彰化縣107學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號： 31007

組別：

■國小組

□國中組

■數學類

□自然與生活科技類

□人文社會類

作品名稱：攻守「鋸」佳

彰化縣 107 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書(內文)

第一階段 研究訓練階段(由教師撰寫)

一、近二年學校獨立研究課程之規畫

1. 中年級，著重基本研究能力的培養，如：記錄、作筆記、學習策略及歸納整理資料等。
2. 高年級，著重學生發現問題、高層次思考及規劃整體研究進度。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

1. 透過任務導向的課程，引導學生儲備獨立研究的能力，從尋找研究方向、歷屆獨立研究觀摩、依照孩子的興趣深入探究、帶領孩子從日常生活環境的現象探討，包括人為現象的觀察啟發及自然現象的觀察啟發，進行數學、科學探究活動。
2. 發現研究主題後，能有概念的選取不同的研究方法來進行研究，形成研究動機、探討可行性的研究資源並規劃整體進度，從問題中思考不同的解決方法，進而選取其認為最佳之方式。

壹、 研究動機

某日，資優班學長跟我們分享了一個有趣的遊戲叫做「鋸木塊遊戲」時，我們覺得很好玩，但是也發現學長只針對正方形方格表進行探討，所以我們突發奇想，決定進一步針對不同類型的矩形方格表進行研究，以提升遊戲的趣味性及難度，並破解其中的奧秘。

貳、 擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

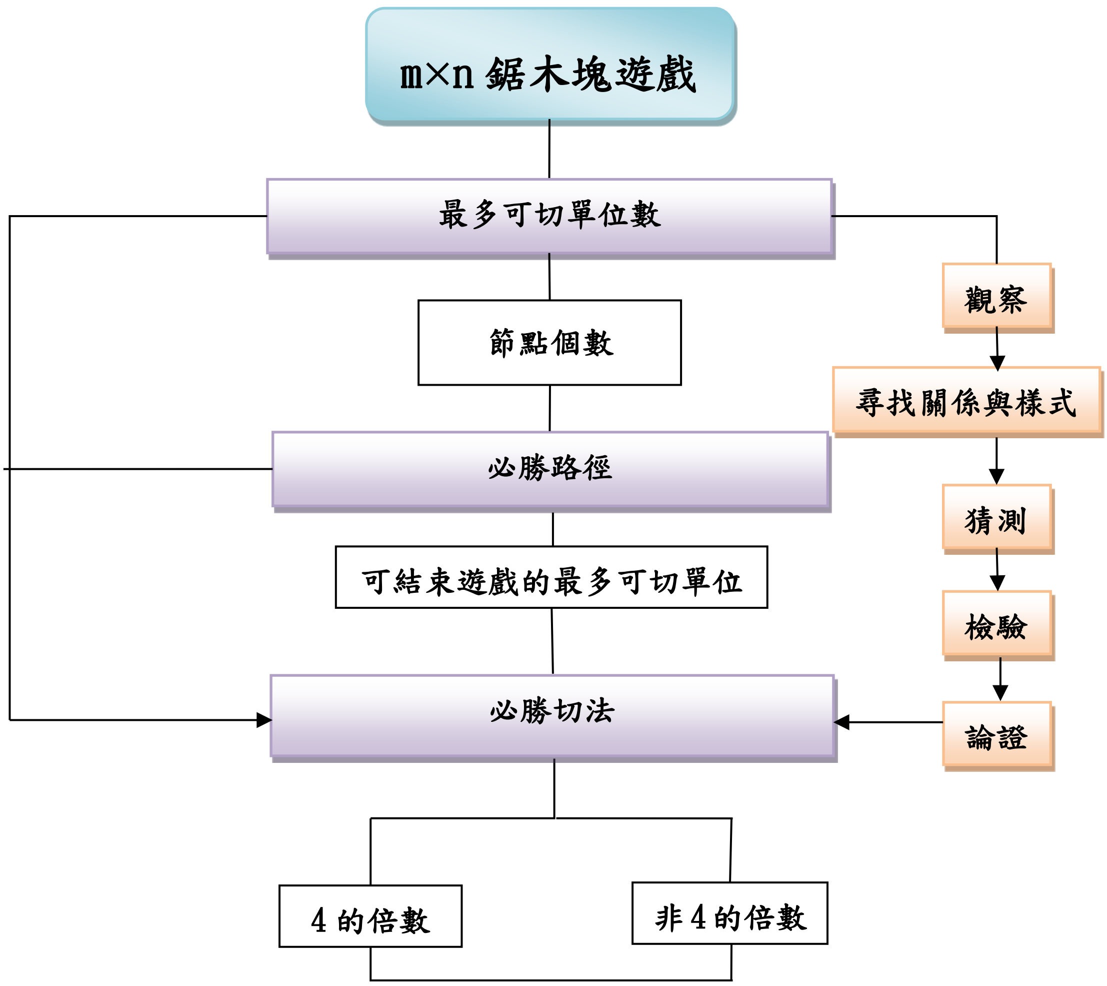
一、研究問題

(一)、探討在 m×n 鋸木塊遊戲的最多可切單位數為何？

(二)、探討在 m×n 鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝路徑為何？

(三)、探討在 m×n 鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法為何？

二、研究架構圖



三、工作進度表

工作進度	日期	工作內容
收集資料	107 年 7-8 月	1. 收集研究主題 2. 參考鋸木塊遊戲過往研究
確立研究主題	107 年 9 月	1. 將鋸木塊遊戲延伸，探討矩形鋸木塊遊戲 2. 製作鋸木塊遊戲配件
探討研究問題		
擬定研究計畫	107 年 10-11 月	1. 討論鋸木塊遊戲的研究內容 2. 進行研究與探討
進行研究		
撰寫研究報告	107 年 12 月	1. 整理研究紀錄 2. 撰寫研究結果

參、 彙整相關文獻與資料分析

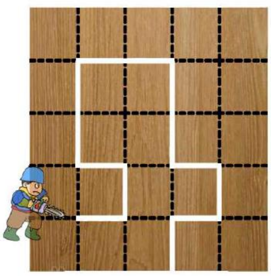
一、 鋸木塊遊戲規則：

(一)原始題目：戲說數學(許志農，2011)

11 鋸木板的遊戲…橫與豎的巧妙安排

與幾何相關的遊戲無外呼在紙上做描點，畫線或者移動的操作。比較有趣的幾何遊戲應該是將這些幾何操作融入日常生活的實例裏，也就是說，找一個常見的生活實例來闡釋我們所設計的幾何遊戲。這樣除了可以增添樂趣外，也可以將遊戲變活。鋸木板的遊戲就是一道這樣的實例。

在一塊畫有粗黑虛線的 5×5 木板上，甲、乙兩人輪流鋸這塊木板，每人每次只能沿著粗黑虛線鋸一個單位長度，而且遵守以下的規則：



(1) 甲先開始，從木板邊緣沿粗黑虛線鋸一個單位長度。

(2) 乙接續甲的最後位置，再鋸一個單位長度（鋸過的不能再鋸）。

(3) 把木板鋸成兩塊的人輸了。

→分析：原始題目之規則為在 5×5 的方格表中，每次只能鋸一單位長度，兩位玩家接續著前手所切的位置，先將木塊鋸成兩塊者就輸了。此規則中的鋸木塊遊戲路徑的變化性較低，可玩性較低。

(二) 步步為「贏」—鋸木塊遊戲之探討(全國科展第 58 屆)

在這個作品中將原始題目的規則修改為：在 n×n 的方格表中，兩位玩家接續著前手所切的位置，沿著方格表內的格線且不重複切的輪流切一到三個單位的長度，需切完所有節點才能結束遊戲，先將木塊鋸成兩塊者就輸了。

→分析：修改了可以鋸的單位數讓遊戲的變化性提高許多，惟這件作品僅就正方形的方格表進行探討，未討論其他形狀的方格表。

(三)攻守「鋸」佳(本研究)

在 m×n 的方格表中，兩位玩家接續著前手所切的位置，依方格表內的格線且不重複切的輪流切割一到三個單位的長度，須拜訪完所有節點且不重複經過節點才能結束遊戲，先將木塊鋸成兩塊者就輸了。

→分析：在此研究中我們將遊戲的圖板由 n×n 方格表擴展為 m×n 方格表，計畫對不同類型的矩形方格表進行探討，以了解不同類型的矩形方格表進行鋸木塊的情形與限制。

二、 名詞解釋

(一)節點：

在m × n的方格表中，除了邊上的點外，其餘的交點，都是節點。例如，在3 × 4方格表中，總共有 6 個節點。

(二)塗色法：

將方格表中的節點以不同顏色標示奇偶點，來論證從偶數行或列和奇數行或列開始進行遊戲的結果，如圖 3-2-1 所示。

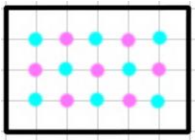


圖 3-2-1 在方格表中的節點以塗色法標示奇偶點

(三)逆向思考法

逆向思考法，又稱倒推法，指利用已知條件，由欲達到的目標一步一步向前倒推，直到題目中問題得到解答。

肆、 研究結果與討論

一、探討 m×n 鋸木塊遊戲的最多可切單位數

1.觀察

首先，我們嘗試在 1x1~1x8 方格表中進行鋸木塊遊戲，我們觀察到在 1x1~1x8 方格表中，結束遊戲的路徑類型只有一種類型，因為，先手只要切 1 單位就會將木塊鋸成兩塊，也就是輸了，後手根本沒機會切，如圖 4-1-1 所示。接著，我們嘗試在 2×2~2×8 方格表中進行鋸木塊遊戲，也發現在 2x2 方格表中，先手只要切 1 單位就贏了，因為後手只要再切 1 單位就會將木塊鋸成兩塊，也就是輸了，如圖 4-1-2 所示。。

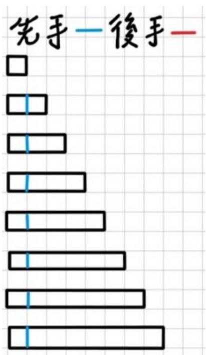


圖 4-1-1 在 1x1~1x8 方格表中進行鋸木塊遊戲

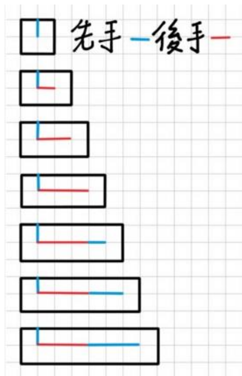


圖 4-1-2 在 2x2~2x8 方格表中進行鋸木塊遊戲

因此，我們發現若要在 mxn 鋸木塊遊戲順利進行遊戲，為了讓先手及後手都可以參與遊戲，**所以在 mxn 方格表中，我們規定：m≥2，n≥3。**

接著，為了瞭解 mxn 鋸木塊遊戲的最多可切單位數的規律性，我們觀察 2x3~2x10、3x3~3x10、4x4~4x10、5x5~5x10、6x6~6x10…9x9~9x10、10x10 方格表中的遊戲情形，如圖 4-1-3 所示，發現：當 m=2，n=3~10 時，隨著 n 值每次增加 1 單位，最多可切單位數是每次增加 1 單位；當 m=3，n=3~10 時，隨著 n 值每次增加 1 單位，最多可切單位數是每次增加 2 單位；當 m=4，n=4~10 時，隨著 n 值每次增加 1 單位，最多可切單位數是每次增加 3 單位；當 m=5，n=5~10 時，隨著 n 值每次增加 1 單位，最多可切單位數是每次增加 4 單位；當 m=6，n=6~10 時，隨著 n 值每次增加 1 單位，最多可切單位數是每次增加 5 單位，依此類推，我們發現**最多可切單位數與邊長數有關，當我們固定 mxn 方格表中的 m 值，n 每次增加 1 單位，則最多可切單位數每次增加的單位數為 (m-1)。**

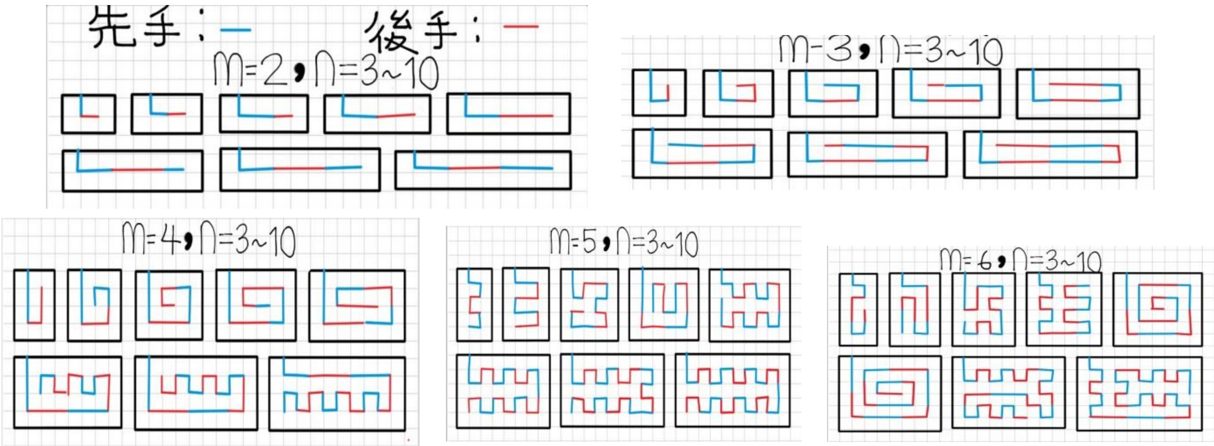


圖 4-1-3 2x3~2x10、3x3~3x10…6x6~6x10 的最多可切單位數

2.尋找關係與樣式

我們在尋找關係的過程中發現：結束遊戲前最多可切的單位數會隨著方格表內節點數量增加而變多，而最多可切的單位數似乎則與邊長數有關聯，在 2x3~2x10、3x3~3x10、4x4~4x10、5x5~5x10、6x6~6x10…9x9~9x10、10x10 方格表中，可切的最多單位數

都是(邊長-1) ×(邊長-1)，例如：2×3 的最多可切單位數是 1×2，也就是最多可切 2 單位；3×4 的最多可切單位數是 2×3，也就是最多可切 6 單位；4×5 的最多可切單位數是 3×4，也就是最多可切 12 單位，依此類推，如表 4-1-1 所示。

表 4-1-1 2×3~2×10、3×3~3×10…9×9~9×10、10×10 方格表中最多可切單位數

規格	最多可切單位數		規格	最多可切單位數		規格	最多可切單位數	
2×3	(2-1)×(3-1)	2 單位	3×3	(3-1)×(3-1)	4 單位	4×4	(4-1)×(4-1)	9 單位
2×4	(2-1)×(4-1)	3 單位	3×4	(3-1)×(4-1)	6 單位	4×5	(4-1)×(5-1)	12 單位
2×5	(2-1)×(5-1)	4 單位	3×5	(3-1)×(5-1)	8 單位	4×6	(4-1)×(6-1)	15 單位
2×6	(2-1)×(6-1)	5 單位	3×6	(3-1)×(6-1)	10 單位	4×7	(4-1)×(7-1)	18 單位
2×7	(2-1)×(7-1)	6 單位	3×7	(3-1)×(7-1)	12 單位	4×8	(4-1)×(8-1)	21 單位
2×8	(2-1)×(8-1)	7 單位	3×8	(3-1)×(8-1)	14 單位	4×9	(4-1)×(9-1)	24 單位
2×9	(2-1)×(9-1)	8 單位	3×9	(3-1)×(9-1)	16 單位	4×10	(4-1)×(10-1)	27 單位
2×10	(2-1)×(10-1)	9 單位	3×10	(3-1)×(10-1)	18 單位			
規格	**最多可切單位數**		**規格**	**最多可切單位數**		**規格**	**最多可切單位數**	
5×5	(5-1)×(5-1)	16 單位	6×6	(6-1)×(6-1)	25 單位	7×7	(7-1)×(7-1)	36 單位
5×6	(5-1)×(6-1)	20 單位	6×7	(6-1)×(7-1)	30 單位	7×8	(7-1)×(8-1)	42 單位
5×7	(5-1)×(7-1)	24 單位	6×8	(6-1)×(8-1)	35 單位	7×9	(7-1)×(9-1)	48 單位
5×8	(5-1)×(8-1)	28 單位	6×9	(6-1)×(9-1)	40 單位	7×10	(7-1)×(10-1)	54 單位
5×9	(5-1)×(9-1)	32 單位	6×10	(6-1)×(10-1)	45 單位			
5×10	(5-1)×(10-1)	36 單位						
規格	**最多可切單位數**		**規格**	**最多可切單位數**		**規格**	**最多可切單位數**	
8×8	(8-1)×(8-1)	49 單位	9×9	(9-1)×(9-1)	64 單位	10×10	(10-1)×(10-1)	81 單位
8×9	(8-1)×(9-1)	56 單位	9×10	(9-1)×(10-1)	72 單位			
8×10	(8-1)×(10-1)	63 單位						

3. 猜測與檢驗：

透過觀察及尋找關係，我們猜測最多可切的單位數與2×3~2×10、3×3~3×10…m×n方格表中的節點個數有關，由表6-1-1中，從2×3~2×10、3×3~3×10至10×10的檢驗，發現可切的最多單位數都是(邊長-1)×(邊長-1)，而節點個數皆為(m-1)×(n-1)，兩者相符合，即檢驗的結果與猜測相符合。

4. 論證：

接著，我們對上述猜測與檢驗的發現進行論證。以3×4的鋸木塊遊戲為例，觀察被孤立的節點數量與所鋸單位數的關聯，如圖4-1-4。我們發現，在尚未開始遊戲前，被孤立的節點數量為6個，亦為藍色

的6個點；從起點開始切1單位後，被孤立的節點數量剩下5個；切2單位後，被孤立的節點數量剩下4個；切3單位後，被孤立的節點數量剩下3個，接著持續的切第4單位、第5單位，逐步把孤立的節點減少，最後當所有節點都被切到，沒有被孤立的節點時，總共切了6單位，節點個數會等於最多可切的單位數，表4-1-2所示。接著我們持續嘗試在3×5、4×5方格進行鋸木塊遊戲，如圖4-1-5及圖4-1-6所示，亦發現最多可切的單位數會等於節點個數，也就是(邊長-1)×(邊長-1)，因此我們可得證鋸木塊遊戲中最多可切的單位數公式即為(m-1)×(n-1)。

表 4-1-2 3x4 鋸木塊遊戲所鋸單位數與被孤立的節點對照表

鋸木塊遊戲所鋸的單位數	被孤立的節點個數
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

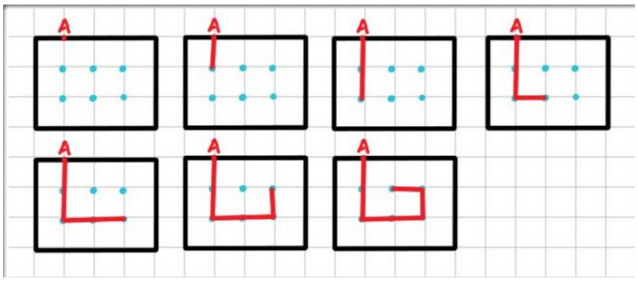


圖 4-1-4 3x4 鋸木塊遊戲所鋸最多單位數的過程

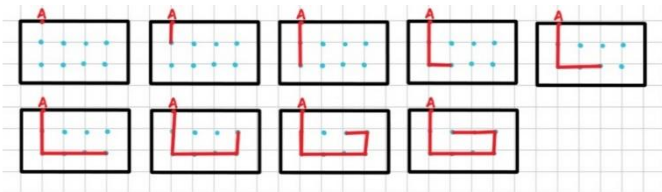


圖 4-1-5 3x5 鋸木塊遊戲所鋸最多單位數的過程

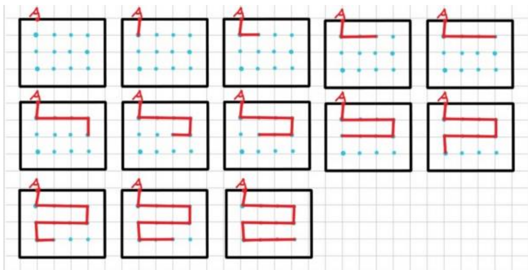


圖 4-1-6 4x5 鋸木塊遊戲所鋸最多單位數的過程

二、探討在mxn鋸木塊遊戲中最多可切單位數的遊戲路徑

1.觀察

我們觀察到進行 mxn 鋸木塊遊戲時，有些類型的方格表可以從任何行或列開始切，並且通過所有節點，切出該方格表中最多可切單位數，像是在**奇數邊長x奇數邊長**的方格表中，我們在 3x3、3x5、3x7 方格表中進行鋸木塊遊戲時，發現可以從任何行或列開始切，並且通過所有節點，切出該方格表中最多可切單位數，如圖 4-2-1 所示。

此外，在奇數邊長×偶數邊長的方格表中也可觀察到此情形，在 2x3、3x4、4x5 方格表中進行鋸木塊遊戲時，亦發現可以從任何行或列開始切，並且通過所有節點，切出該方格表中最多可切單位數，如圖 4-2-2 所示。

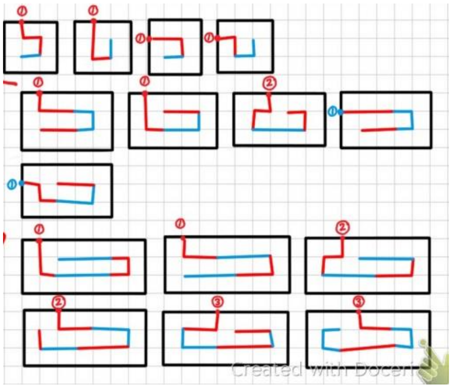


圖 4-2-1 在 3x3、3x5、3x7 方格表中進行鋸木塊遊戲的情形

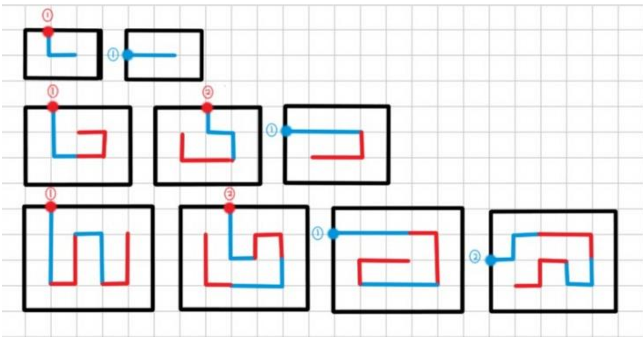
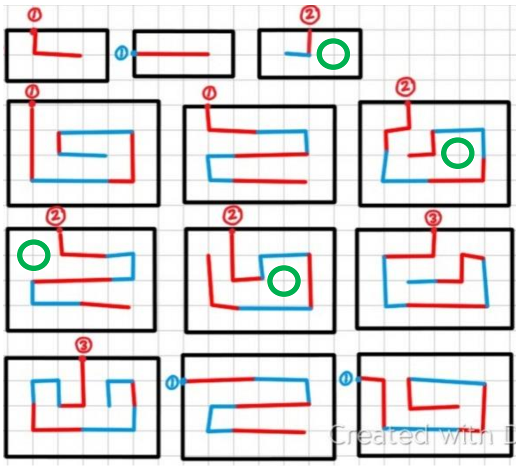


圖 4-2-2 在 2x3、3x4、4x5 方格表中進行鋸木塊遊戲的情形

但是，在偶數邊長×偶數邊長的方格表卻沒有此現象，如在 2x4、4x6、6x8 方格表中進行鋸木塊遊戲時，發現只要從偶數行或列開始切，就會至少有一個節點無法被切到，就無法切出該方格表中最多可切單位數，如圖 4-2-3 所示。



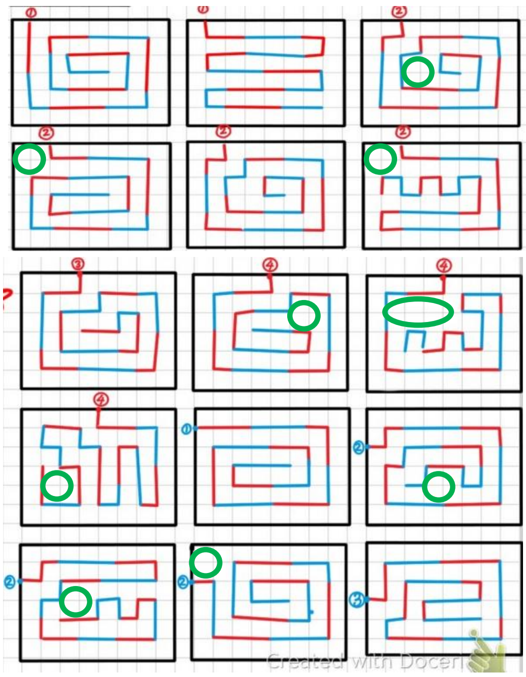


圖 4-2-3 在 2x4、4x6、6x8 方格表中進行鋸木塊遊戲的情形

2.尋找關係與樣式

我們在尋找關係的過程中發現：在**奇數邊長×奇數邊長**和**奇數邊長×偶數邊長**的方格表進行鋸木塊遊戲時，可以從任何邊上的起點開始切，都能切出該方格表中最多可切單位數，也就是所切的路徑可通過方格表中所有節點。但在**偶數邊長×偶數邊長**的方格表只要從邊長上的偶數起點開始切，就無法切出該方格表中最多可切單位數，至少有一個節點無法被切到。

3.猜測與檢驗：

透過觀察及尋找關係，我們猜測在鋸木塊遊戲中是否從不同行或列開始切皆可切出最多可切單位數，似乎**與方格表的節點個數**有關，由於節點個數的公式為(邊長-1)×(邊長-1)，也就是(m-1)×(n-1)，因此邊長為奇數或偶數，會形成不同奇數或偶數的節點個數。我們猜測在**奇數邊長×偶數邊長**和**奇數邊長×奇數邊長**的方格表中，節點個數由於皆為**偶數**，從不同行或列開始切皆可切出最多可切單位數，我們在 5×6、6×7、5×7 及 7×9 的方格表中進行檢驗，發現符合我們的猜測，如圖 4-2-4、圖 4-2-5 所示。

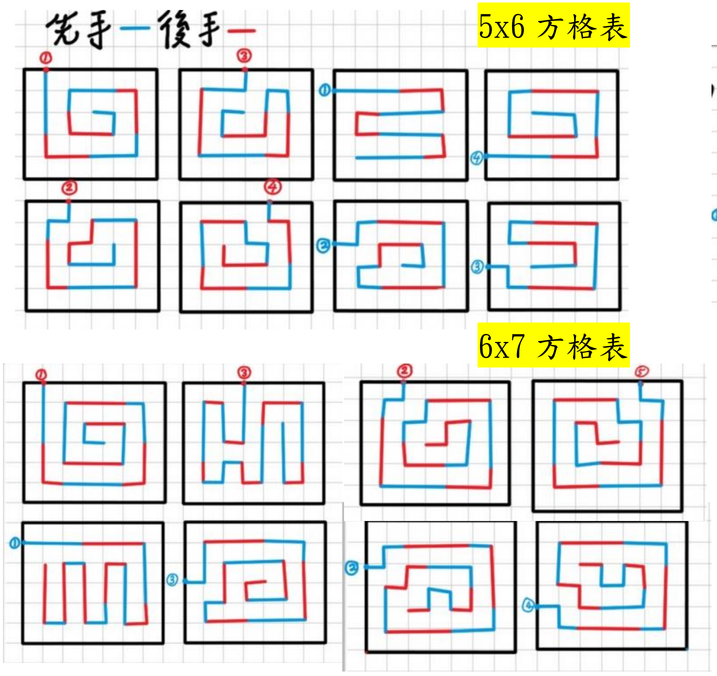


圖 4-2-4 在 5×6、6×7 方格表中進行鋸木塊遊戲的情形

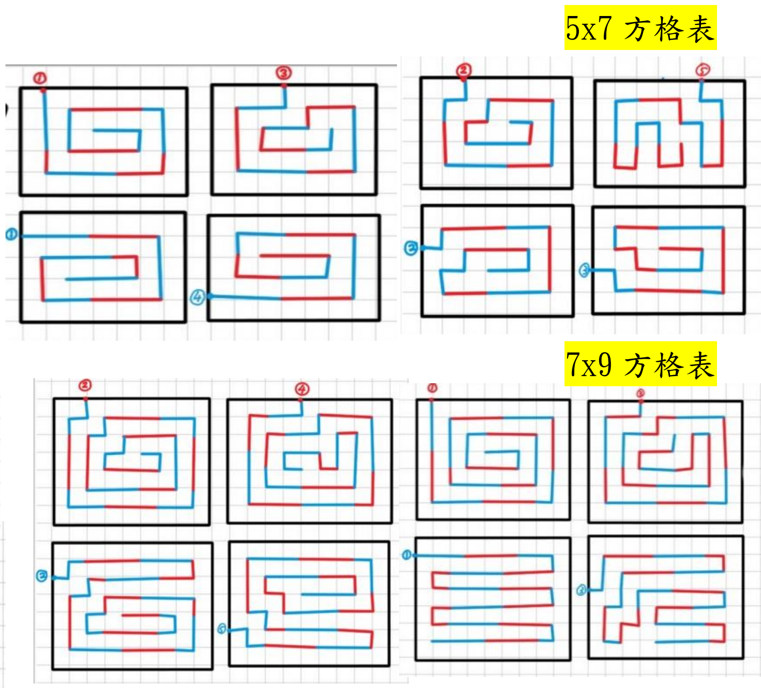


圖 4-2-5 在 5×7、7×9 方格表中進行鋸木塊遊戲的情形

此外，在**偶數邊長x偶數邊長**的方格表中，節點個數皆為**奇數**，因此，我們猜測在方格表中，只要從邊長上的偶數行或列開始切，就無法切出該方格表中最多可切單位數，我們在 8x10、10x12 的方格表中進行檢驗，發現符合我們的猜測，如圖 4-2-6 和圖 4-2-7 所示。

8x10 方格表 奇數起點　　8x10 方格表 偶數起點

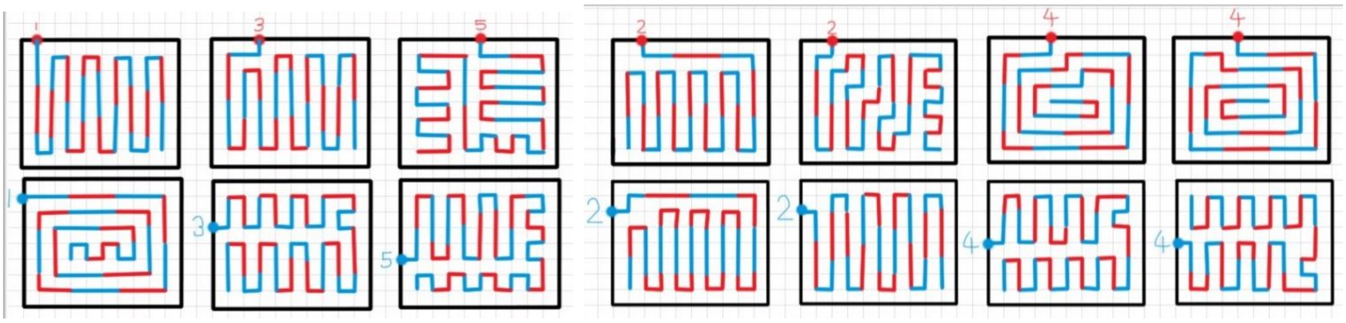


圖 4-2-6 在 8x10 方格表中進行鋸木塊遊戲的情形

10x12 方格表 奇數起點　　10x12 方格表 偶數起點

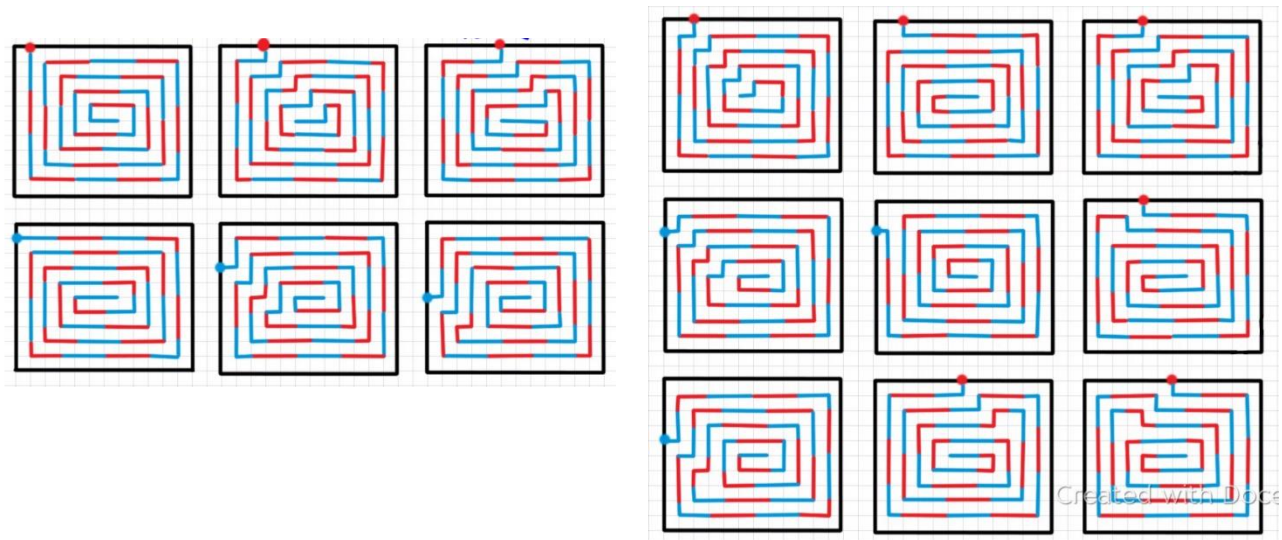


圖 4-2-7 在 10x12 方格表中進行鋸木塊遊戲的情形

4. 論證：

為了論證我們猜測與檢驗的結果，我們運用塗色法將方格表內的所有節點塗上紫色和綠色以區分奇偶點，如圖 4-2-8 及圖 4-2-9 所示。在圖 4-2-8 中為 7x8 和 7x9 的方格表，他們分別為**奇數邊長x偶數邊長**及**奇數邊長x奇數邊長**的方格表，節點個數皆為**偶數**，透過塗色法我們發現**代表奇數點的紫色點和代表偶數點綠色點的數量一樣**，因此，**從不同行或列開始切皆可切出最多可切單位數**。但是在圖 4-2-9 中為 8x10 的方格表，他是一個**偶數邊長x偶數邊長**的方格表，節點個數為**奇數**，我們發現**代表奇數點的紫色點和代表偶數點綠色點的數量不一樣**，代表**奇數點的紫色點比代表偶數點綠色點多一個**，因此在偶數邊長x偶數邊長的方格表中，如果**從代表偶數點綠色點開始切，在綠色點和紫色點要輪流切的狀況下，就會有一個紫色點落單不被切到**，反之如果從代表奇數點的紫色點開始切，在紫色點和綠色點輪流切的情況下則可切完所有節點，就可切出最多可切單位數。

根據研究問題三的論證，為了讓玩家可切出最多可切單位數我們新增規則：**在偶數邊長x偶數邊長的方格表中，先手玩家要先從奇數行或列開始進行遊戲。**

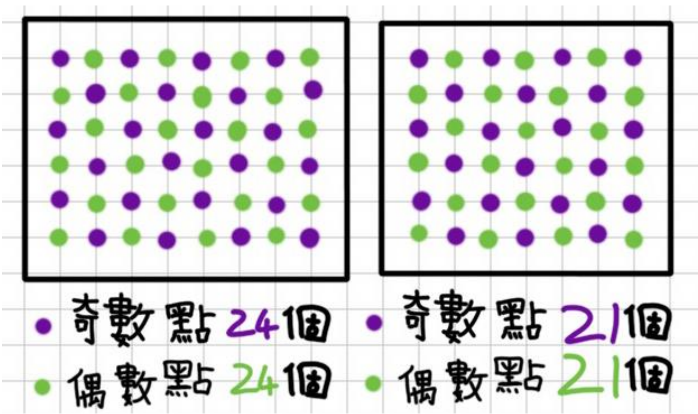


圖 4-2-8 7x8、7x9 方格表中的奇數點與偶數點

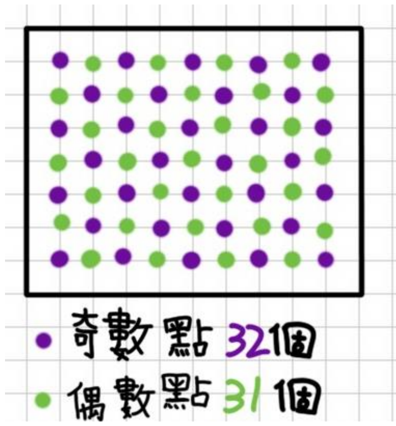


圖 4-2-9 8x10 方格表中的奇數點與偶數點

三、探討在 m×n 鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法

1.觀察

從上述的研究中，我們已經知道了鋸木塊遊戲中的最多切單位數的公式及必勝路徑，而在遊戲規則中，兩位玩家接續著前手所切的位置，依方格表內的格線且不重複切的輪流切割一到三個單位的長度，我們想知道在不同類型的 m×n 方格表中，如果要切出最多可切單位數，哪一方容易獲勝？要怎麼切才容易獲勝？最多可切單位數與必勝切法有何關聯？

2.尋找關係與樣式

為了解決這個問題，我們運用逆向思考法來探討這個問題。我們先從 2x10 的鋸木塊遊戲作探討，由於 2x10 是偶數邊長x偶數邊長方格表，從前述的研究結果中我們知道，在偶數邊長x偶數邊長的方格表中，先手玩家要先從奇數行或列開始進行遊戲，才能切出最多可切單位數。以 2x10 的鋸木塊遊戲為例，最多可切單位數為 9 單位，也就是最多可切到 9 個節點，我們將這 9 個節點從方格表中取出，先排成一直線作思考，如圖 4-3-1 所示。我們發現若是要在遊戲中獲勝，必須要搶先鋸到第 9 個點，由於在遊戲規則中，兩位玩家可輪流接續前手切割一到三個單位，透過逆向思考法，我們發現，為了搶先鋸到第 9 個點，就必須搶先鋸到第 5 個點，為了搶先鋸到第 5 個點，就必須搶先鋸到第 1 個點。因此，先手若能從奇數起點出發，且第一回合先只鋸 1 單位，就能在之後進行遊戲時，接續後手鋸(4-後手所切的單位數)單位，即可順利鋸到第 5 個點及第 9 個點並獲勝。

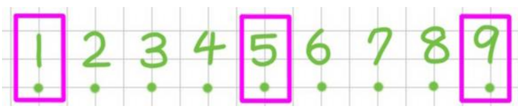


圖 4-3-1 運用逆向思考法對 2x10 鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程

接著，我們又對 3x7 鋸木塊遊戲進行探討，從前述的研究中我們可得知，奇數邊長x奇數邊長的方格表中，不論從任一行或列的起點

出發進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，因此 3x7 鋸木塊遊戲不論從哪一個起點出發最多都可切 12 單位，也就是每個節點都會被切到。我們將這 12 個節點從方格表中取出，先排成一直線作思考，如圖 4-3-2 所示。我們發現若是要在遊戲中獲勝，必須要搶先鋸到第 12 個點，由於在遊戲規則中，兩位玩家可接續前手輪流切割一到三個單位，透過逆向思考法，我們發現，為了搶先鋸到第 12 個點，就必須搶先鋸到第 8 個點，為了搶先鋸到第 4 個點，一開始就不能鋸到第 1 個點。所以，總是可以不會鋸到第 1 個點的後手，若是能在進行遊戲時，鋸(4-先手所切的單位數)單位，就能鋸到第 4 個點、第 8 個點及第 12 個點獲勝。

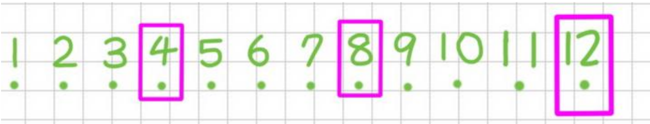


圖 4-3-2　運用逆向思考法對 3x7 鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程

3.猜測與檢驗：

根據觀察及尋找關係兩個部份，我們推測鋸木塊遊戲的必勝切法與方格表中的節點個數是否為 4 的倍數有相關性，如果方格表中的節點個數為 4 的倍數，則後手有必勝切法，後手只要在進行遊戲時，鋸(4-先手所切的單位數)單位就能獲勝，但當方格表中的節點個數非 4 的倍數，則先手有必勝切法，先手只要先切(總單位數÷4 後的餘數)單位，之後接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝。

根據以上推論，我們持續探討在 3x6 鋸木塊遊戲及 4x6 鋸木塊遊戲的必勝切法，發現方格表中最多可切的單位數與必勝切法確實有關連，而且不同的最多可切單位數也會讓先手或後手有必勝切法，像是在 3x6 鋸木塊遊戲中，由於節點個數為 10，最多可切單位數亦為 10，10 除以 4 之後會餘 2，因此先手只要一開局只要先切 2 單位，之後接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝，如圖 4-3-3 所示。

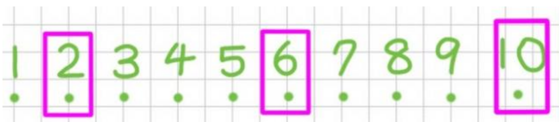


圖 4-3-3　運用逆向思考法對 3x6 鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程

而在 4x6 鋸木塊遊戲中，由於節點個數為 15，最多可切單位數亦為 15，15 除以 4 之後會餘 3，因此先手只要一開局只要先切 3 單位，之後接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝，如圖 4-3-4 所示。

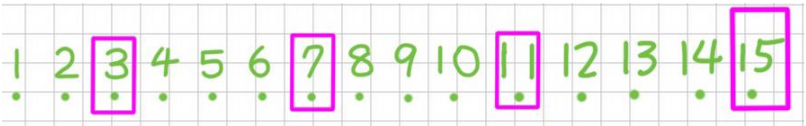


圖 4-3-4 運用逆向思考法對 3x6 鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程

4.**論證**

根據尋找關係與樣式及猜測與檢驗的結果，我們可以論證以下結論：如果方格表中可切的最多單位數是 4 的倍數，後手會有必勝切法；如果方格表中最多可切單位數不是 4 的倍數，先手會有必勝切法。而且我們也發現先手只要先切(總單位數÷4 後的餘數)單位，之後接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝。

伍、結論

一、探討 mxn 鋸木塊遊戲的遊戲規則與適合進行遊戲的矩形邊長數

根據研究發現，若要在 mxn 鋸木塊遊戲順利進行遊戲，為了讓先手及後手都可以有機會參與遊戲，至少可以各下一回合，**所以在 mxn 方格表中，我們規定：m≥2，n≥3。**

二、探討在 mxn 鋸木塊遊戲的最多可切單位數

根據研究發現，最多可切的單位數會等於節點個數，也就是(邊長-1)x(邊長-1)，因此我們可得證鋸木塊遊戲中最多可切的單位數的公式即為(m-1)x(n-1)。

三、探討在 mxn 鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝路徑

根據研究發現，**奇數邊長x偶數邊長**及**奇數邊長x奇數邊長**的方格表，由於節點個數皆為**偶數**，透過塗色法我們發現**代表奇數點的紫色點和**

代表偶數點綠色點的數量一樣，因此，**從不同行或列開始切皆可切出最多可切單位數。**但是**偶數邊長×偶數邊長**的方格表，由於節點個數為**奇數**，我們發現**代表奇數點的紫色點和代表偶數點綠色點的數量不一樣**，代表**奇數點的紫色點比代表偶數點綠色點多一個**，因此在偶數邊長×偶數邊長的方格表中，如果**從代表偶數點綠色點開始切，在綠色點和紫色點要輪流切的狀況下，就會有一個紫色點落單不被切到**，反之如果從代表奇數點的紫色點開始切，在紫色點和綠色點輪流切的情況下則可切完所有節點，就可切出最多可切單位數。

根據此研究問題的論證，為了讓玩家可切出最多可切單位數我們新增規則：**在偶數邊長×偶數邊長的方格表中，先手玩家要先從奇數行或列開始進行遊戲。**

四、探討在 m×n 鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法

根據研究發現，如果方格表中的節點個數，也就是可切的最多單位數是 4 的倍數，後手會有必勝切法；如果方格表中最多可切單位數不是 4 的倍數，先手會有必勝切法。而且我們也發現先手只要先切(總單位數÷4 後的餘數)單位，之後接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝。

陸、評鑑與省思

一、研究動機

萬事起頭難，我們十分慶幸能踩在巨人的肩膀上就能看得更高更遠，因暑假在構思題目階段時，就參與學長在全國科展的展覽發表及實際接觸鋸木塊遊戲而對這個遊戲產生興趣，才有了研究的動機。想讓這個遊戲變得更好更多樣性也是我們之後持續還會進行作研究的動機，我們認為這個遊戲還有許多待探究之處，不同形狀的部分，正三角形或者正六角形也是很好的研究題材，受限於研究時間的限制，我們期盼能在日後持續進行研究。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

在進行工作進度的擬定與研究計畫時，我們也因為有了學長分享的研究歷程及經驗，而讓我們在規劃工作進度時頗為順利，能在期限內完成各研究問題的研究，我們認為先閱讀文獻對我們的幫助很大。

三、彙整相關文獻與資料分析

在進行彙整相關文獻時，我們才了解到原本數學的方法是用來解決問題的，也是一種思考方式，而用簡單的方法就能解決許多令人困惑的問題也令人驚喜。

四、研究結果與討論

這次研究中，我們花最多時間去撰寫這個部分，由於這是我們第一次參與數學科的獨立研究，因此在寫作上困難重重，還好有老師指導我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程去拆解這個遊戲並讓我們可以完成此研究。

柒、參考資料

一、許志農（2011）。戲說數學。取自

http://tblog.pcsh.ntpc.edu.tw/lifetype/gallery/59/戲說數學.pdf

二、林暐捷、陳力誠、陳睿甫、陳宥叡。步步為「贏」—鋸木塊遊戲之探討。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會國小數學組。