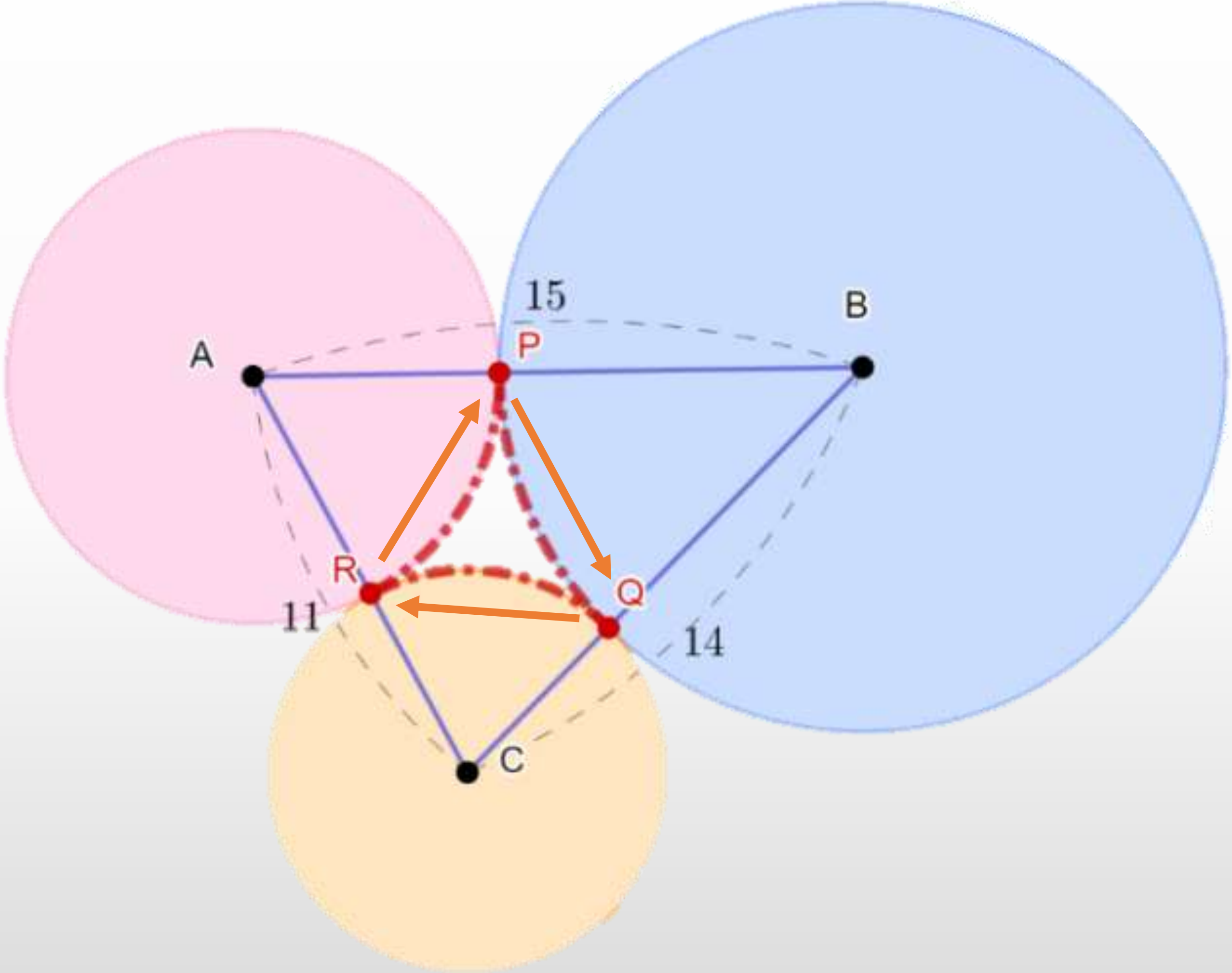
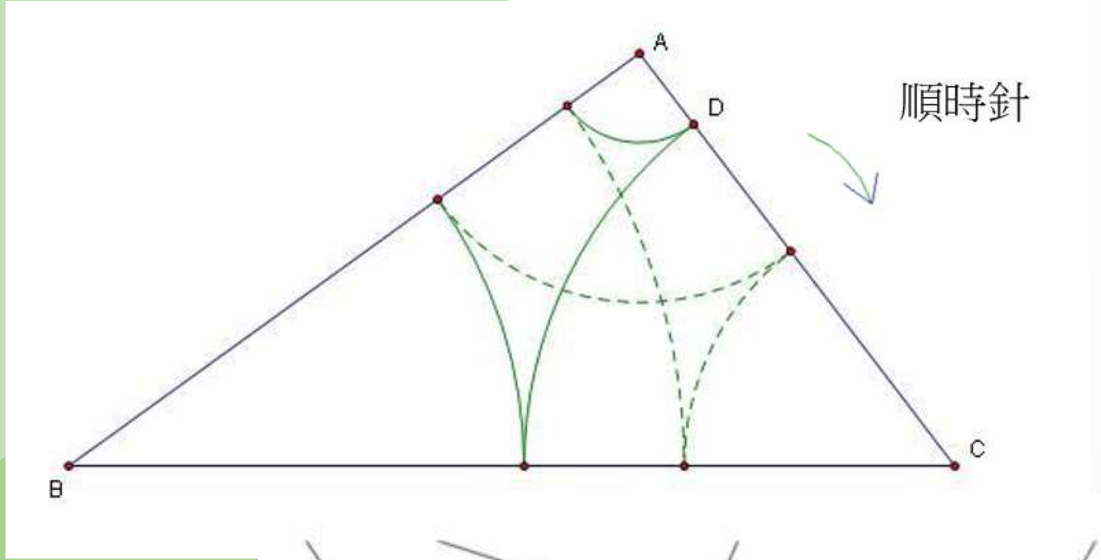
利用兩圓相切探討多邊形內外循環之規律

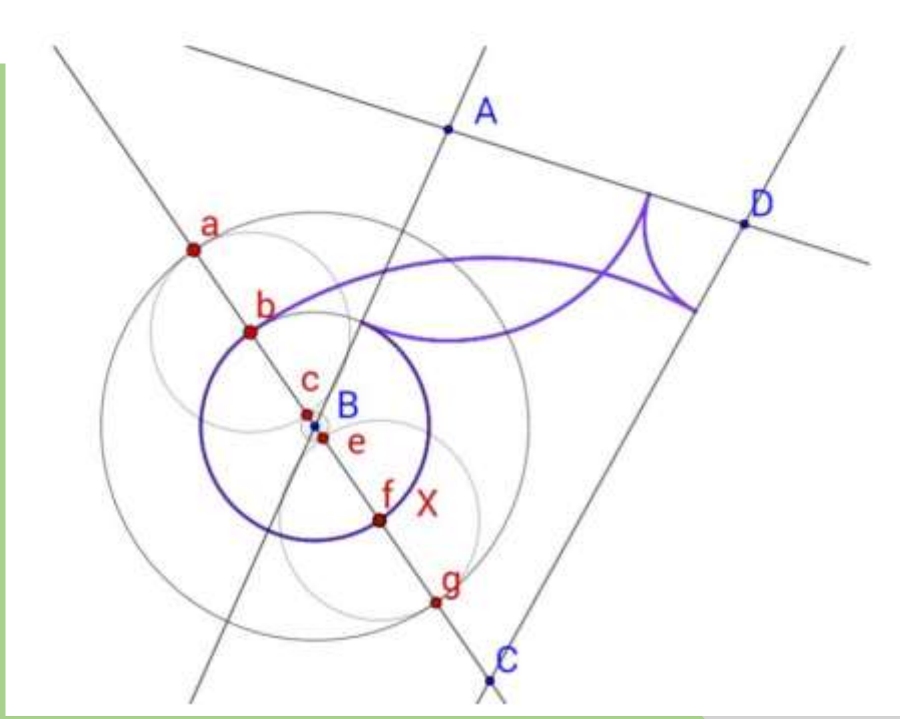
研究動機

「請問圓A、B、C的半徑為何?」



尋找資源

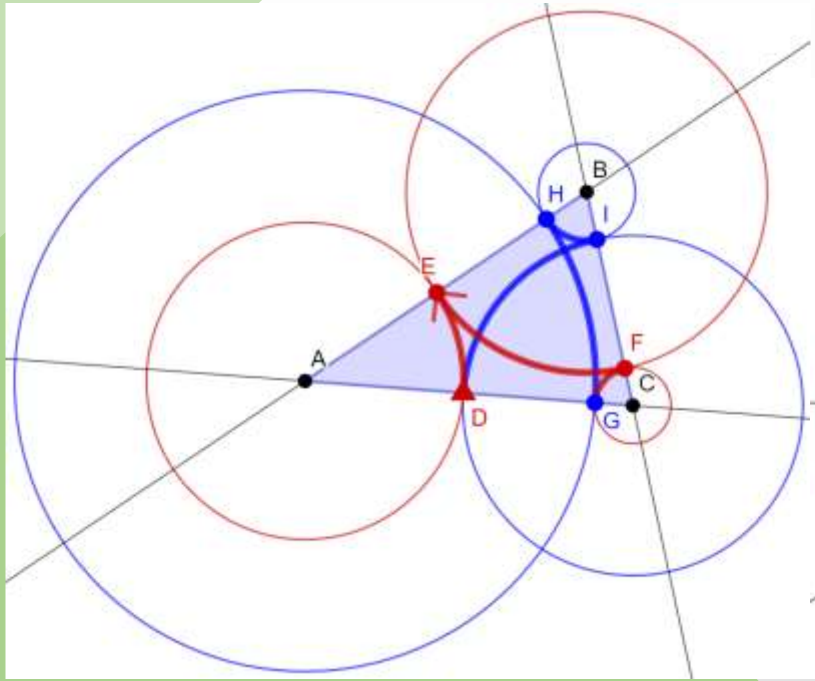




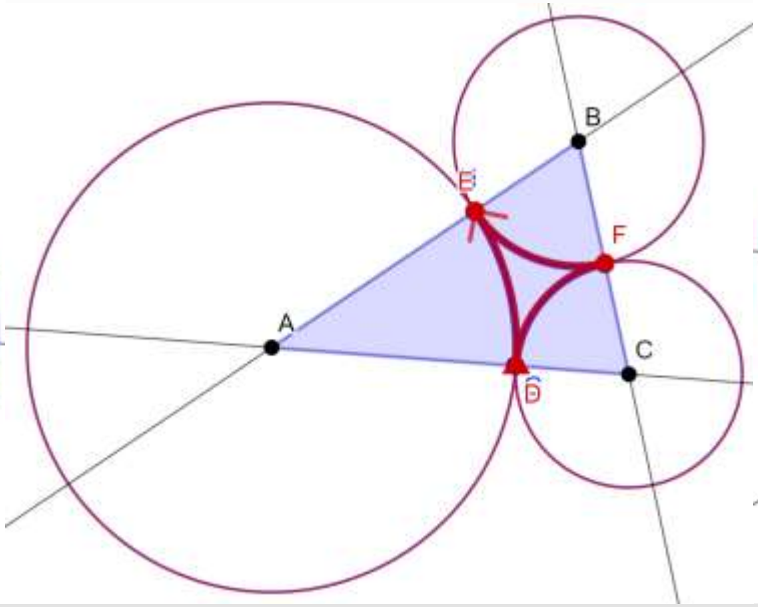
- 在《圓舞曲》一文中利用多邊形的頂點為圓心，按順(逆)時針方向依序畫弧，探討在N邊形中產生的回歸現象及規則。
- 在《被困住的「圓」桌武士》一文中提出了將畫弧的軌跡延伸至邊的延長線上亦會出現回歸現象。

從文獻中產生的靈感

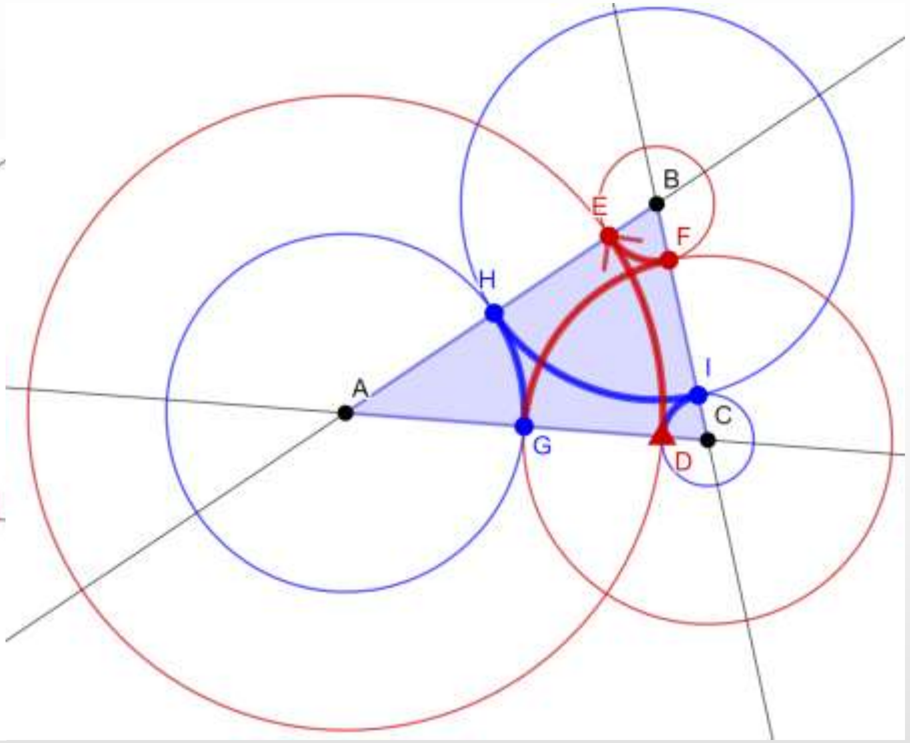
1. 起始點D位置的移動



二次循環



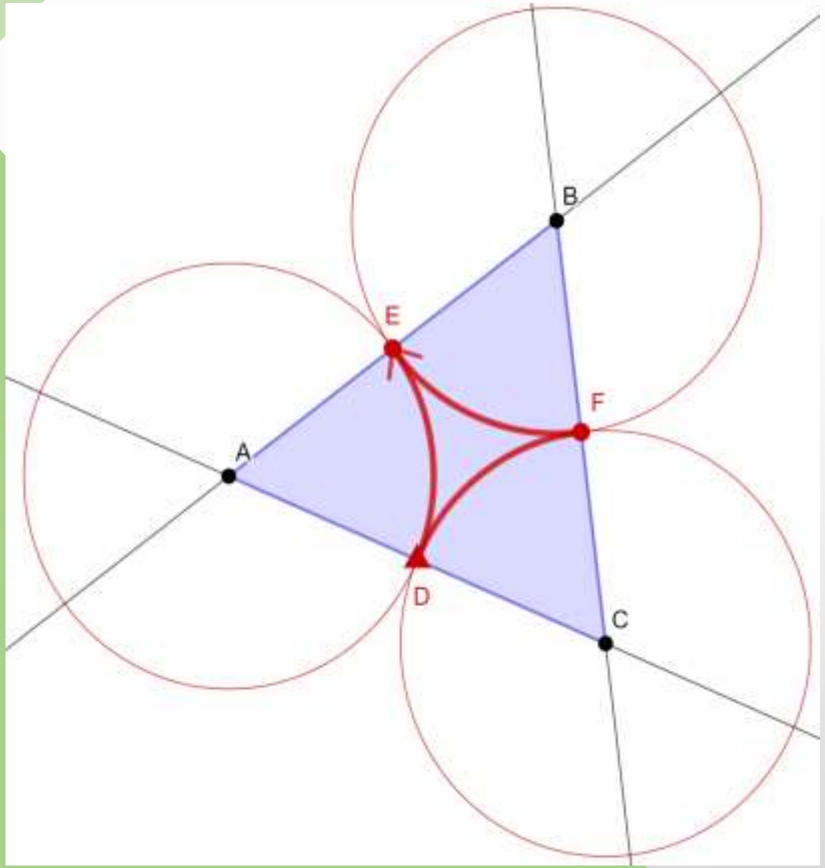
一次循環



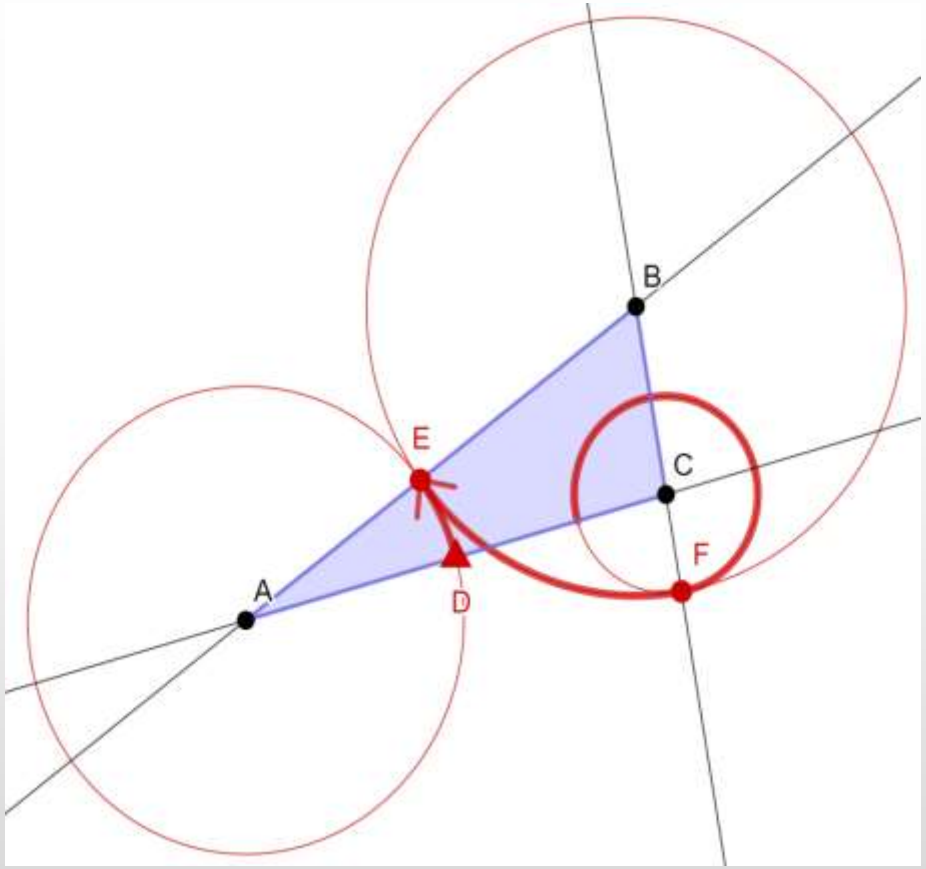
二次循環

從文獻中產生的靈感

2. 邊長改變下，圖形的變化



可以循環

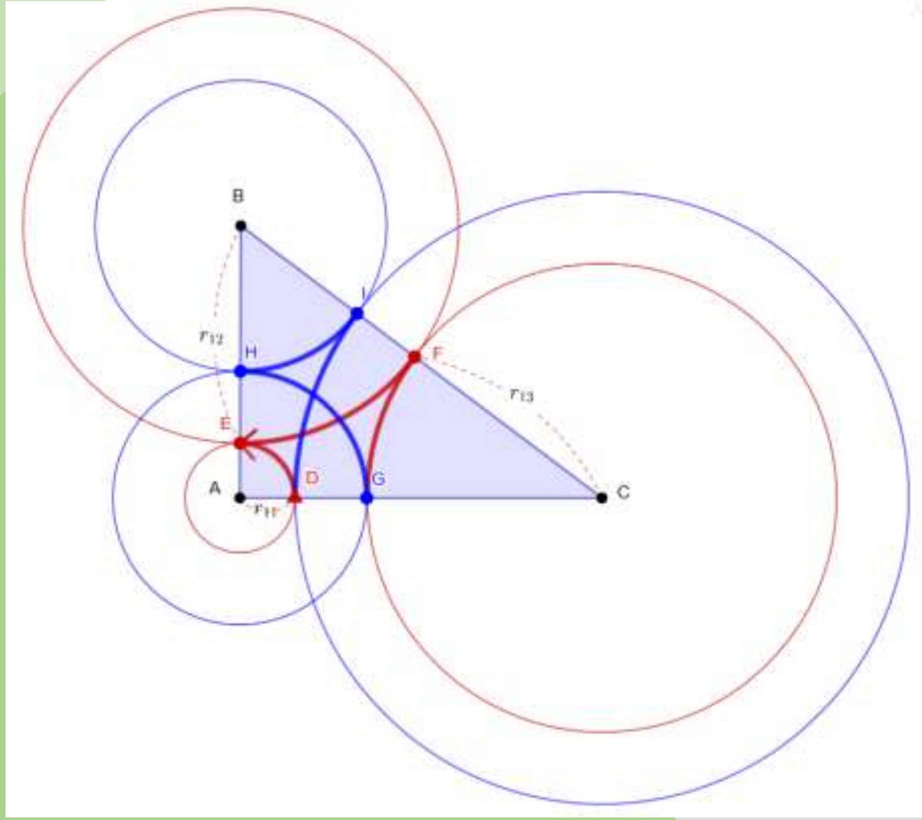


無法循環，**內切**的出現?

研究歷程

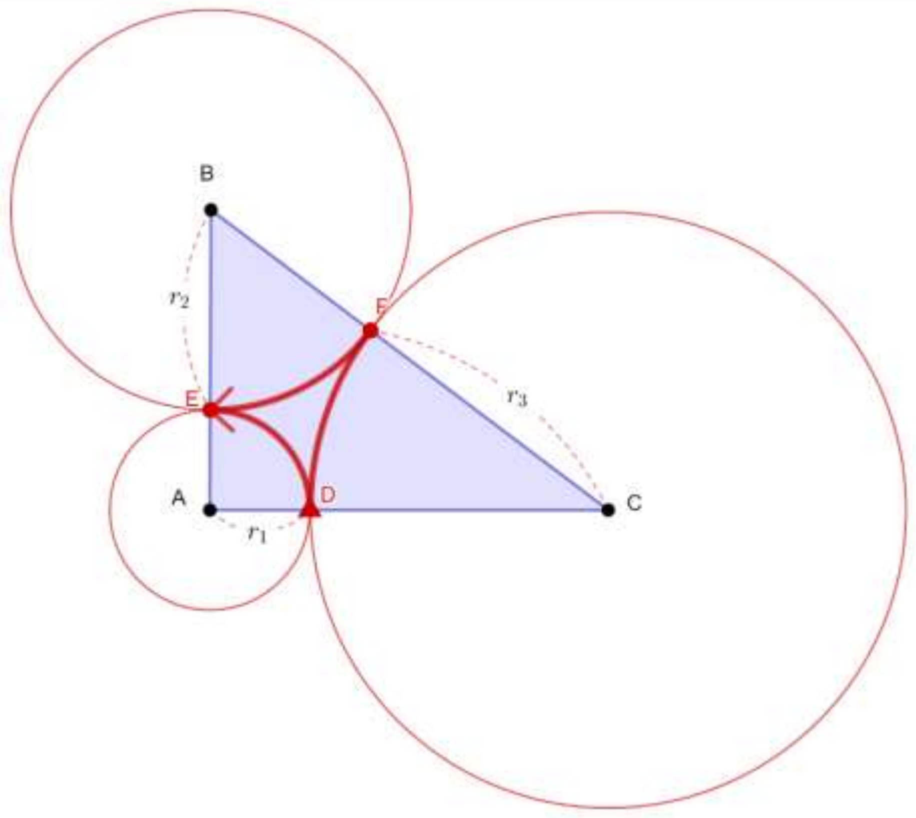
一、三角形中，利用圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

1. 零個內切(皆外切)



零個內切(皆外切，二次循環)

$$r_{11} \neq \frac{a-b+c}{2}$$

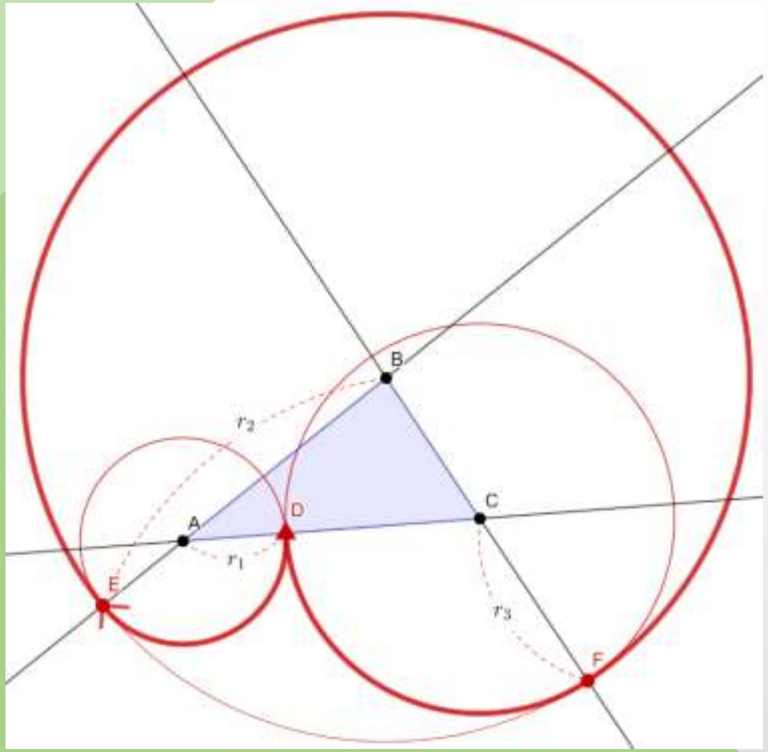


零個內切(皆外切，一次循環)

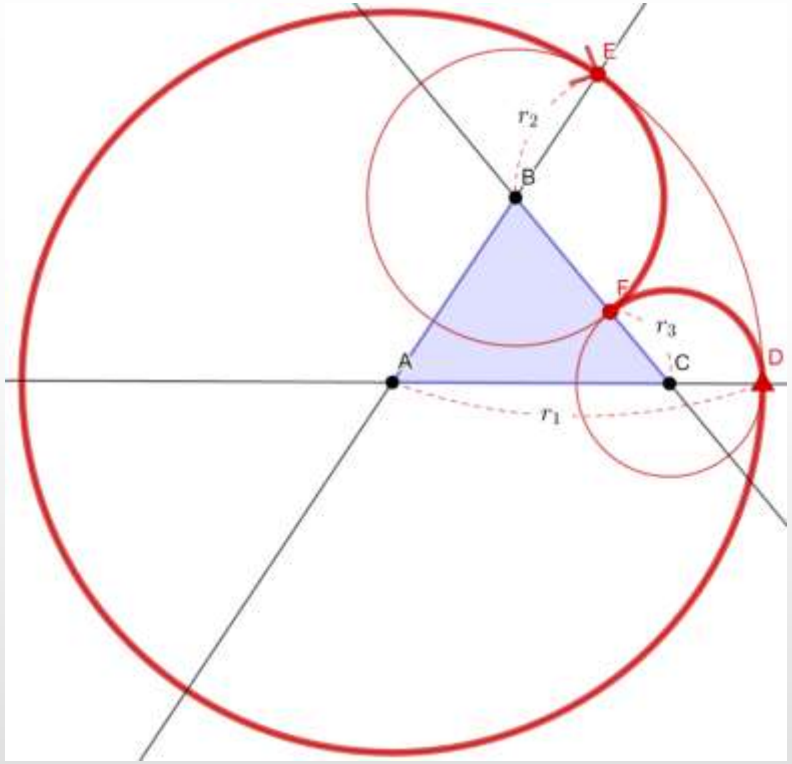
$$r_{11} = \frac{a-b+c}{2}$$

研究歷程

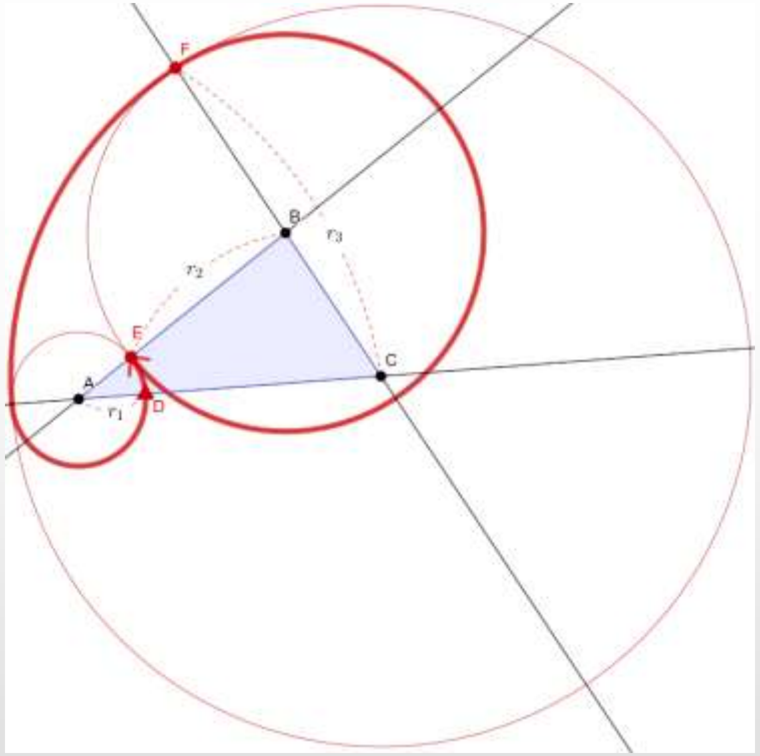
2. 二個內切



內切→內切→外切



內切→外切→內切

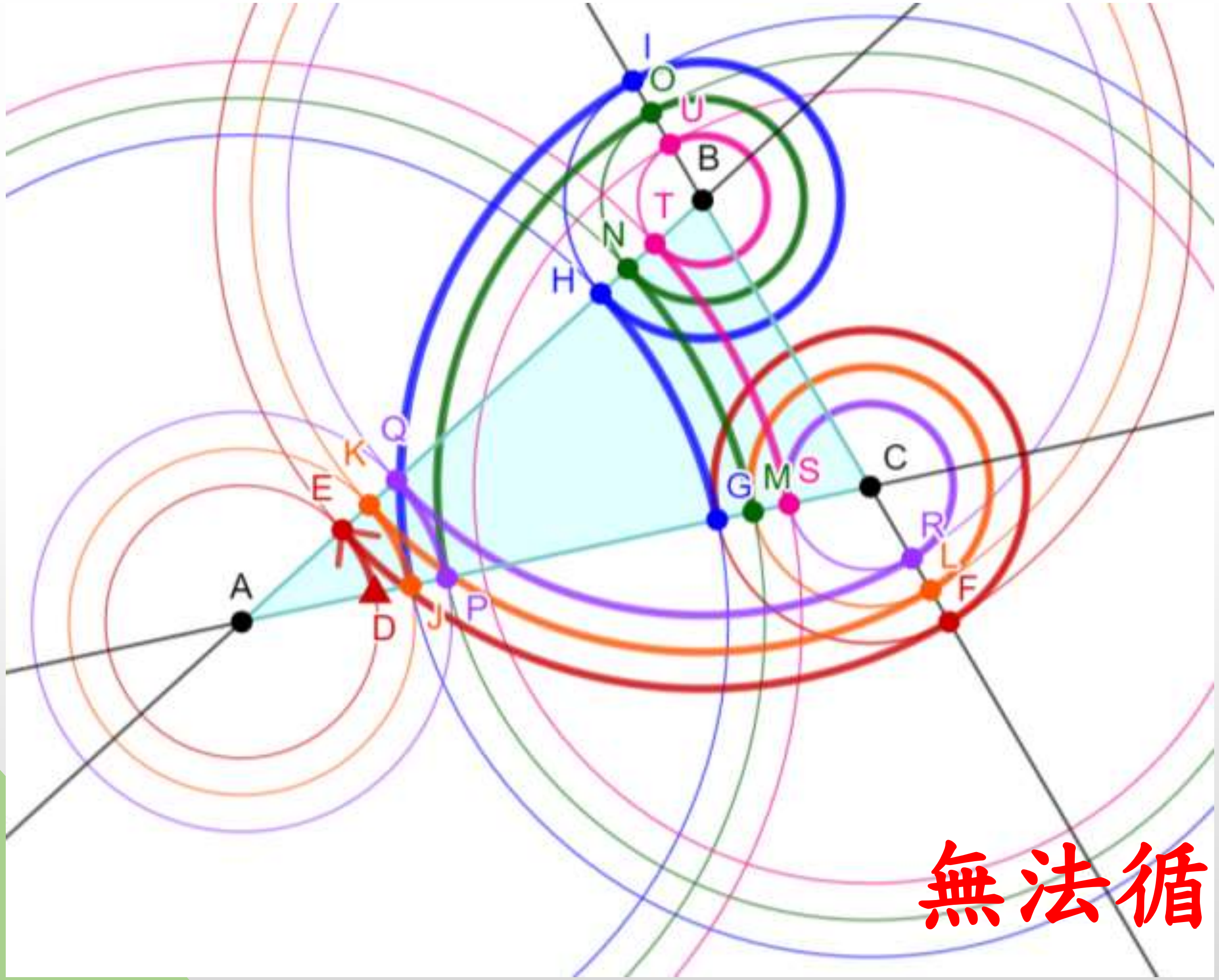


外切→內切→內切

研究歷程

3. 一個內切

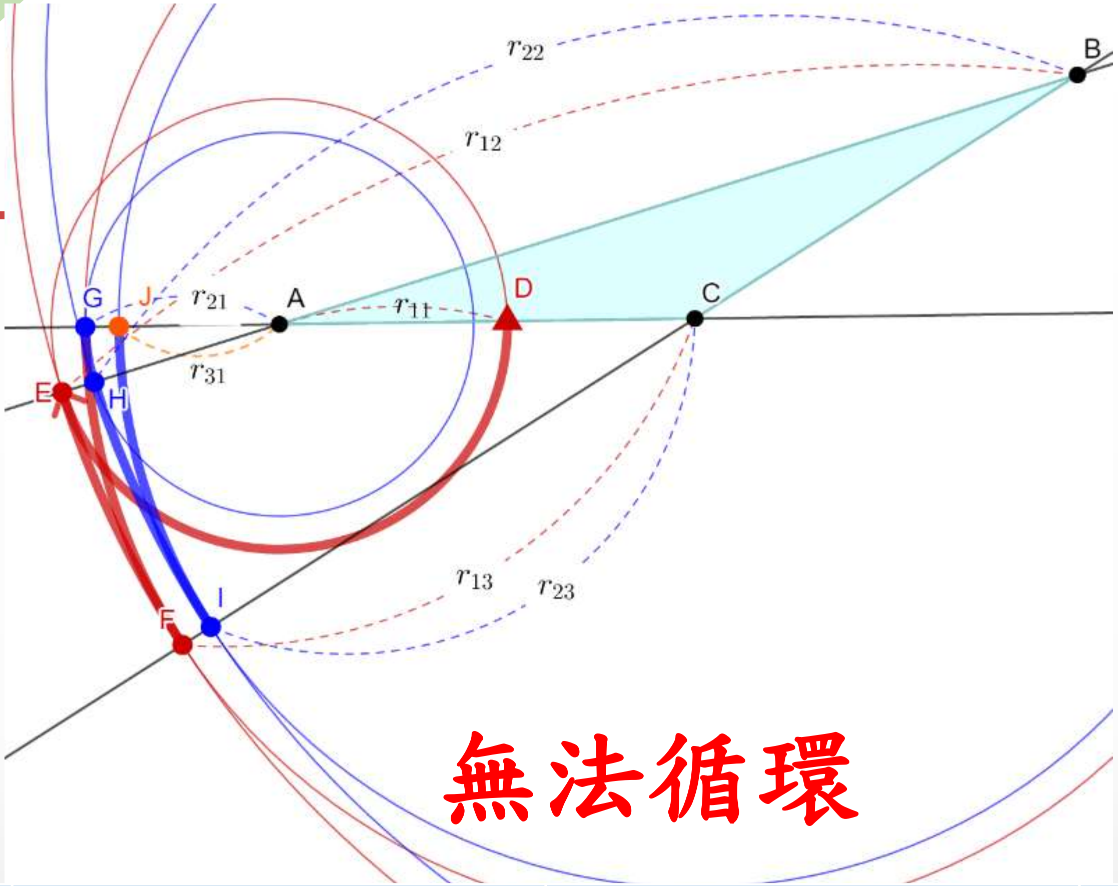
外切→內切→外切



無法循環

研究歷程

4. 三個內切



無法循環

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+(\mathrm{a}-\mathrm{b}-\mathrm{c})$	$r_{31}=x+2(a-b-c)$	$r_{41}=x+3(a-b-c)$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b-c$	$r_{32}=x+3a-2b-2c$	$r_{42}=x+4a-3b-3c$
	$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x+2a-2b-c$	$r_{33}=x+3a-3b-2c$	$r_{43}=x+4a-3b-3c$

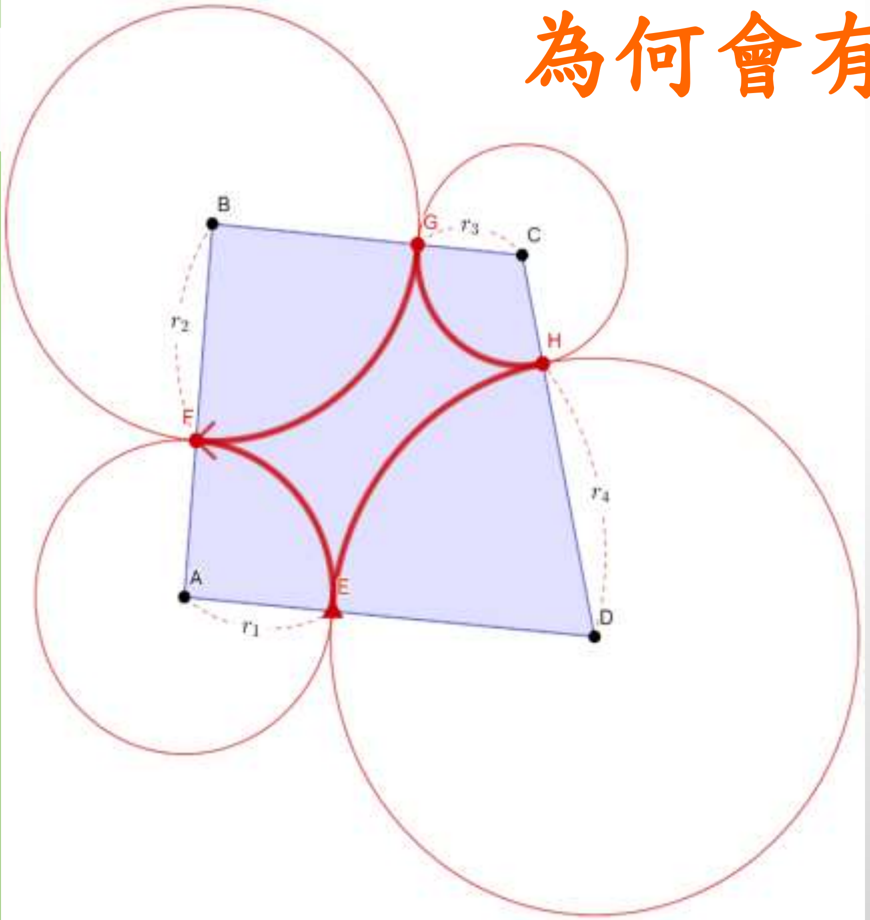
公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$　公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$　公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$

★ 三角形中，利用圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

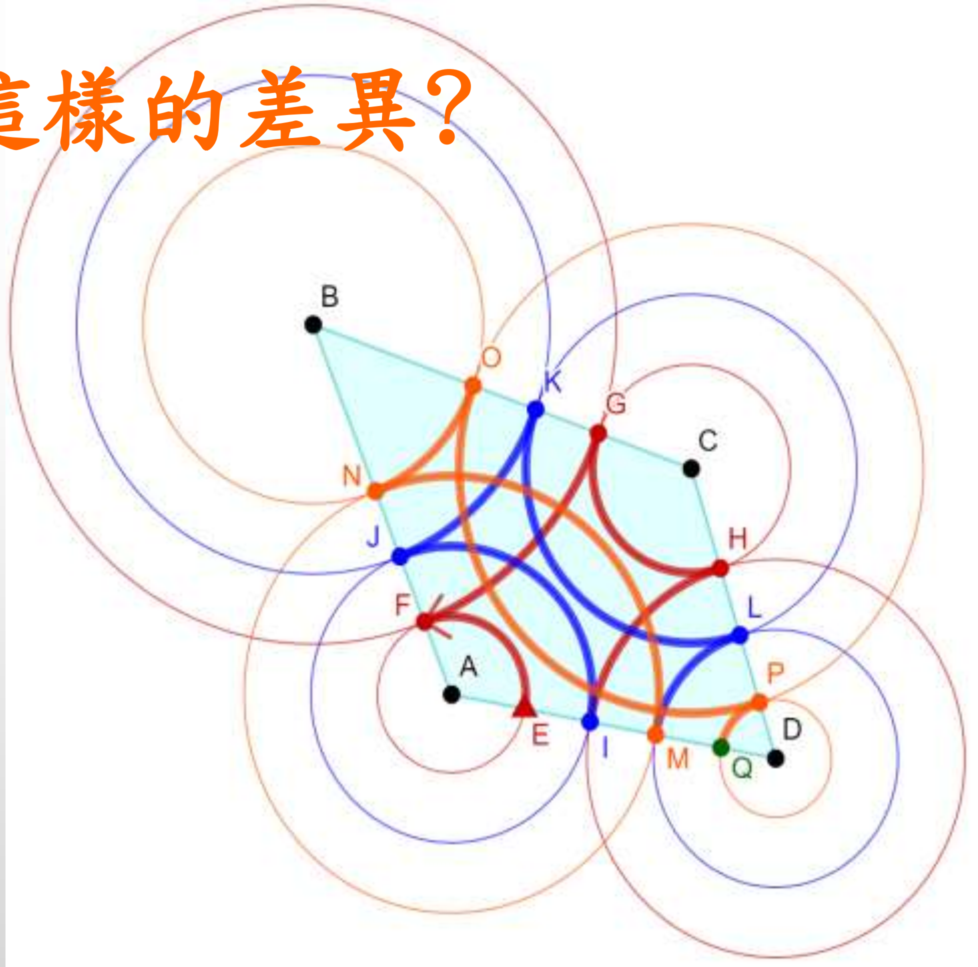
情況/相鄰兩圓	$C_A \rightarrow C_B$	$C_B \rightarrow C_C$	$C_C \rightarrow C_A$	是否能繞回
零個內切(皆外切)	外切	外切	外切	V
一個內切	外切	內切	外切	X
二個內切	內切	內切	外切	V
	內切	外切	內切	V
	外切	內切	內切	V
三個內切	內切	內切	內切	X

二、四邊形中，利用圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

為何會有這樣的差異?



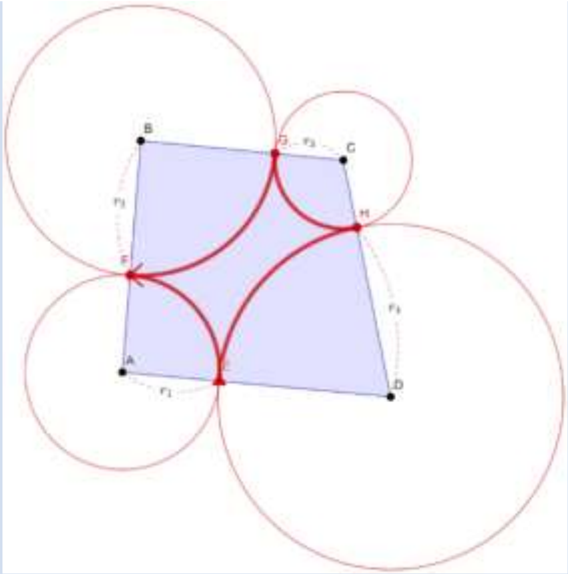
可一次循環



無法循環

研究歷程

★ 四邊形可否完成循環的關鍵

	圖示	列方程
可一次循環		設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CD}=\mathrm{c}$，$\overline{DA}=\mathrm{d}$ 則$\begin{cases} r_1+r_2=a \\ r_2+r_3=b \\ r_2+r_3=c \\ r_1+r_4=d \end{cases} \Rightarrow a+c=b+d$ 也就是說$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}$。由此可知， 若**兩組對邊長度相加等值**，則能一次循環。

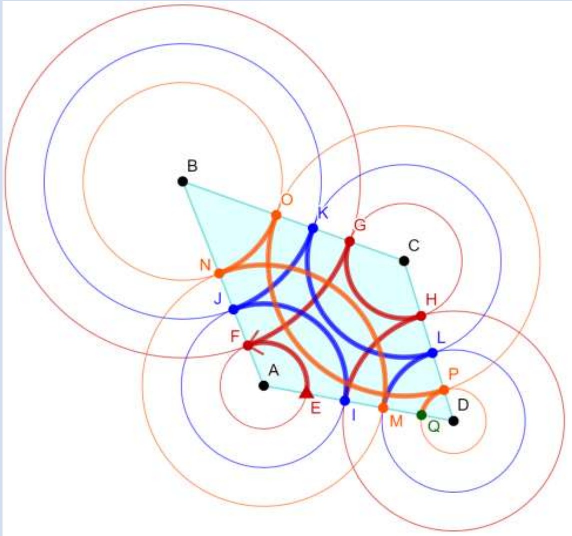
	第一輪	第二輪
半徑	$\boldsymbol{r_{11}}=x$	$r_{21}=x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}=x=\boldsymbol{r_{11}}$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=-x+2a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d}=r_{12}$
	$r_{13}=x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=x-2a+2\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}=r_{13}$
	$r_{14}=-x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=-x+2a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-\mathrm{d}=r_{14}$

研究歷程

★ 四邊形可否完成循環的關鍵

不可循環

圖示



列方程

$$r_{11}+r_{12}+r_{13}+r_{14}$$
$$=r_{21}+r_{22}+r_{23}+r_{24}$$
$$=\cdots$$
$$=r_{n1}+r_{n2}+r_{n3}+r_{n4}\neq\frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

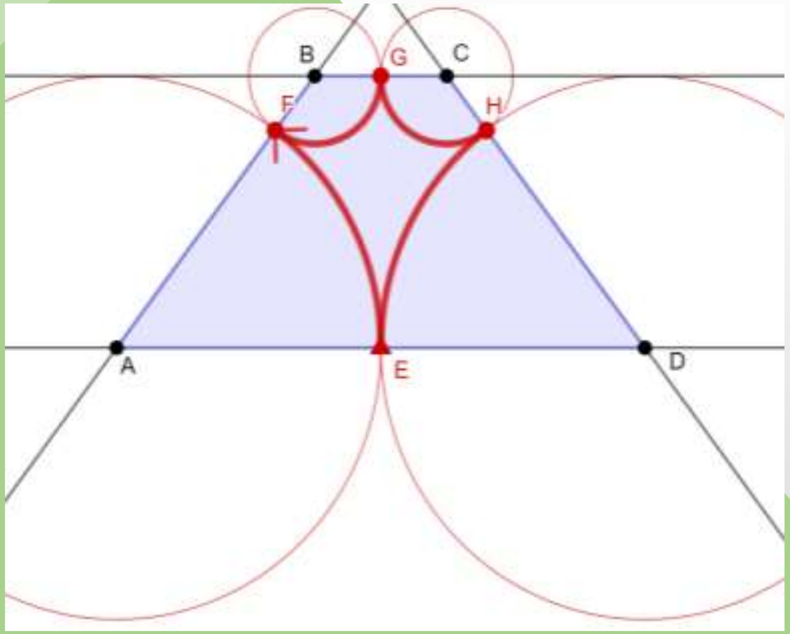
若$a+c\neq b+d$，也就是**兩組對邊長度相加不等值**則無法循環回到原起始點。

半徑	第一輪	第二輪	第三輪
	$r_{11}=x$	$r_{21}=x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$	$r_{31}=x-2a+2\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2\mathrm{d}$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=-x+2a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d}$	$r_{32}=-x+3a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-2\mathrm{d}$
	$r_{13}=x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=x-2a+2\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$	$r_{33}=x-3a+3\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2\mathrm{d}$
	$r_{14}=-x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=-x+2a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-\mathrm{d}$	$r_{34}=-x+3a-3\mathrm{b}+3\mathrm{c}-2\mathrm{d}$

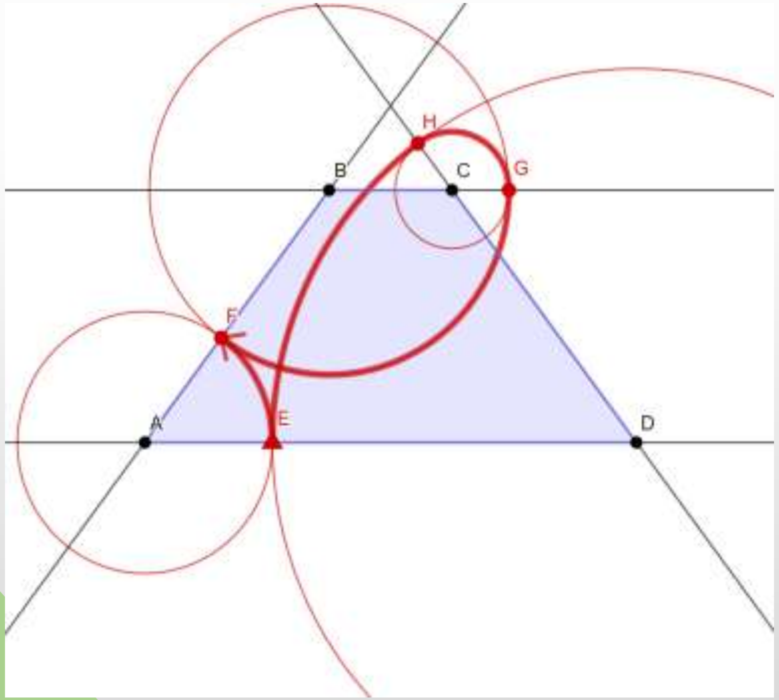
研究歷程

(一)四邊形(兩組對邊長度相加等值)

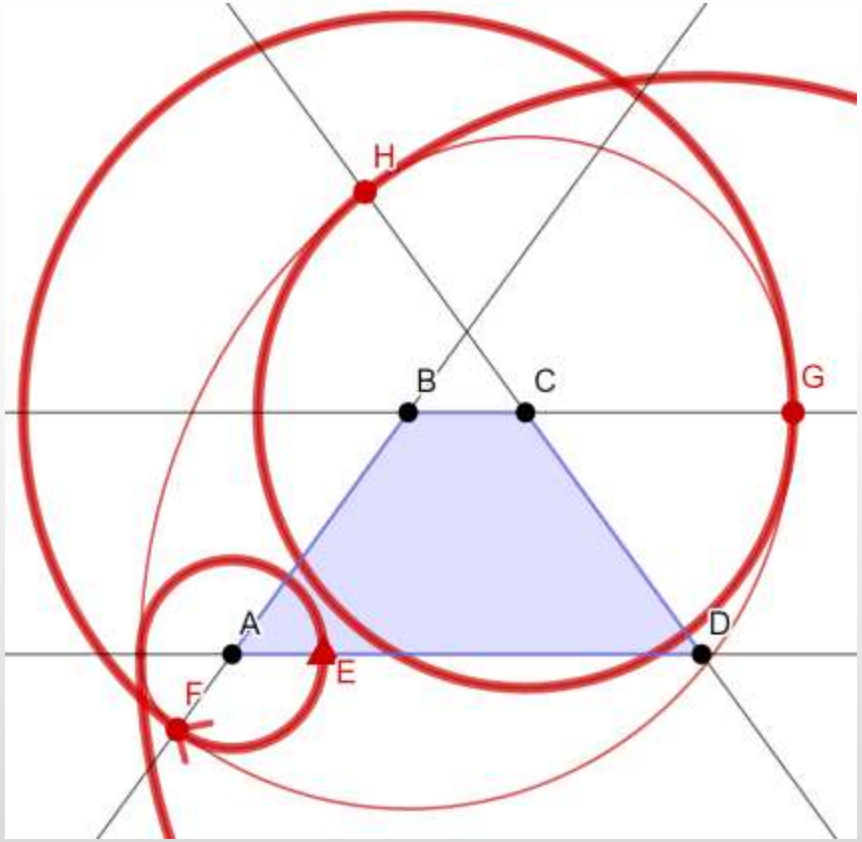
★ 偶數個內切才能循環，且僅能一次循環!



零個內切(皆外切)



兩個內切(外內內外)

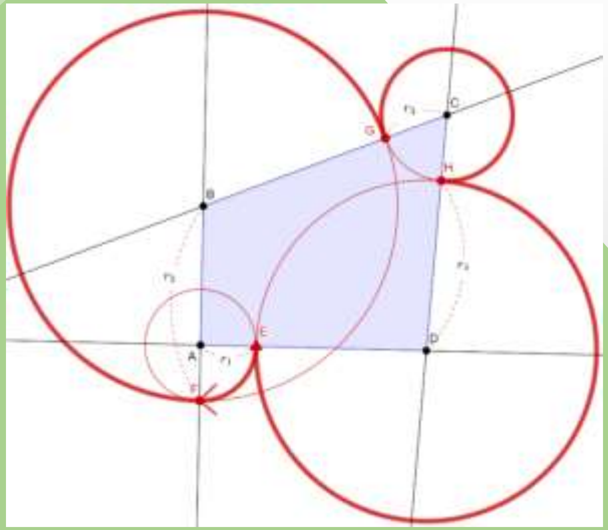


四個內切

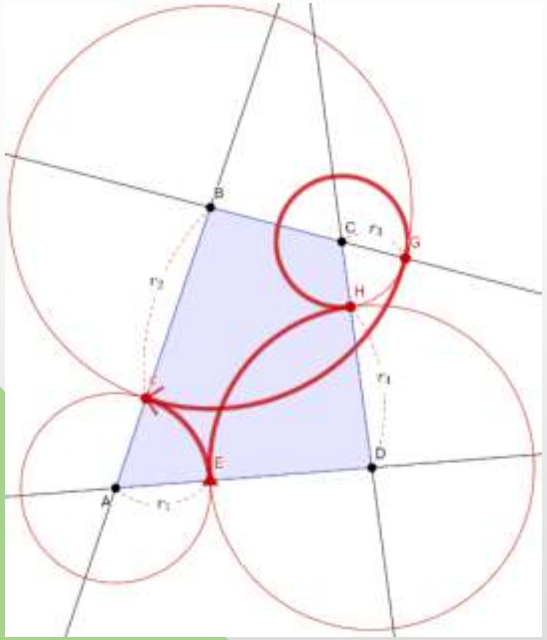
研究歷程

(二)四邊形(兩組對邊長度相加不等值)

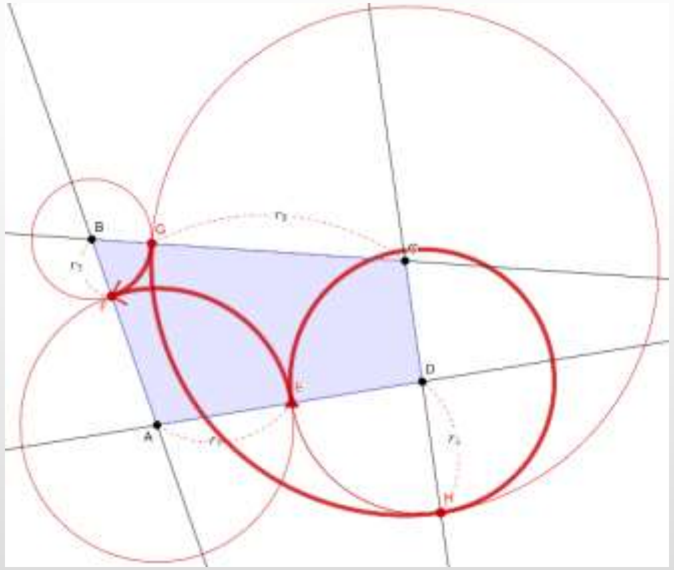
1. 一個內切(一次循環)



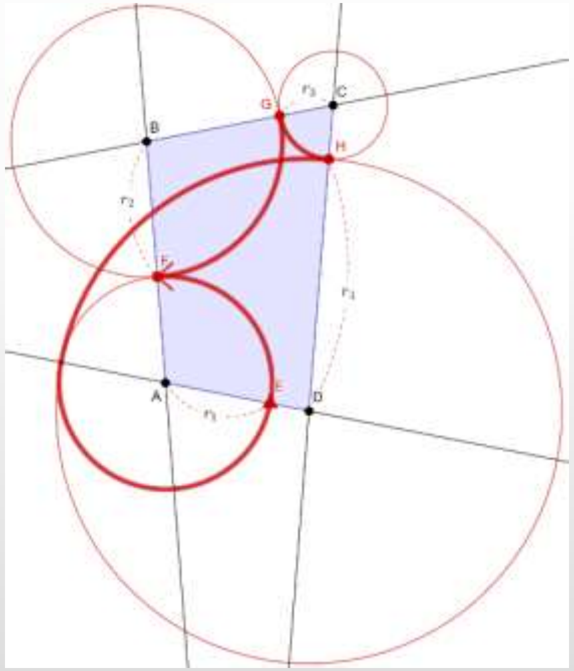
內外外外



外內外外



外外內外

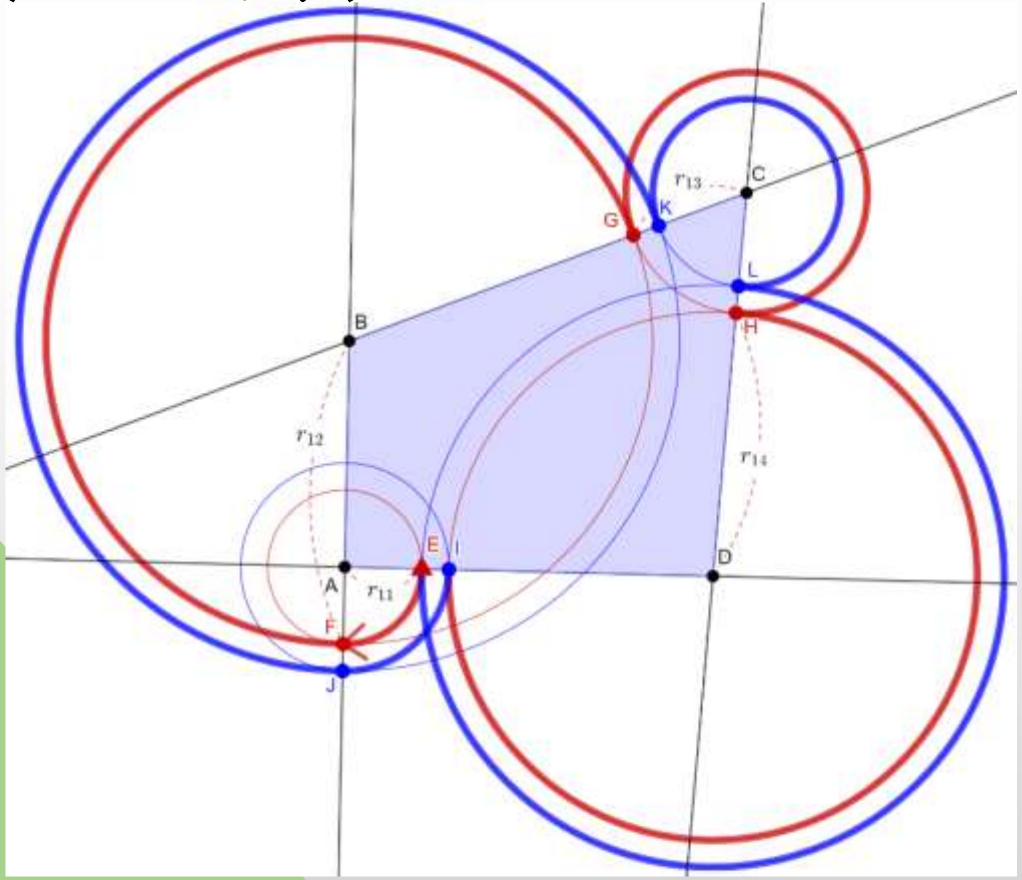


外外外內

研究歷程

(二)四邊形(兩組對邊長度相加不等值)

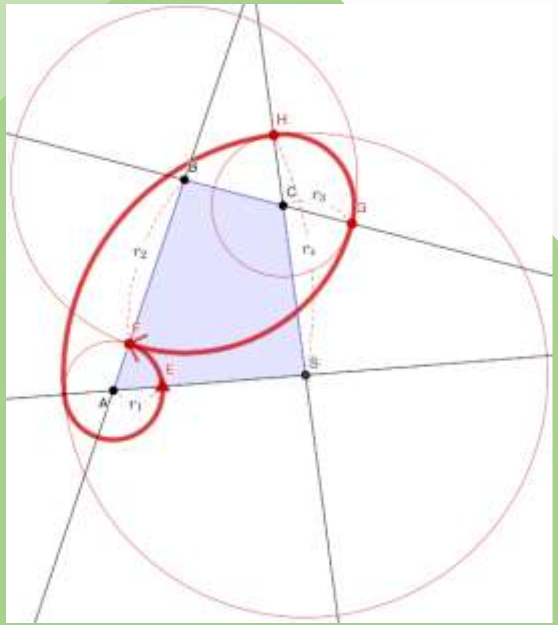
1. 一個內切（二次循環）



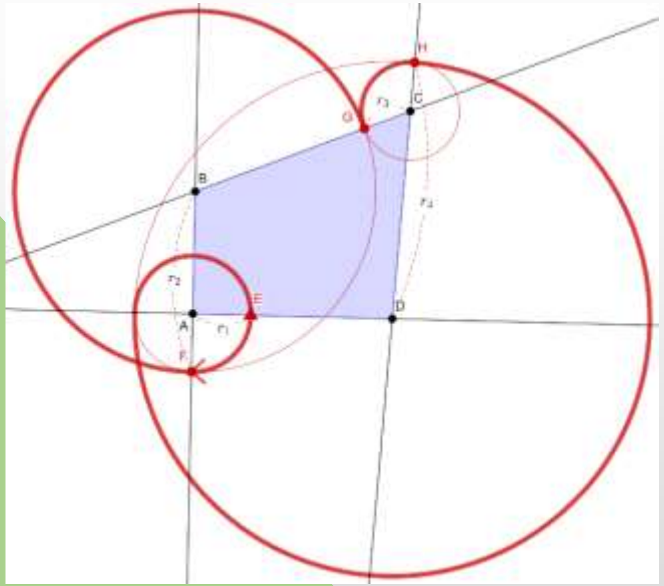
一個內切(內外外外，二次循環)

(二)四邊形(兩組對邊長度相加不等值)

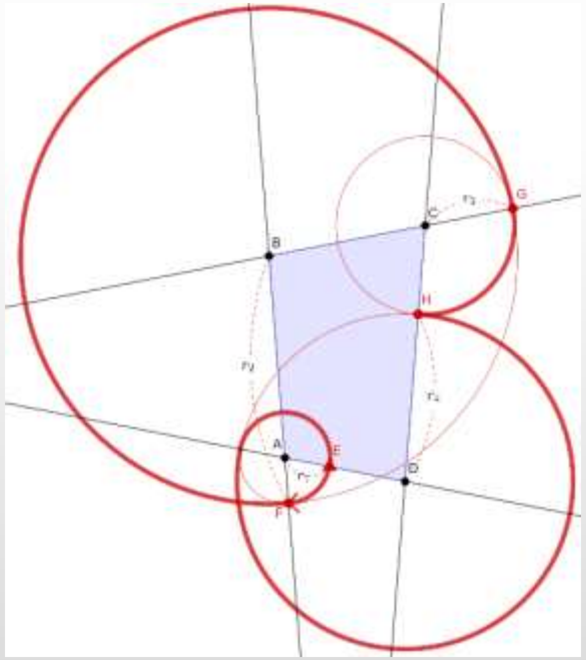
2. 三個內切



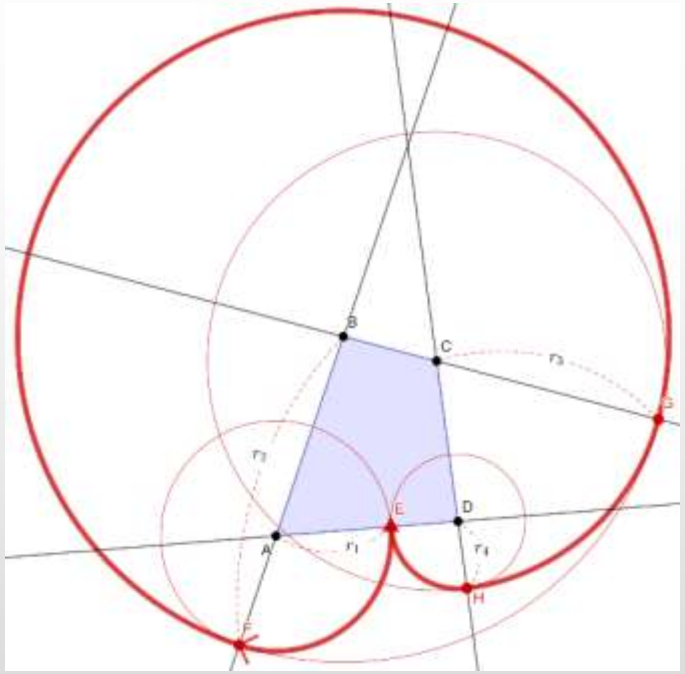
外內內內



內外內內



內內外內

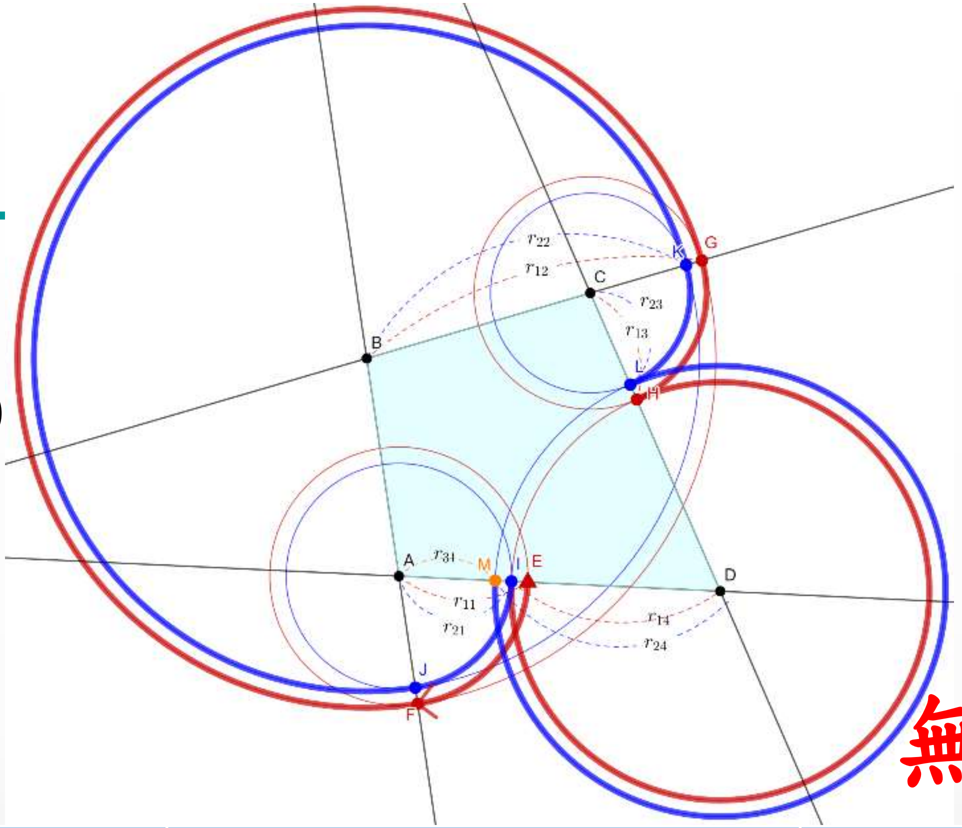


內內內外

研究歷程

(二)四邊形
(兩組對邊長度相加不等值)

3. 兩個內切



	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+(a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d})$	$r_{31}=x+2(a-b-c+d)$	$r_{41}=x+3(a-b-c+d)$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b-c+d$	$r_{32}=x+3a-2b-2c+2d$	$r_{42}=x+4a-3b-3c+3d$
	$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x+2a-2b-c+d$	$r_{33}=x+3a-3b-2c+2d$	$r_{43}=x+4a-4b-3c+3d$
	$r_{14}=-x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=-x-2a+2b+2c-d$	$r_{34}=-x-3a+3b+3c-2d$	$r_{44}=-x-4a+4b+4c-3d$

公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$

公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$

公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$

研究歷程

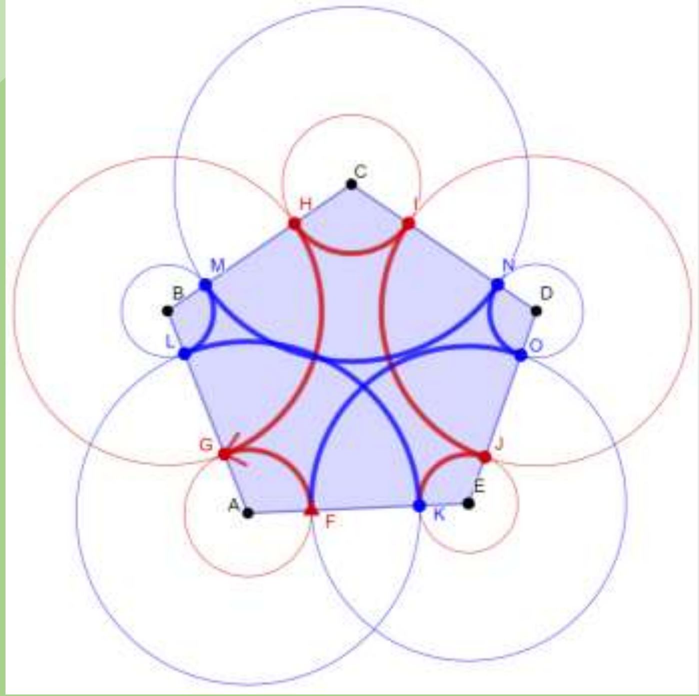
★ 四邊形中，利用圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

情況 / 相鄰兩圓	$C_A \to C_B$	$C_B \to C_C$	$C_C \to C_D$	$C_D \to C_A$	能繞回的情況(對邊和)
零個內切(皆外切)	外切	外切	外切	外切	等值
一個內切	內切	外切	外切	外切	不等值
	外切	內切	外切	外切	不等值
	外切	外切	內切	外切	不等值
	外切	外切	外切	內切	不等值
二個內切	內切	內切	外切	外切	等值
三個內切	外切	內切	內切	內切	不等值
	內切	外切	內切	內切	不等值
	內切	內切	外切	內切	不等值
	內切	內切	內切	外切	不等值
四個內切	內切	內切	內切	內切	等值

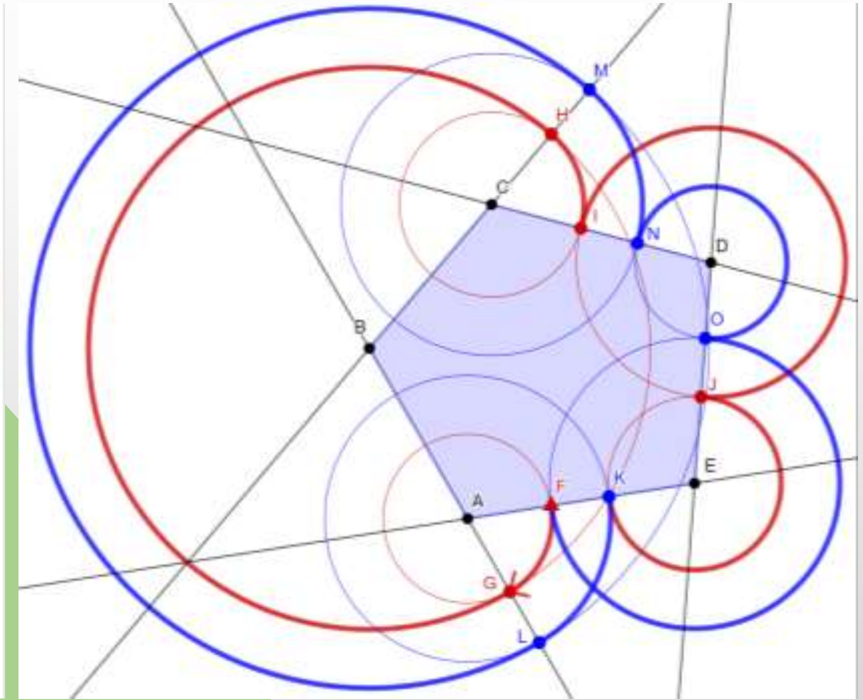
三、五邊和六邊形可完成一次或二次循環的情況

利用三、四邊形的結果，推廣驗證五、六邊形循環狀況

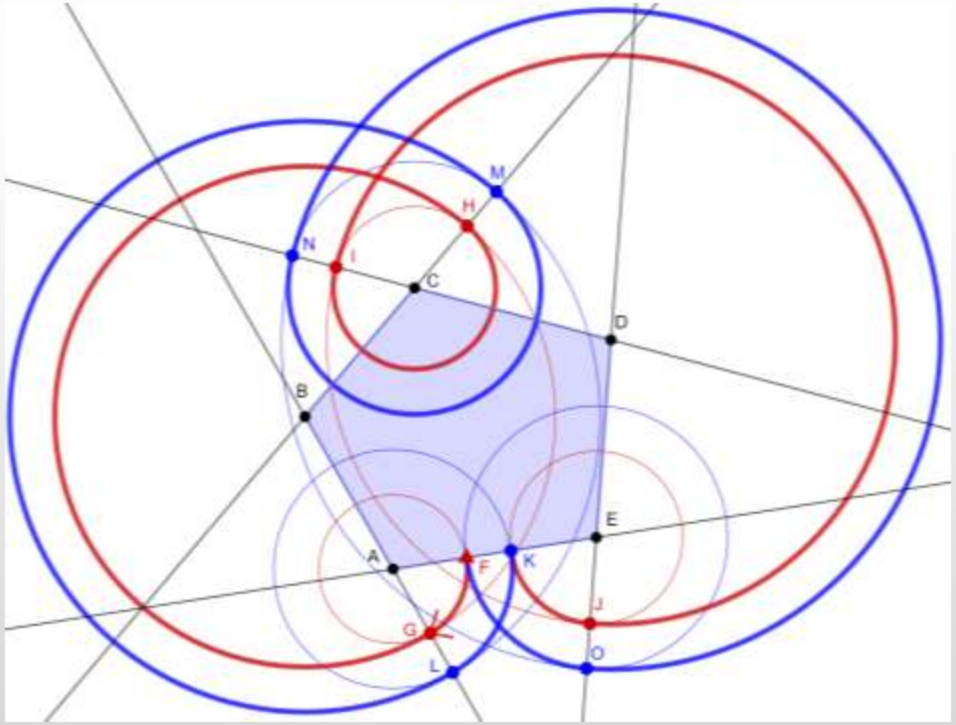
1. 五邊形(偶數個內切)



零個內切



二個內切



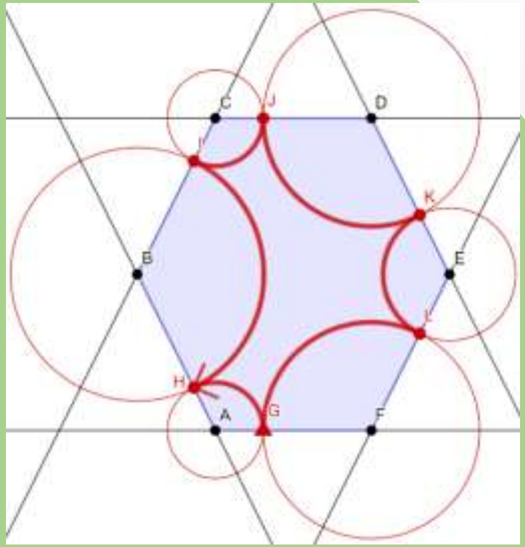
四個內切

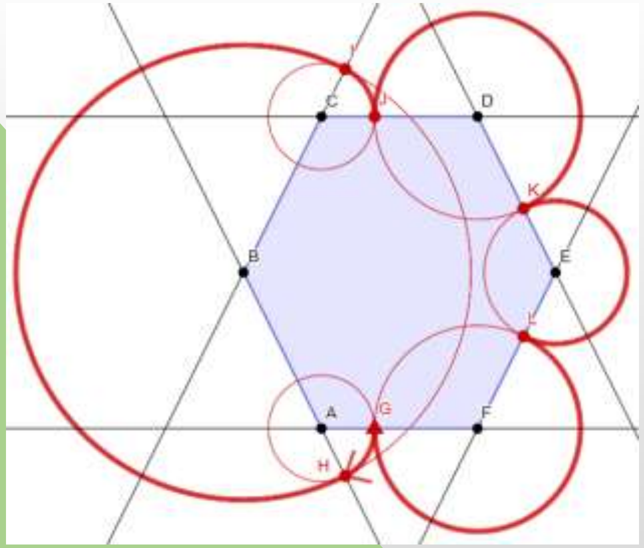
研究歷程

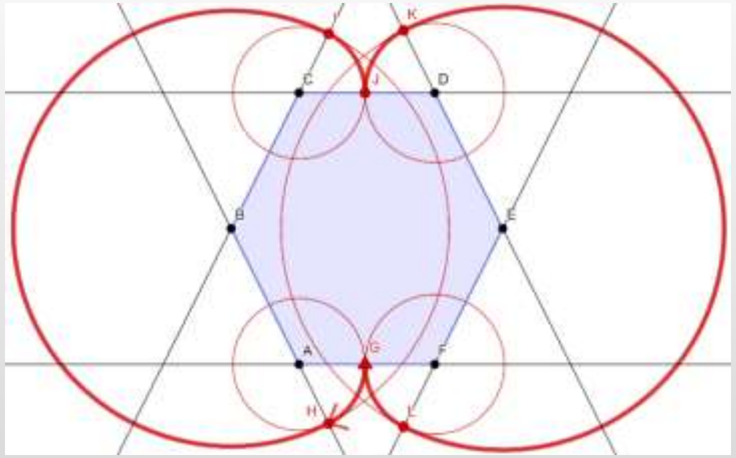
三、五邊和六邊形可完成一次或二次循環的情況

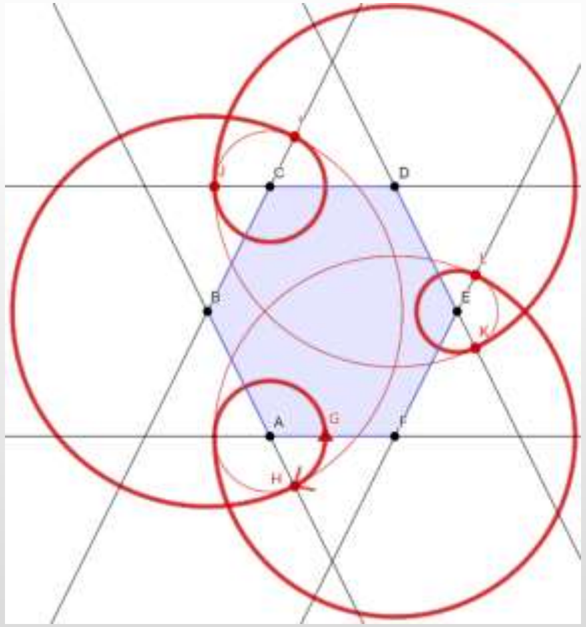
2. 六邊形(奇數邊長之和=偶數邊長之和)

★ 偶數個內切才能循環，且必為一次循環!


零個內切


二個內切

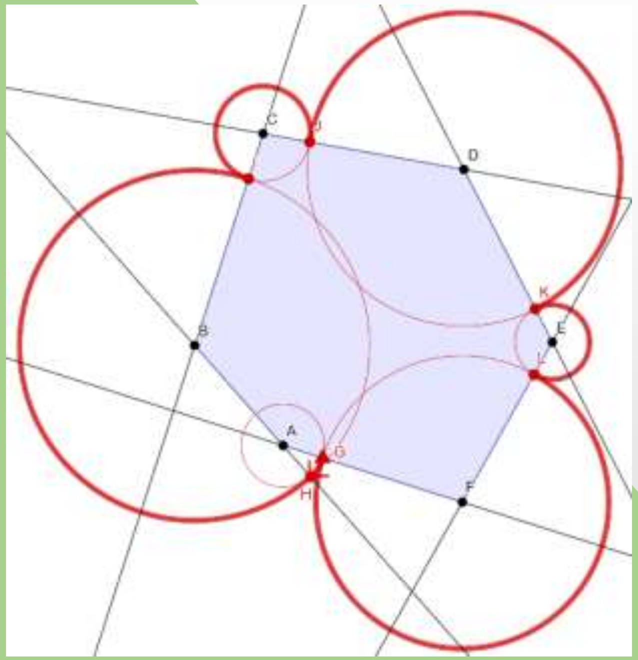

四個內切


六個內切

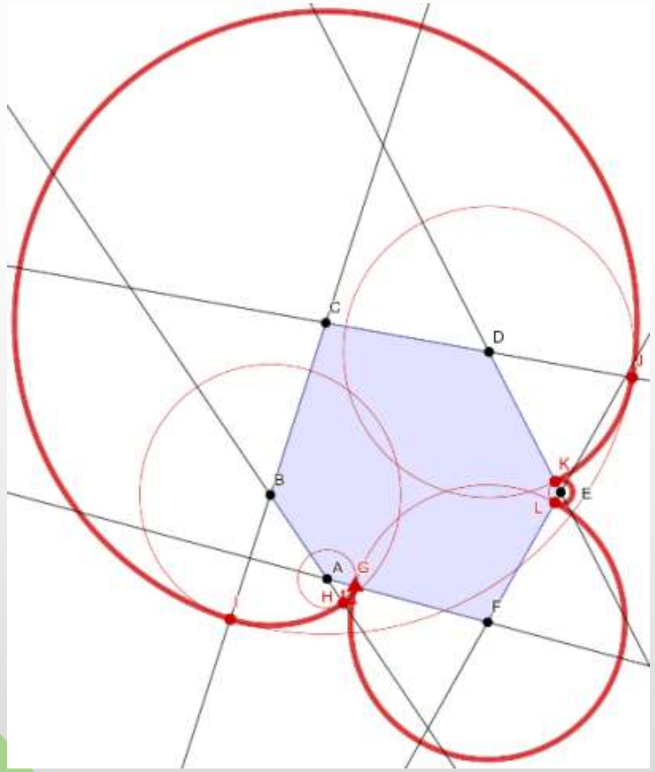
研究歷程

三、五邊和六邊形可完成一次或二次循環的情況

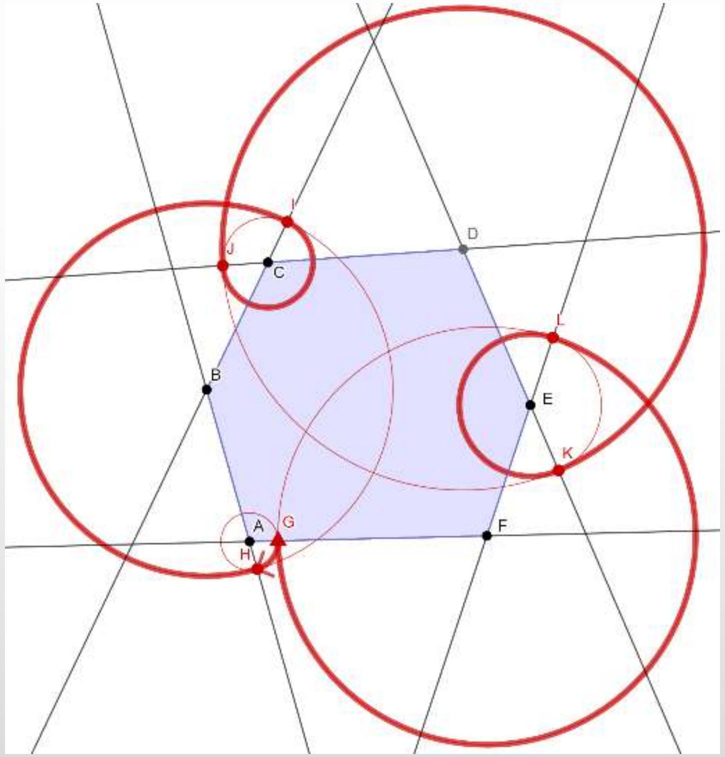
2. 六邊形(奇數邊長之和≠偶數邊長之和)



一個內切



三個內切



五個內切

研究結果

一、奇數(三、五)邊形

只要符合0個或2N個內切，則能完成循環。

二、偶數(四、六)邊形

1. 奇數邊長之和=偶數邊長之和

   只要符合0個或2N個內切能完成循環，且必為一次循環。

2. 奇數邊長之和≠偶數邊長之和

   只要符合2N-1個內切，則能完成循環。

三、多邊形內、外切循環現象

1. 偶數邊形在奇數邊長之和=偶數邊長之和下只存在一次循環。其餘能完成二次循環者，則必能一次循環，反之亦同。

2. 無法完成循環回到原起始點者，必存在下列現象：各輪的半徑成等差，向原起始點遠離，且不會重合。

未來展望與心得

◆我們未來要努力的還有…

◆參與獨立研究的過程中，我們的收穫是…

謝謝您的聆聽與指教！