彰化縣109年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書

作品編號：

組別：

□國小組　■數學類

□自然與生活科技類

■國中組　□人文社會類

作品名稱：畫龍『點』『經』

-利用分點數了解矩形及長方體通過的區域數

目錄

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

獨立研究訓練，本為學校安排給資優班的課程，剛開時以帶領學生進行科展研究為目的，由教師指導學生從課本延伸，並從中找尋研究題材，以及設計相關實驗主題，這些都必須花好幾個月的時間投入，除了正式課程檢視研究進度外，學生通常得利用假日時間返校進行小組研究。

隨著彰化縣辦理獨立研究競賽，始了解獨立研究較科展而言，更強調之間學習的連貫性，強調延伸所學以擬定想探究的主題，擴大範圍至多元面向，是以除數學、自然與生活科技外，更有人文科學，均為其範疇。這充份給予想進行研究的學生好的機會，無論是具有語文學術優異傾向、數學學術優異傾向抑或是兼具兩者的學生，找尋適合他們展現的舞台。

學校曾延請彰師大特教系教授蒞臨校內進行獨立研究的講座，勉勵學生各個均可嘗試參與研究，並於輔導室，設備組，及相關領域召集人處備有近年彰化縣獨立研究得獎成果冊供師生借閱，於學校首頁設立有關獨立研究文件專區，提供獨立研究方式及相關訊息查詢。學校熱心的老師亦會主動詢問，激勵學生組隊參與並掌握其進度，使學生能把握寒、暑假期間，投入研究。今年校內更預先進行校內初選，以增進參賽的質與量。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

（一）安排不同主題課程及研習，訓練學生探索問題、資料收集、應用分析、歸納整理、表達能力，培養主題研究的興趣。

（二）本校開設社團課，藉由接觸不同的學習內容，拓展學生獨立研究的視野。

（三）學校首頁闢有獨立研究文件專案專區，提供獨立研究方法及相關訊息下載。

（四）資源提供：學校整合科展與近年獨立研究歷屆範本（成果冊、光碟提供借閱，並在網站上建立關於科學教育及獨立研究專區提供其他研究資訊（包含研究方法、如何擬定主題及研究計畫、得獎作品等）。

（五）研習規畫：實施多場不同主題的課程習，培養學生探索問題、資料蒐集、應用分析、歸納整理以及表達的能力，並應用在獨立研究。

（六）設備器材：於週六、日或課餘期間，均開放電腦教室、E化教室等電腦設備供學生使用，研究所需的實驗器材均一應具全，讓學生在完善的環境下，專心從事研究。

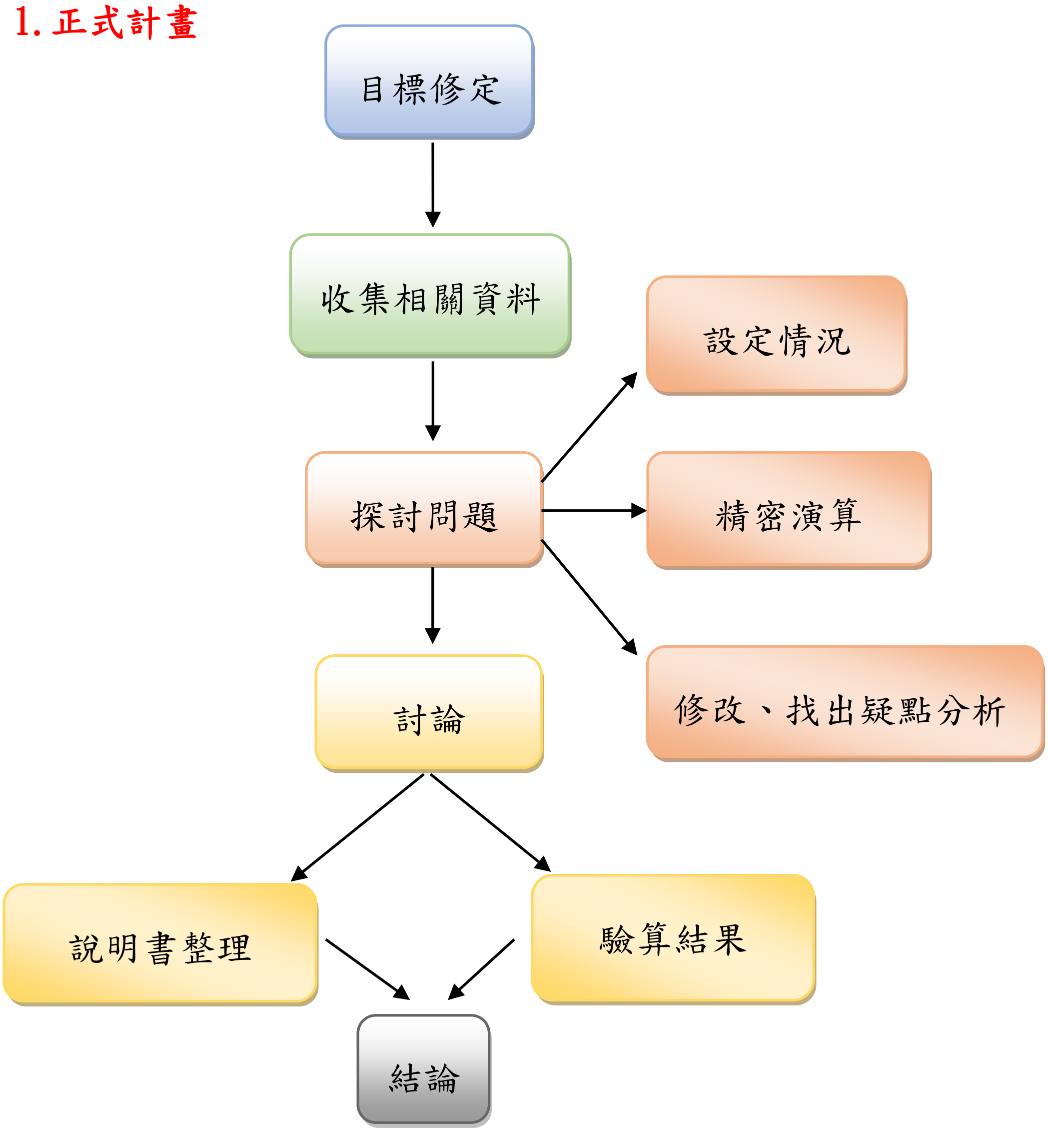
第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

有一次上課時，老師出了一道有趣的數學題目：「小明要用機械手臂做一盒冰塊是2×7的格數，且機械手臂只能以直線移動，請問如何以最短的距離灌滿所有的小格子？」接著老師在黑板上畫了起來，可是卻沒有相對應的公式，我們上網找尋了資料，決定利用「**分點**」的方式試著推導出一條線最多可以通過幾個小格子之通式。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

1. 正式計畫



▲(圖一)工作進度分配表

2. 研究問題

(1)探討平面中，長a單位、寬b單位的長方形，可分成ab個邊長為1單位的小正方形，其對角線共可通過多少個小正方形。

(2)探討空間中，長a單位、寬b單位，高c單位長方體，可分成abc個邊長為1單位的小正方體，其內部對角線(距離最遠的兩點)共可通過多少個小正方體。

3. 工作進度表

時間／工作	6/22~6/28	6/29~7/5	7/6~7/12	7/13~7/19	7/20~7/26	7/27~8/2	8/3~8/9	8/10~8/16	8/17~8/23	8/24~8/30	8/31~9/6	9/7~9/13
擬定初步的問題												
尋找資源												
擬定正式計畫及研究問題												
彙整相關文獻												
提出研究成果與討論												
評鑑與檢討												
累積進度百分比	5%	12%	19%	29%	39%	49%	59%	66%	73%	86%	93%	100%

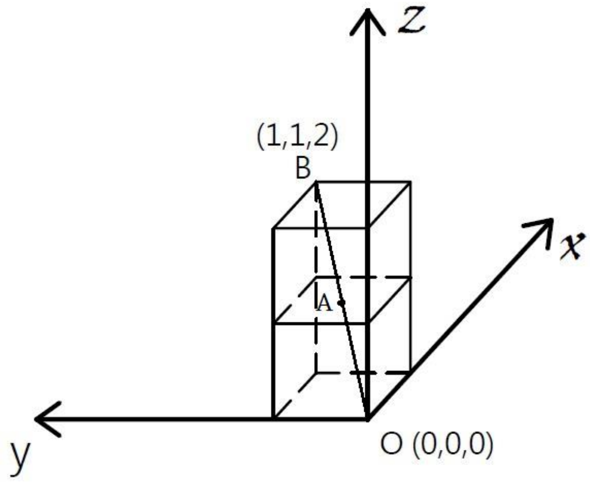
▲ (表1)12週的工作進度表

三、彙整相關文獻

討論對角線通過的小正方體數量，穿過邊界面上的點即為分點，一個分點至另一個分點就表示通過一小正方體，但立體圖形較難利用圖形了解分點的位置，所以會利用設計直角坐標的方式，來了解分點的位置，最後再把不管是否有互質的長、寬、高導成可利用的公式。

方法 1：

分界面上的分點如何找出？首先要找出立體中對角線的方程式，再利用 x 軸、 y 軸、z 軸距離之間的整數點代入方程式，找出分界面上的的分點，因為分界面上座標$(x，y，z)$一定至少一個整數。(分界面⇒指的是小正方體與小正方體之前相鄰的面)



▲圖二

如上圖二，先解出 $\overleftrightarrow{OB}$ 的方程式

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$$

x 軸：$0\le x\le 1$之間無整數點，就無法產生分界面上的分點，

而 $x=0$ 或 $x=1$ 只能產生端點

y 軸：$0\le y\le 1$之間也無整數點，無法產生分界面上的分點

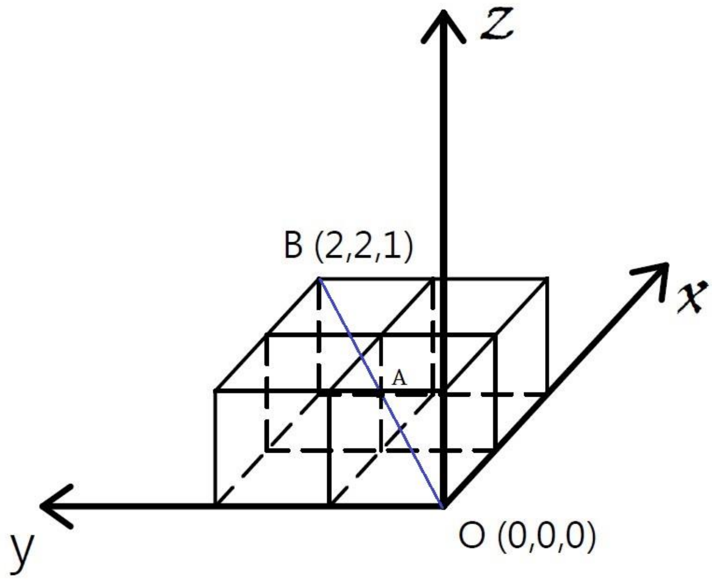
z 軸：$0\le z\le 2$，$z=1$時，可在分界面上產生 1 個分點

$z=1$代入$\overleftrightarrow{OB}$ 的方程式：$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{2}$$

故 A$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ 為分點，此分點在分界面上，故 $\overleftrightarrow{OB}$ 只有一個分點，可通過 2 個小正方體。

方法 2：



▲圖三

如上圖三，先解出 $\overleftrightarrow{OB}$ 的方程式

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$$

x 軸：$0\le x\le 2$，$x=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OB}$ 的方程式：$\frac{1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$

$$\therefore \quad y=1 \quad z=\frac{1}{2}$$

故 A$(1,1,\frac{1}{2})$ 為分點

y 軸：$0\le y\le 2$，$y=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OB}$ 的方程式：$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}=\frac{z}{1}$

$$\therefore \quad x=1 \quad z=\frac{1}{2}$$

故 A$(1,1,\frac{1}{2})$ 為分點

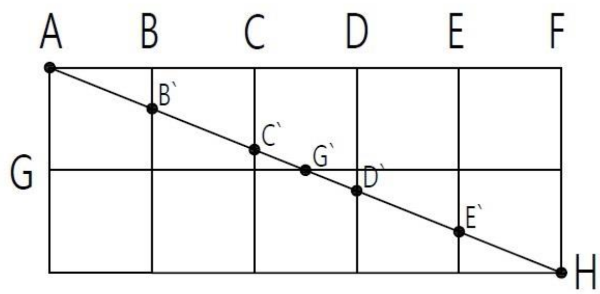
z軸：$0 \le z \le 1$之間無整數點，無法產生分界面上的分點

由以上可知x軸、y軸、z軸在長度範圍之間有整數，就可以在分界面上產生分點，若座標$(x，y，z)$只有一個整數表示無共分點，若有 2 個整數以上，表示x軸、y軸、z軸有出現共分點的現象。

四、資料分析

1、研究平面中，長a單位、寬b單位的長方形可分成ab個邊長為 1 單位的小正方形，其對角線可通過多少個小正方形；以下可分為幾種情況:

(1)**長、寬互質**:(以長 5 單位，寬 2 單位的長方形來探討)



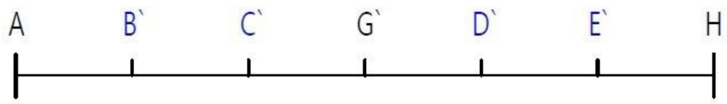
▲圖四(長 5 單位，寬 2 單位)

①觀察：

如圖四中，發現對角線通過 6 個小正方形。

②分析：

$\overline{AH}$ 線段共 5 個分點形成 6 個區域(A、H 為端點)；分點由 B、C、D、E 往下拉，會跟$\overline{AH}$形成 4 個交點⇒4 個分點 B‘、C‘、D‘、E‘，再由 G 往右拉跟$\overline{AH}$又形成 1 個交點⇒分點 G‘，所以共 5 個分點，通過 6 格(如圖五)。



▲圖五(5 個分點，通過 6 格)

③公式推導：(長a單位、寬b單位的長方形)

分點數:$\boxed{(a-1)+(b-1)}$

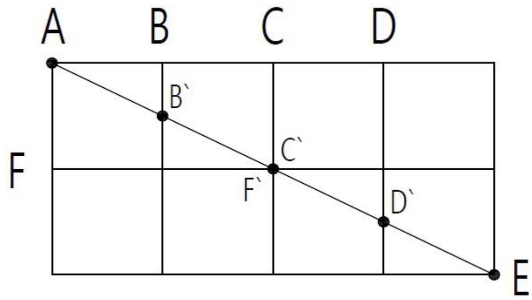
通過正方形個數:$(a-1)+(b-1)+1$

$\boxed{=a+b-1}$

與植樹問題相似：頭尾不種樹，a棵樹，$a+1$個間隔。

利用圖四驗證：通過$5+2-1=6$個正方形

(2)**長、寬不互質**:(以長 4 單位，寬 2 單位的長方形來探討)



▲圖六(長 4 單位，寬 2 單位)

①觀察：

如圖六中，發現對角線通過 4 個小正方形。

②分析：

1. $\overline{AE}$ 線段共 3 個分點形成 4 個區域；分點由 B、C、D 下拉會跟$\overline{AE}$ 形成 3 個交點⇒4 個分點 B'、C'、D'，再由 F 往右拉跟$\overline{AE}$ 又形成 1 個交點⇒分點 F'，但 C' 與 F' 為同一點產生**共分點**，並沒有出現新的分點。
2. C'、F' 為同一點的探討

因大長方形的長:寬= 4：2 = 2：1 與小長方形 AC C' F 的長寬比例相同，可說為相似圖形，所以 C' 與 F' 共點，因此跟大長方形有幾個相似小長方形，就有幾個共分點，造成分點減少，所以以上產生 3 個分點，通過 4 個小正方形。

③公式推導：（長a單位、寬b單位的長方形）

分點數：$\boxed{(a-1)+(b-1)-(n-1)}$

n代表通過圖形中與大長方形相似的個數。

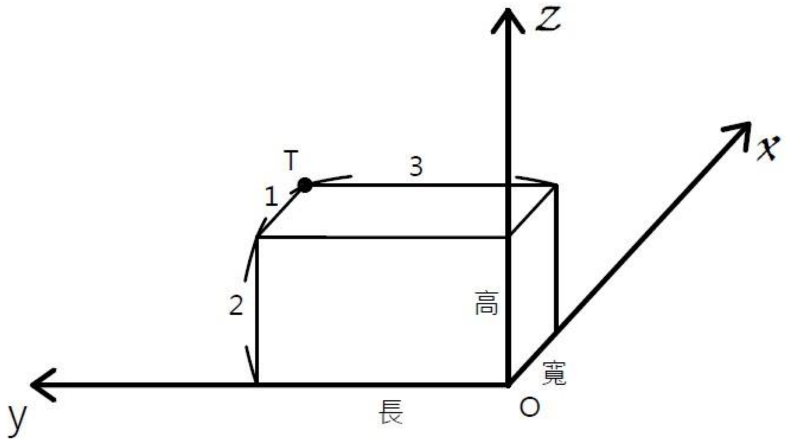
通過正方形個數：$(a-1)+(b-1)-(n-1)+1$

$\boxed{=a+b-n}$

利用圖六驗證：通過$4+2-2=6$個正方形（有 2 個小長方形與大長方形相似）

2、研究空間中，長a單位、寬b單位，高c單位長方體，可分成abc個邊長為 1 單位的小正方體，其對角線（距離最遠的兩點）共可通過多少個小正方體；以下可分為幾種情況：

(1)**長、寬、高，兩兩互質**之情況：（以長 3，寬 1，高 2 的長方體來探討）



▲圖七

$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}$

①x軸：$0\le x\le 1$之間無整數點，故無法跟$\overleftrightarrow{OT}$產生分界面上的分點

分點數表示：寬$-1=1-1=0$個

②y軸：$0\le y\le 3$之間有整數點$y=1$及$y=2$

$y=1$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{1}=\frac{1}{3}=\frac{z}{2}$

$\therefore \quad x=\frac{1}{3} \quad z=\frac{2}{3}$

產生分界面上的分點：$(\frac{1}{3},1,\frac{2}{3})$

$y=2$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{1}=\frac{2}{3}=\frac{z}{2}$

$\therefore \quad x=\frac{2}{3} \quad z=\frac{4}{3}$

產生分界面上的分點：$(\frac{2}{3},2,\frac{4}{3})$

分點數表示：長$-1=3-1=2$個

③z軸：$0\le z\le 2$之間有整數點$z=1$

$z=1$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x=\frac{1}{2} \quad z=\frac{3}{2}$

產生分界面上的分點：$(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$

分點數表示：高$-1=2-1=1$個

由x軸、y軸、z軸之間的整數點共產生3個分點

公式推導：

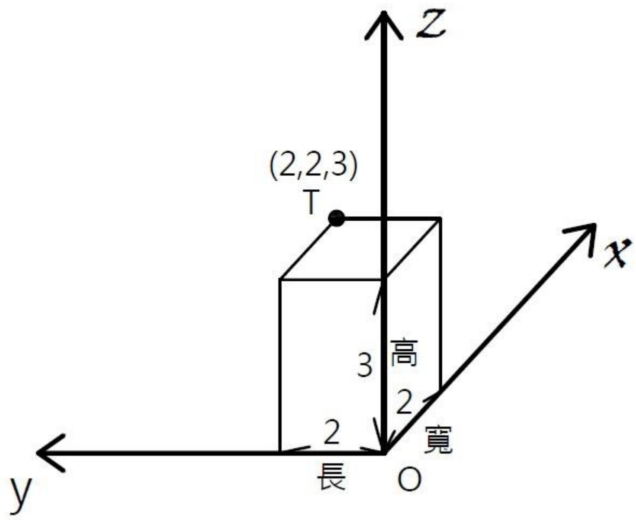
分點數：$\boxed{(長-1)+(寬-1)+(高-1)}$

通過小正方體個數：$(長-1)+(寬-1)+(高-1)+1$

$=長+寬+高-2$

$=1+3+2-2=4$個

(2)**長、寬、高，其中兩組互質，一組不互質**情況：(以長 2，寬 2，高 3 的長方體來探討)



▲圖八

$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

① x軸：$0 \le x \le 2$ 之間有整數點 $x=1$

$x=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

$\therefore \quad y=1 \quad z=\frac{3}{2}$

產生分界面上的分點：$(1, 1, \frac{3}{2})$

分點數表示：寬 $-1=2-1=1$ 個

② y 軸：$0 \le y \le 2$ 之間有整數點 $y=1$

$y=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}=\frac{z}{3}$

$\therefore \quad x=1 \quad z=\frac{3}{2}$

產生分界面上的分點：$(1, 1, \frac{3}{2})$

分點數表示：長 $-1=2-1=1$ 個

③ z 軸：$0 \le z \le 3$ 之間有整數點 $z=1$ 及 $z=2$

$z=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \quad x=\dfrac{2}{3} \quad y=\dfrac{2}{3}$

產生分界面上的分點：$(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},1)$

$z=2$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \quad x=\dfrac{4}{3} \quad y=\dfrac{4}{3}$

產生分界面上的分點：$(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},2)$

分點數表示：高 $-1=3-1=2$ 個

由 x 軸及 y 軸的分點來看相同的 $(1,1,\dfrac{3}{2})$，因長 2 單位與寬 2 單位不互質，最大公因數(2，2)=2。由平面中了解 2 個相似圖形能產生 $2-1=1$ 個共分點。

公式推導：

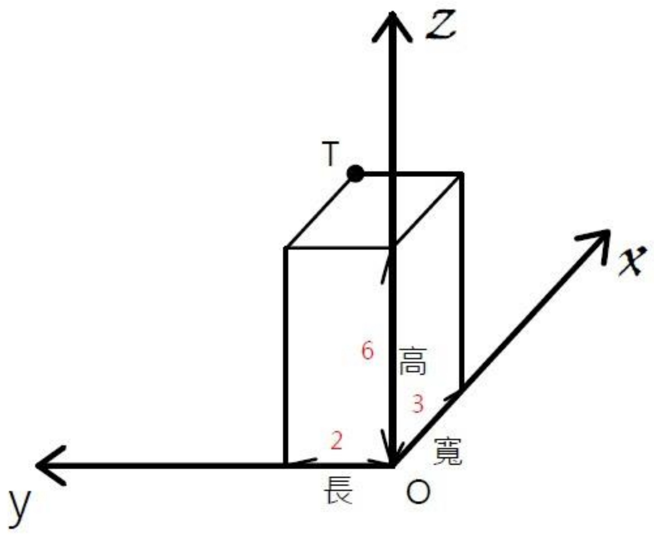
分點數：$\boxed{(長-1)+(寬-1)+(高-1)-[\gcd(長，寬)-1]}$

因長寬不互質，必須扣除長與寬之最大公因數。

通過小正方體個數：

$$
\begin{aligned}
&(長-1)+(寬-1)+(高-1)-[\gcd(長，寬)-1]+1\\
&=長+寬+高-\gcd(長，寬)-1\\
&=2+2+3-(2,2)-1\\
&=2+2+3-2-1=4\text{ 個}
\end{aligned}
$$

(3)**長、寬、高，其中一組互質，兩組不互質**情況：(以長 2，寬 3，高 6 的長方體來探討)



▲圖九

$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$

① x 軸：$0\le x\le 3$ 之間有整數點 $x=1$ 及 $x=2$

$x=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$

$\therefore\quad y=\frac{2}{3}\qquad z=2$

產生分界面上的分點：$(1,\frac{2}{3},2)$

$x=2$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$

$\therefore\quad y=\frac{4}{3}\qquad z=4$

產生分界面上的分點：$(2,\frac{4}{3},4)$

分點數表示：寬 $-1=3-1=2$ 個

② y 軸：$0\le y\le 2$ 之間有整數點 $y=1$

$y=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{x}{3}=\frac{1}{2}=\frac{z}{6}$

$\therefore \quad x=\frac{3}{2} \quad z=3$

產生分界面上的分點：$(\frac{3}{2},1,3)$

分點數表示：長$-1=2-1=1$個

③z軸：$0 \le z \le 6$之間有整數點$z=1$、$z=2$、$z=3$、$z=4$、$z=5$

$z=1$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore \quad x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{3}$

產生分界面上的分點：$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)$

$z=2$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{2}{6}$

$\therefore \quad x=1 \quad y=\frac{2}{3}$

產生分界面上的分點：$(1,\frac{2}{3},2)$

$z=3$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{3}{6}$

$\therefore \quad x=\frac{3}{2} \quad y=1$

產生分界面上的分點：$(\frac{3}{2},1,3)$

$z=4$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{4}{6}$

$\therefore \quad x=2 \quad y=\frac{4}{3}$

產生分界面上的分點：$(2,\frac{4}{3},4)$

$z=5$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{5}{6}$

$\therefore \quad x=\frac{5}{2} \quad y=\frac{5}{3}$

產生分界面上的分點：$(\frac{5}{2},\frac{5}{3},5)$

分點數表示：高$-1=6-1=5$個

寬上(x 軸)的分點：$(1,\frac{2}{3},2)$ 、$(2,\frac{4}{3},4)$

長上(y 軸)的分點：$(\frac{3}{2},1,3)$

高上(z 軸)的分點：$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1$、$(1,\frac{2}{3},2)$、$(\frac{3}{2},1,3)$、$(2,\frac{4}{3},4)$

、$(\frac{5}{2},\frac{5}{3},5)$

長、寬之最大公因數(2，3)=1　　$1-1=0$.... 無共分點

寬、高之最大公因數(3，6)=3　　$3-1=2$..... 有 2 個共分點

長、高之最大公因數(2，6)=2　　$2-1=1$..... 有 1 個共分點

有效分點：$(1,\frac{2}{3},2)$ 、$(2,\frac{4}{3},4)$ 、$(\frac{3}{2},1,3)$ 、$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)$ 、$(\frac{3}{2},1,3)$

、$(\frac{5}{2},\frac{5}{3},5)$

公式推導：

分點數：

$$\boxed{(長-1)+(寬-1)+(高-1)-[\gcd(長，高)-1]-[\gcd(寬，高)-1]}$$

通過小正方體個數：

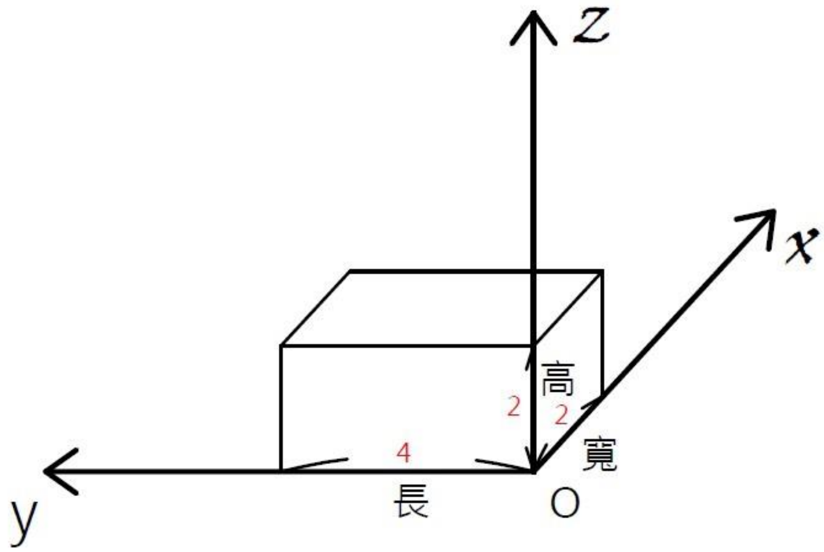
$$(長-1)+(寬-1)+(高-1)-[\gcd(長，高)-1]-[\gcd(寬，高)-1]+1$$

$$=長+寬+高-\gcd(長，高)-\gcd(寬，高)$$

$$=6+3+2-(2,6)-(3,6)$$

$$=6+3+2-2-3=6個$$

(4)**長、寬、高，皆不互質**情況：(以長 4，寬 2，高 2 的長方體來探討)



▲圖十

$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{2}$

① x軸：$0\le x\le 2$之間有整數點$x=1$

$x=1$代入$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{1}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{2}$

$\therefore\quad y=2\quad z=1$

產生分界面上的分點：$(1,2,1)$

分點數表示：寬$-1=2-1=1$個

② y 軸：$0\le y\le 4$之間有整數點$y=1$、$y=2$、$y=3$

$y=1$代入$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{z}{2}$

$\therefore\quad x=\dfrac{1}{2}\quad z=\dfrac{1}{2}$

產生分界面上的分點：$(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2})$

$y=2$代入$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{z}{2}$

$\therefore\quad x=1\quad z=1$

產生分界面上的分點：$(1,2,1)$

$y=3$代入$\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{z}{2}$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2} \quad z=\frac{3}{2}$$

產生分界面上的分點：$(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2})$

分點數表示：長$-1=4-1=3$個

③z軸：$0\leq z\leq 2$之間有整數點$z=1$

$z=1$代入$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad x=1 \quad y=2$$

產生分界面上的分點：$(1,2,1)$

分點數表示：高$-1=2-1=1$個

寬上(x軸)的分點：$(1,2,1)$

長上(y軸)的分點：$(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$、$(1,2,1)$、$(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2})$

高上(z軸)的分點：$(1,2,1)$

長、寬之最大公因數(4，2)=2　$2-1=1$......有 1 個共分點

寬、高之最大公因數(2，2)=2　$2-1=1$......有 1 個共分點

長、高之最大公因數(4，2)=2　$2-1=1$.......有 1 個共分點

長、寬、高之最大公因數(4，2，2)=2　$2-1=1$...有 1 個共分點

有效分點：$(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$、$(1,2,1)$、$(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2})$

公式推導：

分點數：

三軸共分點數$\Rightarrow$gcd(長，寬，高)-1...留到最後再扣除

$$(長-1)+(寬-1)+(高-1)-\{[\gcd(長，寬)-1]-\gcd(長，寬，高)-1\}$$
$$-\{[\gcd(長，高)-1]-\gcd(長，寬，高)-1\}$$

$-\{[\gcd(\text{寬，高})-1]-\gcd(\text{長，寬，高})-1\}$

$-2[\gcd(\text{長，寬，高})-1]$

三軸共點只能留下一組，必須扣除兩組。

整理後：

$$\boxed{\text{長}+\text{寬}+\text{高}-\gcd(\text{長，寬})-\gcd(\text{長，高})-\gcd(\text{寬，高})+\gcd(\text{長，寬，高})-1}$$

通過小正方體個數：

$\text{長}+\text{寬}+\text{高}-\gcd(\text{長，寬})-\gcd(\text{長，高})-\gcd(\text{寬，高})+\gcd(\text{長，寬，高})-1+1$

$=\text{長}+\text{寬}+\text{高}-\gcd(\text{長，寬})-\gcd(\text{長，高})-\gcd(\text{寬，高})+\gcd(\text{長，寬，高})$

$=4+2+2-(4,2)-(4,2)-(2,2)+(4,2,2)$

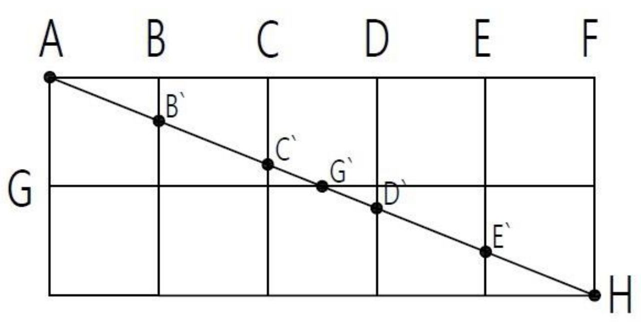
$=4+2+2-2-2-2+2=4$個

五、研究結果與討論

研究結果

1、研究平面中，長a單位、寬b單位的長方形可分成ab個邊長為1單位的小正方形，其對角線可通過多少個小正方形；以下可分為幾種情況:

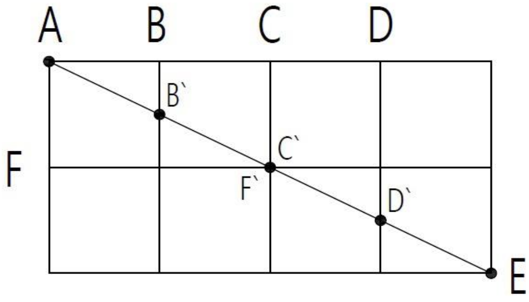
(1)**長、寬互質**:(以長5單位，寬2單位的長方形來探討)



▲圖十一(長5單位，寬2單位)

結果：當長寬互質時，對角線通過的小正方形數$\Rightarrow$長+寬-1

(1)**長、寬不互質**:(以長 4 單位，寬 2 單位的長方形來探討)

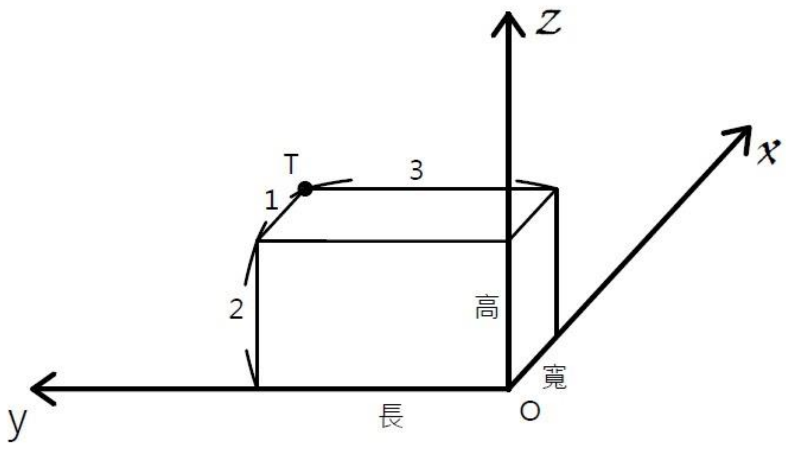


▲圖十二(長 4 單位，寬 2 單位)

結果:當長寬不互質時,對角線通過的小正方形數⇒長＋寬－n

2、研究空間中，長a單位、寬b單位，高c單位長方體，可分成abc個邊長為 1 單位的小正方體，其對角線(距離最遠的兩點)共可通過多少個小正方體；以下可分為幾種情況:

(1)**長、寬、高，兩兩互質**之情況：(以長 3，寬 1，高 2 的長方體來探討)

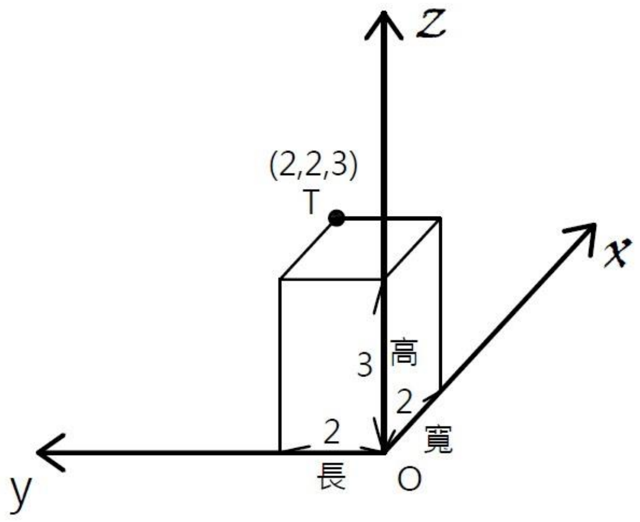


▲圖十三

結果：長、寬、高，兩兩互質，對角線通過小正方體個數

⇒長＋寬＋高－2

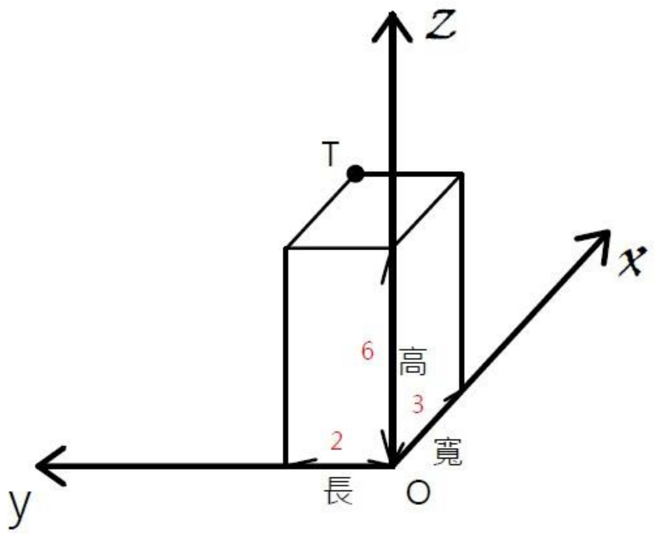
(2)**長、寬、高，其中兩組互質，一組不互質**情況：(以長 2，寬 2，高 3 的長方體來探討)



▲圖十四

結果：長、寬、高，其兩組互質，一組不互質情況，對角線通過小正方體個數$\Rightarrow$ 長 + 寬 + 高 − gcd(長， 寬) − 1

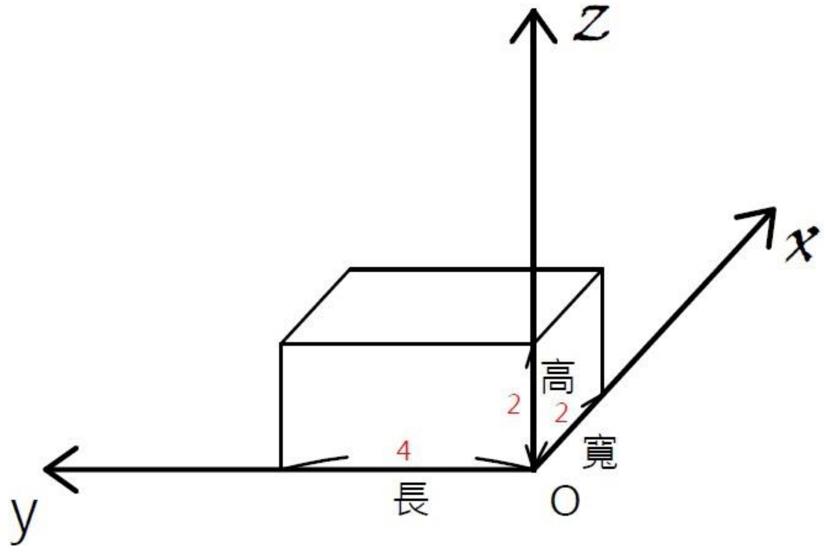
(3)**長、寬、高，其中一組互質，兩組不互質**情況：(以長 2，寬 3，高 6 的長方體來探討)



▲圖十五

結果：長、寬、高，其一組互質，兩組不互質情況，對角線通過小正方體個數$\Rightarrow$ 長 + 寬 + 高 − gcd(長， 高) − gcd(寬， 高)

(4)**長、寬、高，皆不互質**情況：(以長 4，寬 2，高 2 的長方體來探討)



▲圖十六

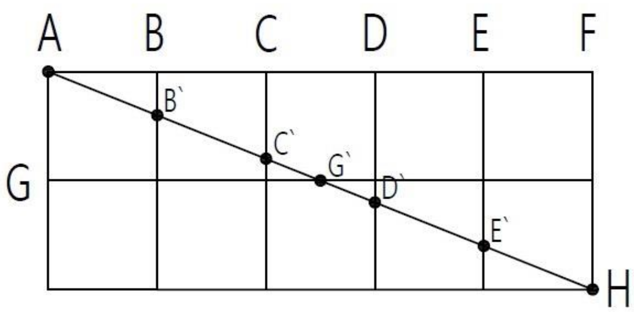
結果：長、寬、高，皆不互質情況，對角線通過小正方體個數

$\Rightarrow$ 長 + 寬 + 高 − gcd(長，寬) − gcd(長，高) − gcd(寬，高) + gcd(長，寬，高)

討論

1、研究平面中，長a單位、寬b單位的長方形可分成ab個邊長為 1 單位的小正方形，其對角線可通過多少個小正方形；以下可分為幾種情況:

(1)**長、寬互質**:(以長 5 單位，寬 2 單位的長方形來探討)



▲圖十七(長 5 單位，寬 2 單位)

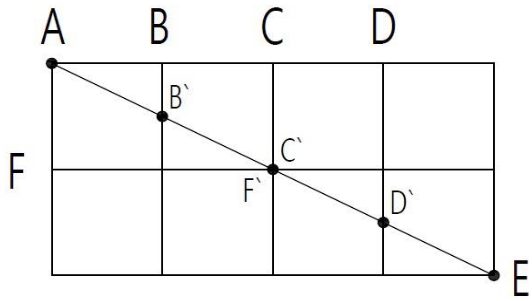
①從以上發現長方形對角線能通過的小正方形跟長寬能提供的交點有關，這些交點也是對角線的分點，而分點之間就是一個區域。

②延伸探討：若小格子並非正方形，而是小長方形，是否有相同結果？

答：B、C、D、E、往下延伸跟$\overline{AH}$產生 4 個交點也就是 4 個分點 G 往右與$\overline{AH}$產生 1 個交點也就是 1 的分點。所以共 5 個分點通過 6 個長方形，所以結論與正方形相同，因為主要取決在往下及往右與對角線的交點數，因此只要往右、往下不在同一點，小格子是正方形或長方形並無差別，所通過的格子一樣是長＋寬－1。

1 即為長與寬之最大公因數(互質)。

(2)**長、寬不互質**:(以長 4 單位，寬 2 單位的長方形來探討)



▲圖十八(長 4 單位，寬 2 單位)

①當長方形長與寬不互質時會有往下、往右共點的問題以致於分點減少通過小正方形個數也會減少，而減少數量也與大長方形的相似數量有關。

結果：當長寬不互質時，對角線通過的小正方形數

⇒長＋寬－n

n 代表通過圖形中與大長方形相似個數，即為長與寬之最大公因數。

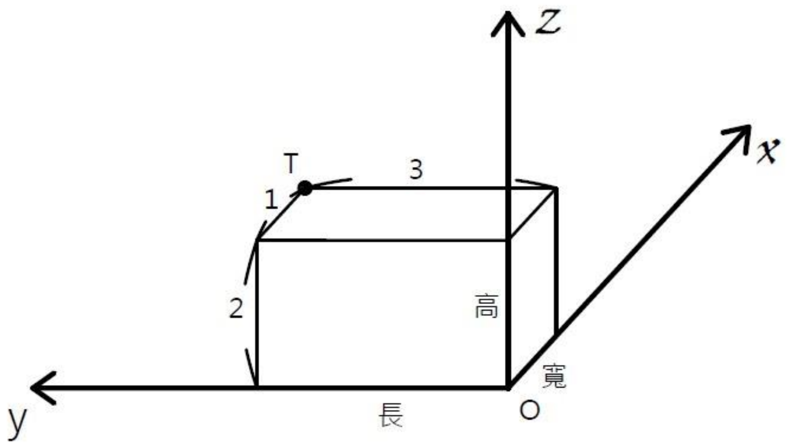
②n的探討：代表長與寬之最大公因數。由兩數最大公因數的分析了解，最大公因數可代表兩數比值相同的有幾組。

例如：$\frac{15}{25}$如果約掉最大公因數5，就成最簡分數$\frac{3}{5}$表示$\frac{3}{5}$可擴分，分子、分母乘以1、2、3、4、5，回到 $\frac{15}{25}$ ，故最大公因數可代表兩數有多少組相同的比值。

平面中，長a單位、寬b單位的長方形可分成ab個邊長為1單位的小正方形，其對角線可通過$\boxed{長+寬-\gcd(長，寬)}$個小正方形。

2、研究空間中，長a單位、寬b單位，高c單位長方體，可分成abc個邊長為1單位的小正方體，其對角線(距離最遠的兩點)共可通過多少個小正方體；以下可分為幾種情況:

(1)**長、寬、高，兩兩互質**之情況：(以長3，寬1，高2的長方體來探討)



▲圖十九

由研究過程推導出對角線通過小正方體個數：長+寬+高−2

分析： 長＋寬＋高－2

＝長＋寬＋高－1－1－1+1

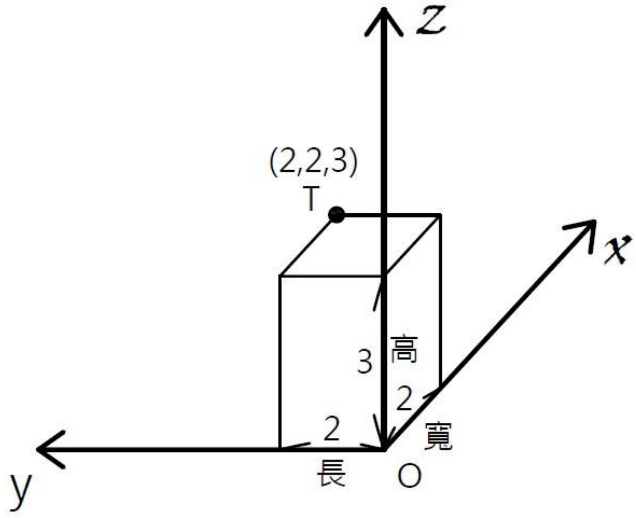
＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高)－gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)

gcd(長，寬)＝1
gcd(長，高)＝1
gcd(寬，高)＝1
gcd(長，寬，高)＝1

驗證：3+1+2－(3,1)－(3,2)－(1,2)+(3,1,2)

＝3+1+2－1－1－1+1＝4......通過 4 個小正方體

(2)**長、寬、高，其中兩組互質，一組不互質**情況：(以長 2，寬 2，高 3 的長方體來探討)



▲圖二十

由研究過程推導出對角線通過小正方形個數：

長＋寬＋高－gcd(長，寬)－1

分析：長＋寬＋高－gcd(長，寬)－1

＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－1－1+1

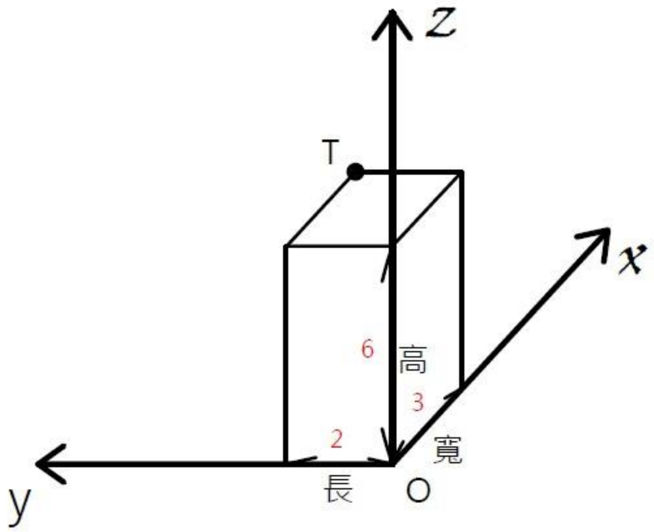
gcd(長，寬)≠1
gcd(長，高)＝1
gcd(寬，高)＝1
gcd(長，寬，高)＝1

＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高)－gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)

驗證：2＋2＋3－(2，2)－(2，3)－(2，3)＋(2，2，3)

＝2＋2＋3－2－1－1＋1＝4……通過 4 個小正方體

(3)**長、寬、高，其中一組互質，兩組不互質**情況：(以長 2，寬 3，高 6 的長方體來探討)



▲圖二十一

由研究過程推導出對角線通過小正方形個數：

長＋寬＋高－gcd(長，高)－gcd(寬，高)

分析：長＋寬＋高－gcd(長，高)－gcd(寬，高)

＝長＋寬＋高－gcd(長，高)－gcd(寬，高)－1＋1

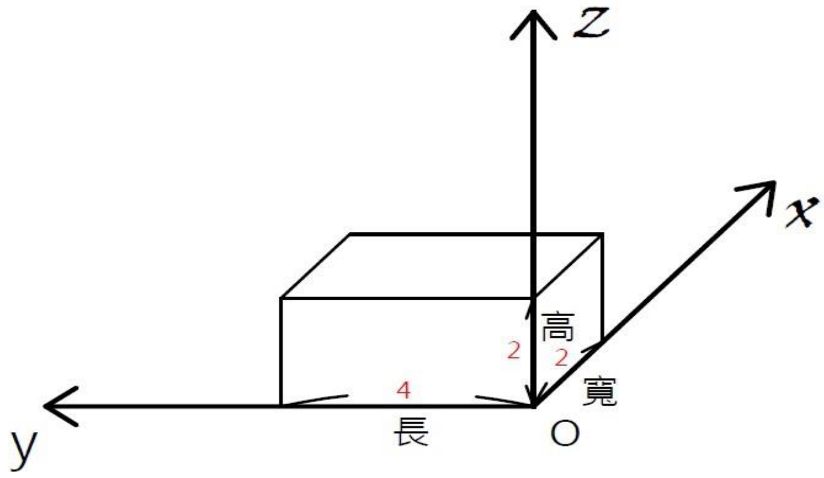
＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高)－gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)

gcd(長，寬)＝1
gcd(長，高)≠1
gcd(寬，高)≠1
gcd(長，寬，高)＝1

驗證：2＋3＋6－(2，6)－(3，6)－(2，3)＋(2，3，6)

＝2＋3＋6－2－3－1＋1＝6……通過 6 個小正方體

(4)**長、寬、高，皆不互質**情況：(以長 4，寬 2，高 2 的長方體來探討)



▲圖二十二

由研究過程推導出對角線通過小正方形個數：

$$長+寬+高-\gcd(長，寬)-\gcd(長，高)-\gcd(寬，高)+\gcd(長，寬，高)$$

驗證：$2+4+2-(2,4)-(2,2)-(2,4)+(2,4,2)$

$=2+4+2-2-2-2+2=4$......通過 4 個小正方體

$\gcd(長，寬)\neq1$
$\gcd(長，高)\neq1$
$\gcd(寬，高)\neq1$
$\gcd(長，寬，高)\neq1$

六、評鑑與檢討

1、研究動機

(1)面臨問題與省思:在一開始尋找題目時，因為找不道適合的題目方向,所以耗了很長的一段時間，也換了好幾次題目。可能是因為第一次做獨立研究，所以不是很了解他的規則。

(2)解決方法與收穫:後來我們與指導老師一起討論，並分享組員彼此的意見,老師整理我們的意見後，就向我們建議參考以前的作品,說不定就有靈感湧現。

(3)學到的收穫:如果有問題就該當下提問，大家一起集思廣益，就能快速得到彼此客觀的想法，比起自己埋頭苦幹更有效率，這樣一開始也就不會花費多餘的時間換數個題目。

2、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(1)面臨問題及省思:在擬定正式計畫與工作進度表的時候，遇到排版的問題，因為我們不是電腦好手，所以遇到了一些瓶頸:像是不知道如何打表格、行高、插入圖片、加入文字說明、改變它的樣式和怎樣排版較美觀。

(2)解決方法與收穫:我們先上網查詢編排的方法，但因為實在看不懂，所以就請教電腦老師，老師一一向我們說明，經過了好一段時間的學習才解決那些疑惑。

(3)學到的收穫:趁這次的機會多向老師學習電腦的技術，以後也能在多處派上用場，平時打報告也就能駕輕就熟。現學的技巧也協助媽媽在工作上使用電腦排版時，提高工作效率。

3、彙整相關文獻

起初，本組在找尋資料時，因為經驗不成熟，不知道查詢時的關鍵字， 所以屢次查不到本組需要的資料，但經過請教老師及和同學相互討論，發現我們的技術和效率變好了，更能在短時間內掌握所有資料，也讓本組對幾何學上有了更進一步的了解，使我們獲益良多。

4、資料分析

此研究的相關文獻資料大都是課外延伸，方法都頗深澀與國中課本有些的出入, 彙整相關文獻有其困難度，但本組多請教指導老師，不吝嗇提出疑問才解決一切。

5、研究結果與討論

(1)**面臨問題與省思**:最繁複的階段,需要不斷的演算、驗算，因此在記錄過程中,常會遇到一些團隊間的衝突,沒分配好工作任務就會引起不必要的內鬨，導致作品停滯不前。

(2)**解決方法與收穫**：我們經過一段時間的調適,慢慢與彼此訴說自己的想法,就能盡快排解紛爭,減緩彼此的摩擦,繼續我們的實驗,避免作品沒有進度。

七、參考資料

1、國中數學第二冊第二章平面直角座標系，南一書局。

2、國中數學第五冊第一章比例線段與相似形，南一書局。

3、國中數學第六冊第二章立體幾何圖形，南一書局。

4、維基百科，空間直線及其方程

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A9%BA%E9%97%B4%E7%9B%B4%E7%BA%BF%E5%8F%8A%E5%85%B6%E6%96%B9%E7%A8%8B