x_2=13\left(\frac{7b-a-c}{5}\right)-8b=\frac{51b-13a-13c}{5}$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{51b-13a-13c}{25}=\frac{25b+13(b-a)-13(c-b)}{25}$$

$$\because x_2-x_1=\frac{8}{25}[(b-a)-(c-b)]<0 \quad \therefore x_2<x_1$$

✧ x_2的可能範圍



i. $a<x_2<x_1$

$$\Rightarrow a<\frac{51b-13a-13c}{25}$$

$$\Rightarrow 25a<51b-13a-13c\Rightarrow 13(c-b)<38(b-a)$$

此時數列為

a、x_2、x_2、x_2、x_2、x_2、x_1、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 5 個x_3

$\Rightarrow 5x_3 = 18x_1 - (a + b + c + 5x_1 + 5x_2) = 7b - a - c$

$\Rightarrow x_3 = \dfrac{7b - a - c}{5} = Md_2$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{7b - a - c}{5}$。

ii. $\boldsymbol{x_2 = a}$

$\Rightarrow \dfrac{51b - 13a - 13c}{25} = a \Rightarrow 13(c - b) = 38(b - a)$

此時數列為

a、a、a、a、a、a、x_1、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 5 個x_3

$\Rightarrow 5x_3 = 18x_1 - (6a + b + c + 5x_1) = 7b - a - c$

$\Rightarrow x_3 = \dfrac{7b - a - c}{5} = Md_2$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{7b - a - c}{5}$。

iii. $\boldsymbol{x_2 < a}$

$\Rightarrow \dfrac{51b - 13a - 13c}{25} < a \Rightarrow 13(c - b) > 38(b - a)$

此時數列為

x_2、x_2、x_2、x_2、x_2、a、x_1、x_1、x_1、x_1、x_1、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 5 個x_3

同理，$x_3 = \dfrac{7b - a - c}{5} = Md_2$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{7b - a - c}{5}$。

【情況二】$\boldsymbol{x_1 = a}$

$\Rightarrow \dfrac{7b - a - c}{5} = a \Rightarrow c - b = 6(b - a)$

此時數列為a、a、a、a、a、a、b、c，$Md_1 = a$

②加入 5 個x_2

$\Rightarrow 5x_2 = 13a - (6a + b + c) = 7a - b - c$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{7a-b-c}{5} < \frac{7a-2a}{5} = a$$

此時數列為

x_2、x_2、x_2、x_2、x_2、a、a、a、a、a、a、b、c，$Md_2 = a$

③加入 5 個x_3

$\Rightarrow 5x_3 = 18a - (6a + b + c + 5x_2) = 5a$，$x_3 = a = Md_2$

故數列為三次穩定，穩定值$Q_3 = a$。

【情況三】$\boldsymbol{x_1 < a}$

$$\Rightarrow \frac{7b-a-c}{5} < a \Rightarrow c - b > 6(b-a)$$

此時數列為

x_1、x_1、x_1、x_1、x_1、a、b、c，$Md_1 = \dfrac{7b-a-c}{5}$

②加入 5 個x_2

$$\Rightarrow 5x_2 = 13\left(\frac{7b-a-c}{5}\right) - 8b = \frac{51b-13a-13c}{5}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{51b-13a-13c}{25}$$

$$\because x_2 - x_1 = \frac{2}{25}[4(b-a) - 4(c-b)] < 0 \quad \therefore x_2 < x_1$$

此時數列為

x_2、x_2、x_2、x_2、x_2、x_1、x_1、x_1、x_1、x_1、a、b、c，$Md_2 = x_1$

③加入 5 個x_3

$$\Rightarrow 5x_3 = 18x_1 - (a + b + c + 5x_1 + 5x_2) = 7b - a - c$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{7b-a-c}{5} = Md_2$$

故數列為三次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{7b-a-c}{5}$

在討論(六)一次加入 5 個相同數中，突破先前一次加入 1、3 個相同數使數列穩定狀態不規則的情形；其數列的穩定次數與穩定數值，與一次加入 4 和 6 個相同數具有相同的規則，讓本研究有了新發現。

(七) 加入不同數量之相同數字，中位數的變化情形

由文獻與上述研究(二)至(六)的討論，我們發現:

1. 一次加入奇數個相同數

數列在一次加入 1 及 3 個相同數時，受限於數列奇數或偶數項數對中位數產生的影響，使數列穩定狀態不具規律，但在一次加入$n \geq 5$的奇數個數時，數列的中位數將不受數列奇數或偶數項數的影響，且其穩定狀態與一次加入$n \geq 4$的偶數個數相同。

2. 一次加入偶數個相同數

本研究為使數列保持為奇數項，改善數列奇數或偶數項數對中位數的影響，故透過一次加入偶數個相同數(2、4 和 6)來探討數列的穩定狀態，確時能有效提升數列達到穩定的速度(穩定次數≤ 4)，也進一步求得數列最後達到穩定數值的一般式。

藉由 Excel 的數據分析，將原數列(1,2,14)一次分別加入 1 至 6 個數，觀察其中位數的變化情形，如下圖 4-7-1 所示。

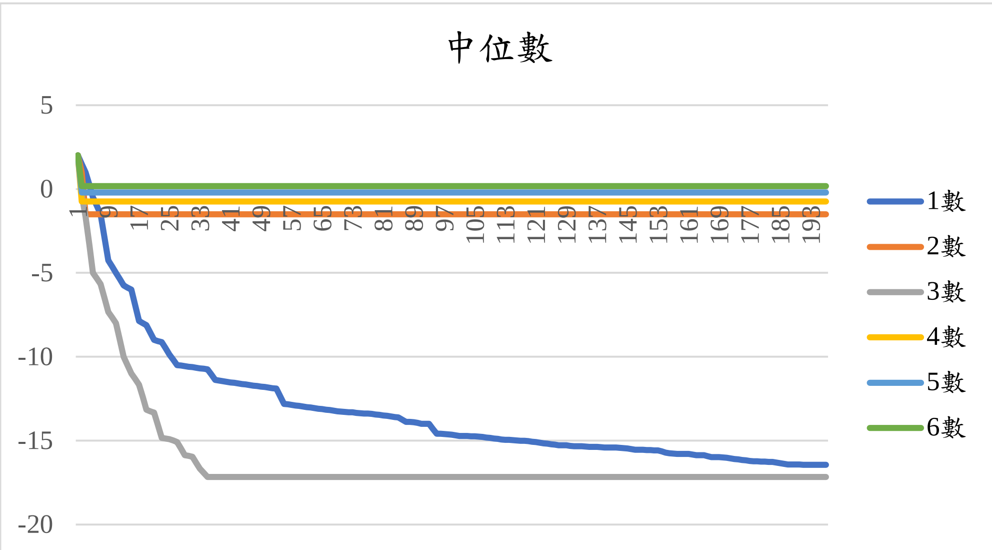


圖 4-7-1 原數列(1,2,24)的中位數變化情形

【橫軸為數列的項數，縱軸為數列的中位數】

五、研究結果與討論

(一)數列一次加入 2 個相同數的穩定狀態

1. 原數列存在兩數相同$(a<b=c)$

   數列為二次穩定，且穩定值為b。

2. 原數列成等差$(b-a=c-b)$

   數列為一次穩定，且穩定值為b(等差中項)。

3. 原數列間的差距不相等$(b-a<c-b)$

   (1)$c-b<3(b-a)$

   數列為三次穩定，且穩定值為$\frac{4b-a-c}{2}$。

   (2)$c-b=3(b-a)$

   數列為三次穩定，且穩定值為a。

   (3)$c-b>3(b-a)$

   (i) $c-b>8(b-a)$

   數列為四次穩定，穩定值為$\frac{7a-5b}{2}$。

   (ii) $c-b\leq 8(b-a)$

   數列為四次穩定，穩定值為$\frac{4b-a-c}{2}$。

(二)數列一次加入 n 個相同數(n ≥ 4)的穩定狀態

1. 原數列存在兩數相同$(a<b=c)$

   數列為三次穩定，且穩定值$=\frac{(n+1)b-a}{n}$。

2. 原數列成等差$(a<b<c$且$b-a=c-b)$

   數列為一次穩定，且穩定值$=b$(等差中項)。

3. 原數列間的差距不相等$(a<b<c$且$b-a<c-b)$

   (1)$a<x_1<b$

   數列為三次穩定，且穩定值$=\frac{(n+2)b-a-c}{n}$。

   (2)$x_1=a$

   數列為三次穩定，且穩定值$=a$。

(3) $x_1 < a$

數列為三次穩定，且穩定值 $= \dfrac{(n+2)b-a-c}{n}$ 。

六、評鑑與檢討

(一) 研究動機的部分：

起初接觸到平均數、中位數與眾數這幾個統計集中量數名詞時，僅知道它們的定義與如何求出其值，鮮少瞭解到進一步的探究與應用。藉由這一道中位數與平均數的遊戲，啟發了我們對這個主題相關數學概念的研究興趣，我們更學習到了在不同統計分配下這三者的差異性，體驗到做研究需「大膽假設、小心求證」精神，想要探討什麼?用什麼樣的方式來表達?我們一直想要找出這個數學遊戲是否有規律?受到何限制?

(二) 擬定正式計畫、研究問題及工作進度表的部分：

感謝老師的協助與督導，讓我們從暑假開始，每週至少要有兩次的小組討論時間，每次紀錄探討項目與發現、待解決問題、工作分配…；也因此，我們才能在時間規劃下減少延誤，如期完成本次專題。起初階段大家猜想最後的穩定規律一定和原數列三項的間距有關，一直朝數字間的差距比例來分類探討，始終不得其門而入，還好有老師陪伴大家渡過這一段低潮的時間，才有後來抽絲剝繭往影響中位數的產生方式來分析。

(三) 彙整相關文獻的部分：

全國科展、小論文與網路資料並沒有很多有關中位數與平均數的研究參考資料，應該是和它們常被應用於資料計算、分析有關。《均中求穩》成為我們最重要的參考資料，他們利用 Excel 函數跑出了大量資料，並找出了特定數列的穩定值的規律，但卻未對其餘數列的穩定值無法找出數學規律作出說明。而本組便針對此部分提出會認為影響穩定次數與穩定值的兩個原因:奇偶數個數字的中位數產生方式、原數列三項的間距比例做進一步的延伸探討，試圖讓數列始終維持在奇數個數字的情況下，依原數列三

項的間距比例進一步探討並建立規則。

(四) 資料分析的部分：

如同質數的出現並沒有一特定規則一般，在一次加入一個或三個相同數字情況下，我們尚未能建立出數學一般式，但從數字變化分析是和中位數是否真實存在數列中、抑或只是虛擬值有很大關係。但在一次加入兩個或四個以上相同數字情況下，我們可以找出原數列最後的穩定次數和穩定值的數學一般式，也算是大家一起努力後的小收穫吧!

(五) 研究結果與討論部分：

本組利用了不等式證明了原數列在一次加入兩個或四個以上相同數字情況下，最後的穩定次數和穩定值有一個簡單計算方式；但如果是原數列是四、五、六…項，在維持數列都是奇數項的情形下是否也能找出最後的穩定次數和穩定值的數學一般式?更是本組未來要持續努力的目標。

七、參考資料

(一) 許志農(2014)。動手玩數學專欄。***龍騰數亦優，23***，38。

(二) 均中求穩(2016)。105 學年度台中市公私立中小學科學展覽會高中(職)組(C0111)佳作。

http://140.128.183.25/signup_cal.php?caltype=7