

鹿東國小

倒來倒去-有趣的倒水問題之探討與研究

彰化縣 107 年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

學期\年級	三年級	四年級	五年級	六年級
上學期	專題研究	專題研究	獨立研究	獨立研究
下學期	專題研究	獨立研究	獨立研究	獨立研究

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

1. 三年級安排專題研究，由老師安排適合學生程度之主題進行探索，並將未來進行獨立研究所需之相關技能安排於課程中，希望學生能透過探索主題的過程學會發現問題、解決問題、尋求資源、資料的歸納延伸、相關資訊處理等能力。
2. 四年級上學期分組進行專題研究，藉由討論決定研究主題，運用三年級所學之能力分組完成專題研究。
3. 四年級下學期分組進行獨立研究，過程中除更加熟悉研究所需相關能力外，更強調獨立研究所需之主動性與問題解決。
4. 五、六年級依據學生特質、研究性質採分組或個別形式進行獨立研究，除強調研究產出外，更加強檢討與批判，對於完成作品與研究進行反思。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

在我四年級時，我正在看數學漫畫，突然看到一個很奇怪的題目：小明有一個四公升的杯子和一個七公升的杯子，還有一個容積一百公升的水缸，並且裝滿水，如何量出一公升的水？當時我看完答案之後，不知道怎麼算出答案的，卻不想求知，直接略過。直到現在五年級，我剛好獨立研究想做數學，讓我開始研究倒水問題。

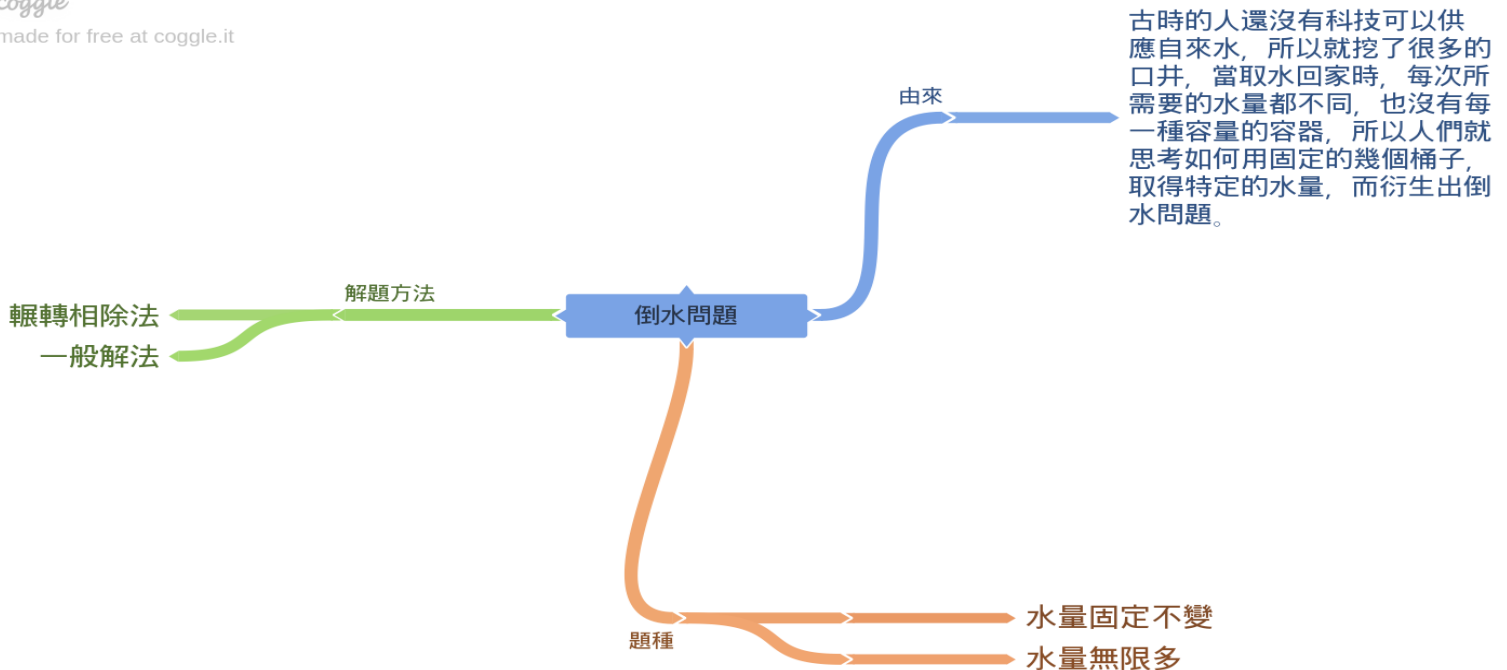
二、擬定工作進度表

進度\月份	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
訂定主題	◎	◎	—	—	—	—	—	—	—
尋找資料	◎	◎	◎	—	—	◎	◎	◎	—
整理資料	—	◎	—	—	—	◎	—	—	◎
撰寫文書	—	—	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
進行研究	—	—	—	—	—	◎	◎	—	—
整理報告	—	—	—	—	—	◎	◎	◎	◎

三、擬定正式計畫及研究問題

(一)正式計畫架構

coggle
made for free at coggle.it



(二)研究問題

1. 輾轉相除法和倒水問題之間要如何運算？
2. 倒水問題的題型，都可以用輾轉相除法算出答案嗎？
3. 倒水問題可以有三個以上的數字，那輾轉相除法呢？
4. 倒水問題要怎樣算比較快？

四、彙整相關文獻

(1)輾轉相除法

約在西元前 300 年前後。歐幾里得的《幾何原本》是流傳最廣的一本著作，影響很大，只有聖經可以與它比擬，尤其是那公理化的呈現方式，深深影響了數學這一科目的發展。歐幾里得從未聲稱《幾何原本》哪些部分全部都沒有別人幫忙所獨創的書籍。歐幾里得向托勒密王答道這句話：「啊！國王！在現實世界中有兩種路，一種是

普通人走的，另一種專為國王準備的。但是，在幾何學中，不存在王者之路！」這句話後來被引伸其義為「求知無坦途」，讓這句對話成為傳誦千古的箴言！事實上，歷史上有很多的人，都受到《幾何原本》的影響，例如：發明座標幾何的偉大哲學家：笛卡兒非常強調方法論，其實他主要是受到歐幾里得而有所的啟發；或愛因斯坦 HPM 通訊的第十卷中的第十一期中的第二版也有說：「如果歐幾裡得無法點燃你年輕的熱情，那麼你生來就不是一位科學思想家。」甚至連美國的女詩人米蕾頌揚，都稱讚歐幾里得：「只有歐幾裡得見過赤裸裸的美」。歐幾里得是最偉大的教師之一，是一流的數學寫作專家，他的曠世名作：《幾何原本》，有蒐集了畢達哥拉斯年代與柏拉圖年代的偉大數學成果，並且寫成十三冊，流傳後世已經達到兩千多年了。

如果實際檢視《幾何原本》的內容，歐幾里得是用線段的長度來表示數的大小，然後運用輾轉度量（相減）的方式，求出兩數的最大公因數，在第 VII 卷命題 I 作這樣的描述：設有不相等的二數，從大數中連續減去小數直到餘數小於小數，再從小數中連續減去餘數直到小於餘數，這樣一直作下去，若餘數總是量不盡其前個數，直到最後的餘數為一個單位，則該二數互質。當某數能量盡它前面的數時，歐幾里得在第 VII 卷命題 II 中利用線段拼量的方法，證明了這個數就是一開始兩個數的最大公因數。

一般的老師在講解輾轉相除法的操作運算，學生會照程式依樣畫葫蘆地執行一下，通常沒有什麼問題，但要學生瞭解轉轉相除法運作的原理，相對下就沒有那麼容易了。即使連受過大學教育的成人，回顧自己以往所學過的知識時，也有多數人會對隱藏在其中的道理不甚了了。歐幾里得的輾轉相除法，其中操作的原理和證明常常會因為每位詮釋者所使用的表徵語言的不盡相同，有時會對認知發展還未成熟的學生而言，是抽象難懂的！但實際檢視《幾何原本》所使用的方法，其應用線段拼砌的度量方法，其實提供了可以具體操作的一個演譯過程，如果去除了「歸謬證法」的論理部分，另外再加上以現代語言來

說明和圖示，不一定連小學四年級的學生都能理解。輾轉相除法又被稱為歐幾里得算則。目前已知的最古老算則，首次出現於歐幾里得的《幾何原本》中，在中國則可以追溯至西漢的《算數書》。不過，由於現傳幾何原本之版本頂多只能追溯到西元第十世紀，所以，目前可以確定的最早版本非中國的《算數書》莫屬！

輾轉相除法的應用非常多，甚至可以用來生成傳統音樂節奏。在現代的密碼學方面，它是 RSA 演算法的非常重要的一部分。它還被用來解丟翻圖方程式。輾轉相除法也可以用來構造連分數。輾轉相除法是現代數論中的基本工具。

(2) 倒水問題

古時的人還沒有科技可以供應自來水，所以就挖了很多的口井，當取水回家時，每次所需要的水量都不同，也沒有每一種容量的容器，所以人們就思考如何用固定的幾個桶子，取得特定的水量，而衍生出倒水問題。而現在倒水問題被視為益智型遊戲。而倒水問題又被分成水量無限多和水量固定不變這兩種。

(3) 質因數

質因數就是指整除正整數的質數。依基本算術的定理，每個正整數都可以以唯一的方式表示它的質因數的乘積，在不換順序的情況下。1 與任何正整數都是互質是因為 1 沒有質因數。只有正整數只有一個質因子的數，稱為質數。把一個正整數表示成質因數乘積的過程加上得到的表示結果被稱做質因數分解。

五、提出研究成果

研究記錄：

情況一： a 公升的水杯和 b 公升 ($a < b$ 、且 a, b 都為正整數) 的水杯如何量出一公升？(由於 1 就可以倒出任何數，所以不做計算)

1. $b - a = 1$ ， a, b 有什麼關係？($a, b \leq 10$)

- (1) $a=2$ 、 $b=3$ ，等式成立
- (2) $a=3$ 、 $b=4$ ，等式成立
- (3) $a=4$ 、 $b=5$ ，等式成立
- (4) $a=5$ 、 $b=6$ ，等式成立
- (5) $a=6$ 、 $b=7$ ，等式成立
- (6) $a=7$ 、 $b=8$ ，等式成立
- (7) $a=8$ 、 $b=9$ ，等式成立
- (8) $a=9$ 、 $b=10$ ，等式成立

結論:1. a 、 b 的和是由(1)從是 5，再來(2)是 7，(3)是 9...，
所以是 $+2+2+2+2$ 的規律。

所以是 $+2+2+2+2$ 的規律。

2. a 、 b 的差是由(1)從是 1，再來(2)也是 1，(3)是也 1...，
所以差都是 1。

3. 每當 a 增加 1， b 就要增加 1，等式才會持續成立。

2. $a+b=1$ ， a 、 b 有什麼關係？(a 、 $b \leq 10$)

- (1) $a=2$ 、 $b=3$ ，等式成立
- (2) $a=3$ 、 $b=5$ ，等式成立
- (3) $a=4$ 、 $b=7$ ，等式成立
- (4) $a=5$ 、 $b=9$ ，等式成立

結論:1. a 、 b 的和是由(1)從是 5，再來(2)是 8，(3)是 11...，
所以是 $+3+3+3+3$ 的規律。

2. a、b 的差是由(1)從是 1，再來(2)是 2，(3)是 3...，
所以是+1+1+1+1 的規律。

3. 每當 a 增加 1，b 就要增加 2，等式才會持續成立。

4. 由於(1)的差是 1，所以使用第一種方法就好了。

3. $b-a+a=1$ ，a b 有什麼關係？(a b ≤ 10)

(1)a=2、b=5，等式成立

(2)a=3、b=7，等式成立

(3)a=4、b=9，等式成立

結論:1. a、b 的和是由(1)從是 7，再來(2)是 10，(3)是 13...，
所以是+3+3+3+3 的規律。

2. a、b 的差是由(1)從是 3，再來(2)是 4，(3)是 5...，
所以是+1+1+1+1 的規律。

3. 每當 a 增加 1，b 就要增加 2，等式才會持續成立。

4. $a+a-a-b-b=1$ ，a b 有什麼關係？(a b ≤ 10)

(1)a=3、b=4，等式成立

(2)a=5、b=7，等式成立

(3)a=7、b=10，等式成立

結論:1. a、b 的和是由(1)從是 7，再來(2)是 12，(3)是 17...，
所以是+5+5+5+5 的規律。

2. a、b 的差是由(1)從是 1，再來(2)是 2，(3)是 3...，
所以是+1+1+1+1 的規律。

3. 每當 a 增加 2，b 就要增加 3，等式才會持續成立。

4. 由於(1)的差是 1，所以使用第一種方法就好了。

情況二:a 公升的水杯和 b 公升($a < b$ 、且 a b 都為正整數)的水杯如何量出兩公升?(由於 1 就可以倒出任何數，所以不做計算)

1. $b-a=2$ ，a b 有什麼關係？($a \leq b \leq 10$)

(1) $a=2$ 、 $b=4$ ，等式成立

(2) $a=3$ 、 $b=5$ ，等式成立

(3) $a=4$ 、 $b=6$ ，等式成立

(4) $a=5$ 、 $b=7$ ，等式成立

(5) $a=6$ 、 $b=8$ ，等式成立

(6) $a=7$ 、 $b=9$ ，等式成立

(7) $a=8$ 、 $b=10$ ，等式成立

結論:1. a、b 的和是由(1)從是 6，再來(2)是 8，(3)是 10...

所以是 $+2+2+2+2$ 的規律。

2. a、b 的差是由(1)從是 2，再來(2)也是 2，(3)是也 2...

所以差都是 2。

3. 每當 a 增加 1，b 就要增加 1，等式才會持續成立。

2. $a+a-b=2$ ，a b 有什麼關係？($a \leq b \leq 10$)

(1) $a=3$ 、 $b=4$ ，等式成立

(2) $a=4$ 、 $b=6$ ，等式成立

(3) $a=5$ 、 $b=8$ ，等式成立

(4) $a=6$ 、 $b=10$ ，等式成立

結論:1. a、b 的和是由(1)從是 7，再來(2)是 10，(3)是 13...

所以是 $+3+3+3+3$ 的規律。

2. a、b 的差是由(1)從是 1，再來(2)是 2，(3)是 3...

所以是 $+1+1+1+1$ 的規律。

3. 每當 a 增加 1， b 就要增加 2，等式才會持續成立。

4. 由於(2)的差是 2，所以使用第一種方法就好了。

3. $b-(a+a)=2$ ， a, b 有什麼關係？($a, b < 10$)

(1) $a=2, b=6$ ，等式成立

(2) $a=3, b=8$ ，等式成立

(3) $a=4, b=10$ ，等式成立

結論: 1. a, b 的和是由(1)從是 8，再來(2)是 11，(3)是 14...

所以是 $+3+3+3+3$ 的規律。

2. a, b 的差是由(1)從是 4，再來(2)是 5，(3)是 6...

所以是 $+1+1+1+1$ 的規律。

3. 每當 a 增加 1， b 就要增加 2，等式才會持續成立。

4. $a+a+a-b-b=2$ ， a, b 有什麼關係？($a, b < 10$)

(1) $a=4, b=5$ ，等式成立

(2) $a=6, b=7$ ，等式成立

(3) $a=8, b=10$ ，等式成立

結論: 1. a, b 的和是由(1)從是 7，再來(2)是 12，(3)是 17...

所以是 $+5+5+5+5$ 的規律。

2. a, b 的差是由(1)從是 1，再來(2)是 2，(3)是 3...

所以是 $+1+1+1+1$ 的規律。

3. 每當 a 增加 2， b 就要增加 3，等式才會持續成立。

4. 由於(1)的差是 1，所以使用第一種方法就好了。

第三題: a 公升的水杯和 b 公升($a < b$ 、且 a, b 都為正整數)的水杯如何量出三公升?(由於 1 就可以倒出任何數，所以不做計算)

1. $b-a=3$ ， a, b 有什麼關係？($a, b \leq 10$)

- (1) $a=2$ 、 $b=5$ ，等式成立
- (2) $a=3$ 、 $b=6$ ，等式成立
- (3) $a=4$ 、 $b=7$ ，等式成立
- (4) $a=5$ 、 $b=8$ ，等式成立
- (5) $a=6$ 、 $b=9$ ，等式成立
- (6) $a=7$ 、 $b=10$ ，等式成立

結論:1. a 、 b 的和是由(1)從是 7，再來(2)是 9，(3)是 11...，
所以是+2+2+2+2 的規律。

2. a 、 b 的差是由(1)從是 3，再來(2)也是 3，(3)是也 3...，
所以差都是 3。

3. 每當 a 增加 1， b 就要增加 1，等式才會持續成立。

2. $a+a-b=3$ ， a 、 b 有什麼關係？(a 、 $b \leq 10$)

- (1) $a=4$ 、 $b=5$ ，等式成立
- (2) $a=5$ 、 $b=7$ ，等式成立
- (3) $a=6$ 、 $b=9$ ，等式成立

結論:1. a 、 b 的和是由(1)從是 9，再來(2)是 12，(3)是 15...，
所以是+3+3+3+3 的規律。

2. a 、 b 的差是由(1)從是 1，再來(2)是 2，(3)是 3...，
所以是+1+1+1+1 的規律。

3. 每當 a 增加 1， b 就要增加 2，等式才會持續成立。

4. 於(3)的差是 3，所以使用第一種方法就好了。

3. $b-(a+a)=3$ ， a 、 b 有什麼關係？(a 、 $b \leq 10$)

- (1) $a=2$ 、 $b=7$ ，等式成立
- (2) $a=3$ 、 $b=9$ ，等式成立

結論:1. a、b 的和是由(1)從是 9，再來(2)是 12，

所以是+3+3+3+3 的規律。

2. a、b 的差是由(1)從是 5，再來(2)是 6，

所以是+1+1+1+1 的規律。

3. 每當 a 增加 1，b 就要增加 2，等式才會持續成立。

4. $a+a-a-b-b=3$ ，a b 有什麼關係？(a b <10)

(1)a=4、b=5，等式成立

(2)a=6、b=7，等式成立

(3)a=8、b=10，等式成立

結論:1. a、b 的和是由(1)從是 7，再來(2)是 12，(3)是 17…，

所以是+5+5+5+5 的規律。

2. a、b 的差是由(1)從是 1，再來(2)是 2，(3)是 3…，

所以是+1+1+1+1 的規律。

3. 每當 a 增加 2，b 就要增加 3，等式才會持續成立。

4. 由於(1)的差是 1，所以使用第一種方法就好了。

六、評鑑與檢討

(1)檢討

1. 剛開始蒐集資料時，有一點迷思方向，經與同學討論後，終於找到方向。

2. 雖有排定進度表，但有時會落後，經老師提醒後，完成進度表。

3. 組員雖有分工，但有時會沒有完成應有的進度，經提醒後才完成。

4. 剛開始研究時，時間分配不太恰當，後來才逐漸修正。

5. 研究初期組員和組長偶有溝通不良、意見不一的情況，後來逐漸培養默契，漸入佳境。

(2)收獲

1. 學習到如何做訂定主題、如何針對主題做資料蒐集。
2. 學習到如何訂立進度時間表。
3. 學習到當組員遇到在意見不一的時候，如何與他人溝通。
4. 學習到如何如何分配時間，完成當週的計劃。

七、參考文獻

1. Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, NC.
 2. 藍紀正、朱恩寬譯 (2002 年)《歐幾里得·幾何原本》，台北市：九章出版社。
 3. 洪萬生 (2006 年)《數之起源》，台北市：台灣商務印書館。
 4. 洪萬生 (2006 年)《此零非彼 0》，台北市：台灣商務印書館。
 5. 吳文俊主編 (2003 年)《世界著名數學家傳記》(上集)，中國北京：科學出版社。
 6. 梁宗巨 (1995 年)《數學歷史典故》，台北市：九章出版社。
 7. 李繼閔 (1998 年)《九章算術 導讀與譯注》，中國西安：陝西科學技術出版社。
-
8. 葉嘉慧·馮振業 (2003 年)〈最大公因數和最小公倍數：以線段表示開創教學空間〉，《數學教育》第十七期，香港：香港數學教育學會出版。
 9. 袁小明主編 (1999 年)《數學伴教——名師授課手記》，台北市：九章出版社。
 10. 歐陽絳編著 (2002 年)《數學軼事》，台北市：九章出版社。
 11. 蔡聰明 (2000 年)《數學的發現趣談》，台北市：三民書局。

12. 余文卿主編（2003 年）《數學 1》92 學年度樣書，台北縣：龍騰文化。

13. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BC%BE%E8%BD%89%E7%9B%B8%E9%99%A4%E6%B3%95>

14. <http://math.n7tnu.edu.tw/~horng/letter/1011.pdf>
