# 彰化縣112年度國民中小學學生獨立研究作品徵選
# 作品說明書

## 三維到二維玩美數

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校資優班在中、高年級的特需課程中設有「獨立研究」相關課程，旨在培養學生以資訊技能作為擴展學習與溝通研究工具的習慣，提升資料搜尋、處理、分析、展示與應用的能力；並進行基礎研究技能的訓練，配合多元化課程規劃，擬定並執行、調整與修正研究計畫，培養對專題研究發表的能力與經驗。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

本校獨立研究訓練相關課程規劃採循序漸進的模式：

（一）探索及簡單的方法訓練經由討論、蒐集、報告、創作、欣賞、評鑑等活動，涉獵各科領域。安排不同的主題課程，循序引導學生學會資料蒐集、重點摘錄、應用、分析、歸納整理、發表，並培養主題研究的興趣。

（二）方法訓練透過主題研究的方式，練習各種研究方法，如：實驗、調查、問卷及工具的認識與應用。

（三）分組研究與創作熟練各種研究方法，以興趣出發，師生共同討論決定研究主題，採小組分工合作方式，共同完成。

（四）獨立研究與創作學生能自行擬定研究計畫，安排學習進度，適時完成計畫及自我評鑑。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

四年級時，我們下課時很常在教室後方玩「益智拼貼樂」，我們每次都使用許多不同圖形，例如:正五邊形、正六邊形和正方形等等，拼出許多不同的正多面體。五年級時，我們更把許多不同的正多邊形組合起來，拼出其他的立體圖形。

在拼這些立體圖形的過程中，我們想知道，這些立體圖形的名稱分別叫什麼？由正五邊形拼出來的正多面體叫做正12面體、用8個正三角形拼出來的叫正八面體……而其中最特別的就是--由正五邊形和正六邊形一同拼出來的「巴克球」，因為是由兩種以上不同正多面體拼湊而成，所以不能稱為正多面體。而且其實足球也是巴克球的一種呦！當我們發現正五邊形和正六邊形可以拼湊成巴克球時，我們不禁想，那麼正六邊形可以單獨拼湊成一個正多面體嗎？

正當我們發現正六邊形無法拼出一個正多面體，只能拼出一個周角時，讓我們更加好奇，還有哪些正多邊形，或正多面體的展開圖，可以跟正六邊形一樣，鑲嵌成另一個更大的圖形？這個問題，打開了我們對正多面體和展開圖的研究之旅。

二、 擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

（一）擬定正式計畫、研究問題

1、認識並探討多面體的組成結構。

2、計算多面體的面數、頂點數及邊數，並進行規律探討。

3、探討正多面體的展開圖。

4、密鋪正多邊形，成為美麗的鑲嵌圖案。

5、繪製有規律的直線，形成奇妙的曲線和立體感。

（二）工作進度表

| | 2-4月 | 5月 | 6月 | 9月 | 10月 | 11月 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 選擇主題 | V | | | | | |
| 擬定問題 | | V | | | | |
| 尋找資源 | | | V | V | | |
| 記錄研究發現與結果 | | | | V | V | |
| 研究報告整理與打字 | | | | | V | V |
| 評鑑與檢討 | | | | | | V |

三、 彙整相關文獻

（一）全國第46屆中小學科學展覽會作品說明書：柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究

（二）全國第51屆中小學科學展覽會作品說明書：滾動棋積—三角正多面體與滾積木遊戲

（三）全國第58屆中小學科學展覽會作品說明書：璀璨幾何~多面體之規律探究

（四）全國第59屆中小學科學展覽會作品說明書：大展鴻圖

四、資料分析

【研習一】認識並探討多面體的組成結構

（一）以同一類正多邊形為零件時，可以組成正多面體的成品

1、以正三角形為零件時，可以組成正多面體的成品

| 零件名稱 | 零件個數 | 成品名稱 | 成品圖片 |
|---|---|---|---|
| 正三角形 | 4 個 | 正四面體 |  圖 1 |
| 正三角形 | 8 個 | 正八面體 |  圖 2 |
| 正三角形 | 20 個 | 正二十面體 |  圖 3 |

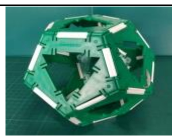
表一

2、以正方形為零件時，可以組成正多面體的成品

| 零件名稱 | 零件個數 | 成品名稱 | 成品圖片 |
|---|---|---|---|
| 正方形 | 6 個 | 正六面體 |  圖 4 |

表二

3、以正五邊形為零件時，可以組成正多面體的成品

| 零件名稱 | 零件個數 | 成品名稱 | 成品圖片 |
|---|---|---|---|
| 正五邊形 | 12 個 | 正十二面體 |  圖 5 |

表三

4、以正六邊形為零件時，無法組成正多面體的成品, 只能拼成平面圖形，產生鑲嵌的圖案。（如圖 6）

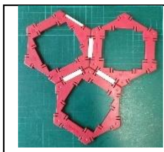
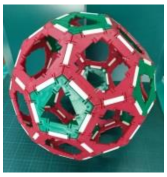


圖 6

（二）以不同類正多邊形為零件時，可以組成正多面體的成品；

以正五邊形+正六邊形為零件時，可以組成多面體的成品

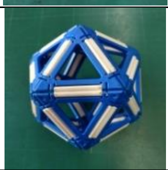
| 零件名稱 | 零件個數 | 成品名稱 | 成品圖片 |
|---|---|---|---|
| 正五邊形 | 12 個 | 巴克球、阿基米得多面體 |  圖 7 |
| 正六邊形 | 20 個 | | |

表四

【我們的發現】

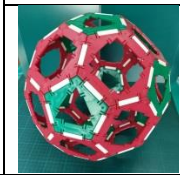
1、圖 1、圖 2、圖 3、圖 4、圖 5，為正多面體，每一個面都是由同一類的正多邊形所組合成的。正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體，以上這 5 種正多面體，也稱作柏拉圖多面體。

2、在多面體的組裝過程中，要構成「立體角」，至少需要三面多邊形（如圖 1），至多五面多邊形（如圖 3），用相同的正多邊形組成的立體角有 5 種。（如下表）

| 編號 | 立體角 | 立體角相交的面 | 相交頂點處角度的總和 | 結果 |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  | 3 個正三角形 | $60^\circ \times 3=180^\circ$ | 小於 360 度 |
| 2 |  | 4 個正三角形 | $60^\circ \times 4=240^\circ$ | 小於 360 度 |
| 3 |  | 5 個正三角形 | $60^\circ \times 5=360^\circ$ | 小於 360 度 |
| 4 |  | 3 個正方形 | $90^\circ \times 3=270^\circ$ | 小於 360 度 |
| 5 |  | 3 個正五邊形 | $108^\circ \times 3=324^\circ$ | 小於 360 度 |

表五

3、在巴克球的組裝過程中，要構成「立體角」，需要三面多邊形

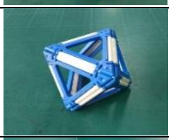
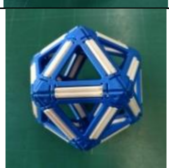
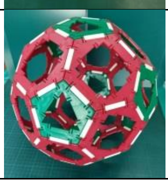
| | 立體角 | 立體角相交的面 | 相交頂點處<br>角度的總和 | 結果 |
|---|---|---|---|---|
| 巴克球 |  | 1 個正五邊形<br>+2 個正六邊形 | $108^\circ+120^\circ+120^\circ=348^\circ$ | 小於<br>360<br>度 |

表六

4、正三角形 4 個，正三角形 8 個，正三角形 20 個，正方形 6 個，正五邊形 12 個，都能組成正多面體，但同類的正六邊形無法組成多面體，因為正六邊形的每一個內角為 120 度，3 個正六邊形的內角和為 $120^\circ\times3=360^\circ$，360 度為周角，無法形成立體角。

【研習二】計算多面體的頂點數、邊數及面數，並進行規律探討

（一）計算多面體的頂點數、邊數及面數

| 名稱 | 圖片 | 面數 F | 頂點數 V | 邊數 E | 頂點數+面數 |
|---|---|---|---|---|---|
| 正四面體 |  | 4 | 4 | 6 | 8 |
| 正六面體 |  | 6 | 8 | 12 | 14 |
| 正八面體 |  | 8 | 6 | 12 | 14 |
| 正十二面體 |  | 12 | 20 | 30 | 32 |
| 正二十面體 |  | 20 | 12 | 30 | 32 |
| 巴克球 |  | 32 | 60 | 90 | 92 |

表七

（二）統計多面體的面數、頂點數的和邊數，觀察 F、V、E 的數量關係

| 名稱 | 面數 F | 頂點數 V | 邊數 E | F、V、E 的數量關係 |
|---|---|---|---|---|
| 正四面體 | 4 | 4 | 6 | 4+4-6=2 |
| 正六面體 | 6 | 8 | 12 | 6+8-12=2 |
| 正八面體 | 8 | 6 | 12 | 8+6-12=2 |
| 正十二面體 | 12 | 20 | 30 | 12+20-30=2 |
| 正二十面體 | 20 | 12 | 30 | 20+12-30=2 |
| 巴克球 | 32 | 60 | 90 | 32+60-90=2 |

表八

**【我們的發現】**

1、上網查詢多面體頂點數、邊數及面數的數學代號，

多面體的頂點數( number of vertices)=V ，

邊數(number of edges)=E

面數(number of faces)=F

2、將多面體的頂點數、邊數及面數點的數據整理後，發現多面體頂點數、邊數與面數之間，存在著以下的奇妙關係：

「頂點數 V + 面數 F -邊數 E= 2」，查詢相關資料後發現，這便是著名的尤拉定理： V－E + F = 2

【研習三】探討正多面體的展開圖

(一)正四體展開圖共有 2 種

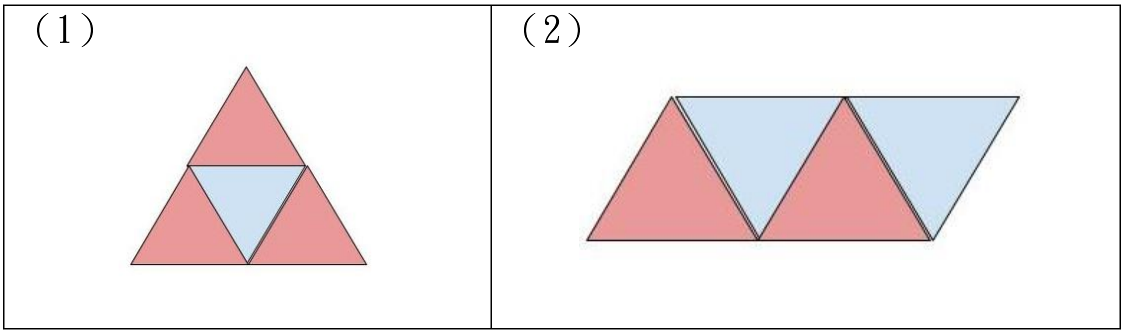



圖 8

(二)正六面體的展開圖共有 11 種，分成四大類

1、 1-4-1 型:6 種

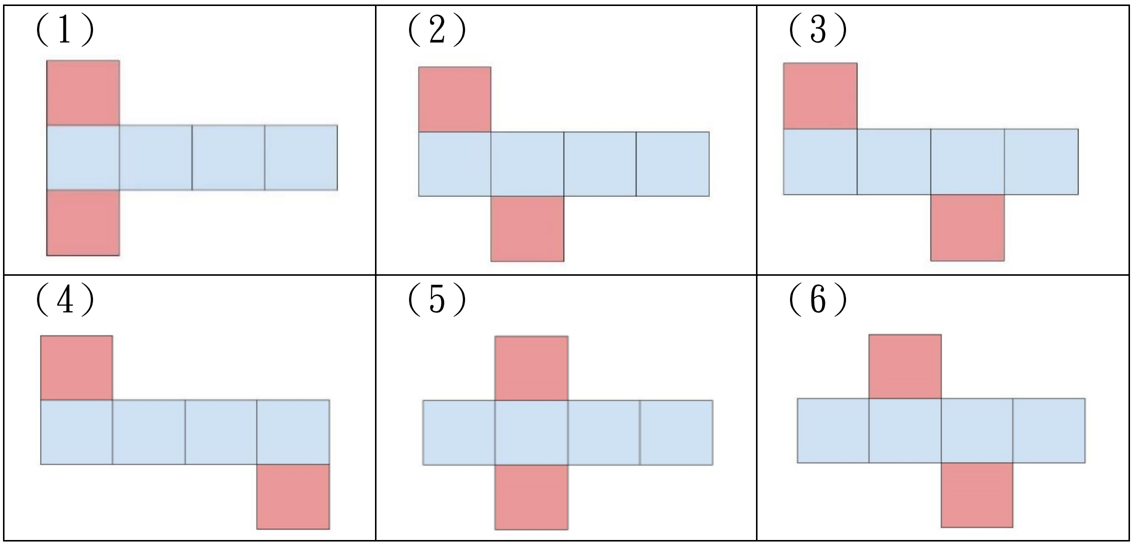



圖 9

2、 1-3-2 型:3 種

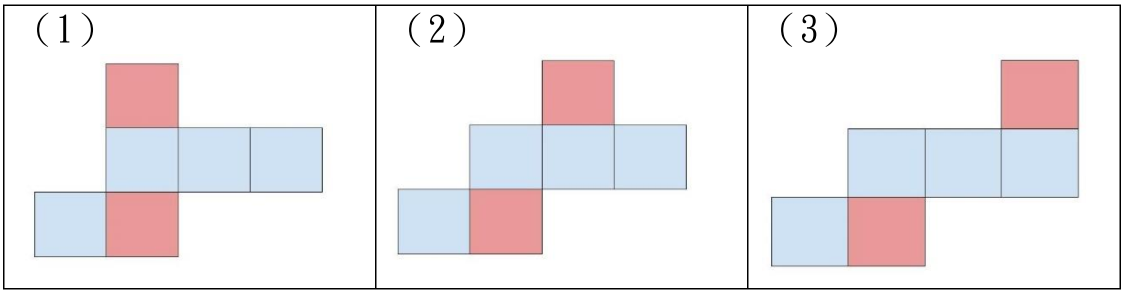



圖 10

3、 3-3 型:1 種

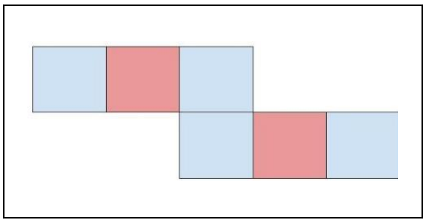


圖 11

4、 2-2-2 型:1 種

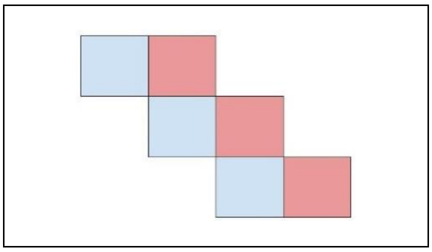


圖 12

(三)正八面體的展開圖共有 11 種，分成四大類

1、 1-6-1 型:6 種

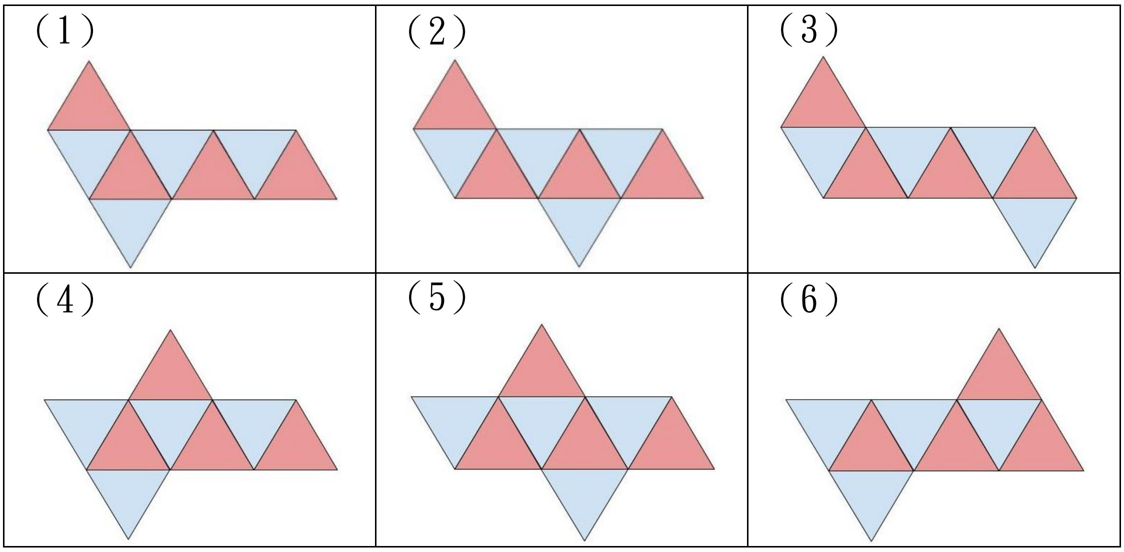



圖 13

2、 1-5-2 型:3 種

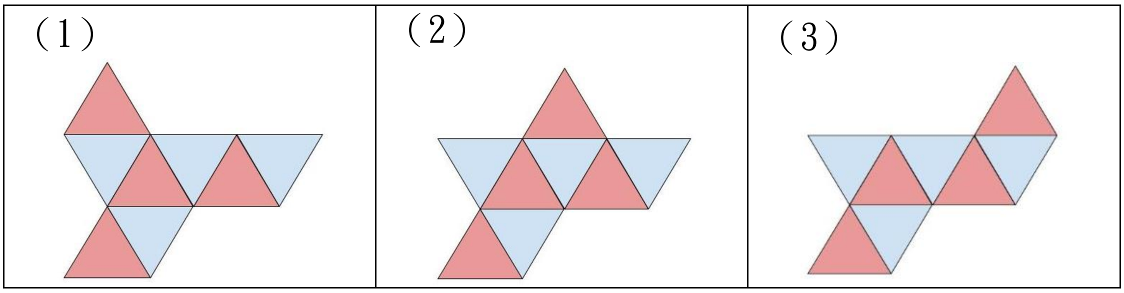



圖 14

3、 1-4-3 型:1 種

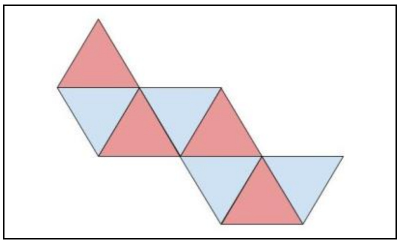


圖 15

4、 4-4 型:1 種

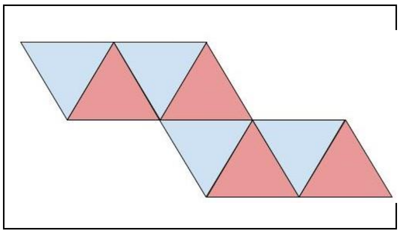


圖 16

**【我們的發現】**

1、正四體展開圖共有 2 種(如圖 8)， 正六面體的展開圖共有 11 種，分成四大類， 1-4-1 型:6 種，1-3-2 型:3 種，3-3 型:1 種，2-2-2 型:1 種，(如圖 9～12)

2、正八面體的展開圖共有 11 種，分成四大類，1-6-1 型:6 種，1-5-2 型:3 種，1-4-3 型:1 種，4-4 型:1 種，(如圖 13～16)

3、正二十面體的展開圖如下圖

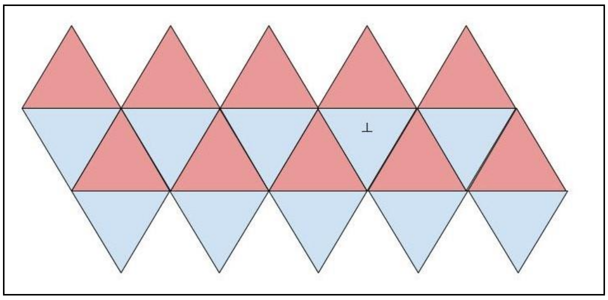


圖 17

【研習四】美麗的鑲嵌，璀璨的幾何

（一）以正六邊形為零件時，能拼成平面圖形,產生鑲嵌的圖案。 正六邊形的每一個內角為 120 度，3 個正六邊形的內角和為 $120^{\circ}\times3=360^{\circ}$，360 度為周角，能無限延伸形成美麗的鑲嵌圖案。

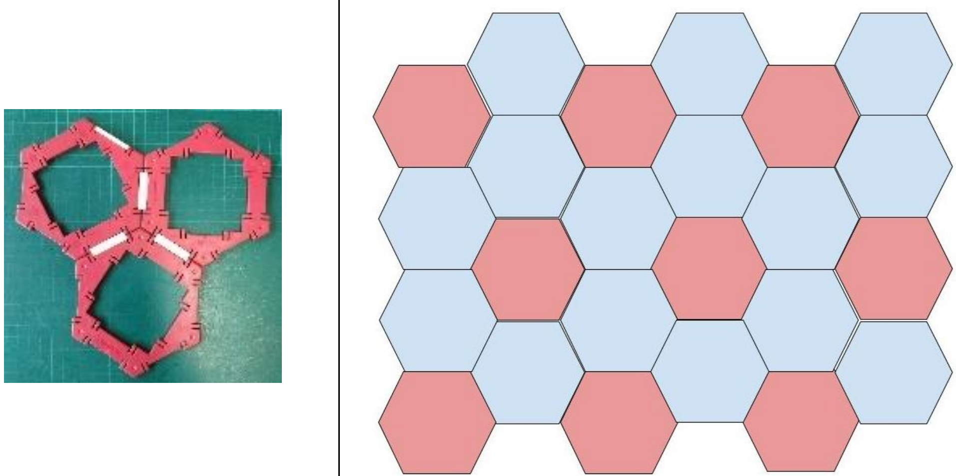


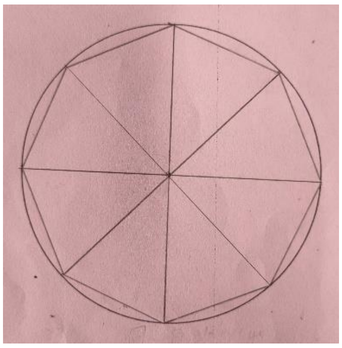
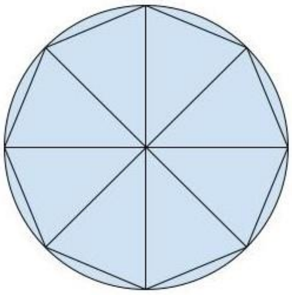
圖 18

（二）利用等分周角的方法，畫出正多邊形

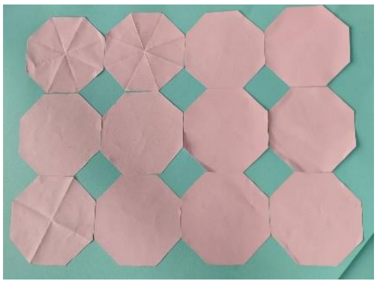
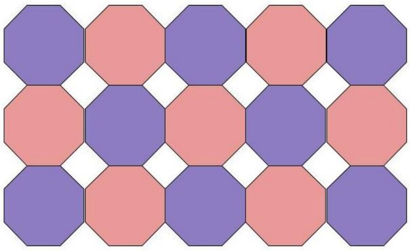
畫正八邊形→圓心角：360°÷8=45°

八邊形的內角和：180°×(8－2)=1080°

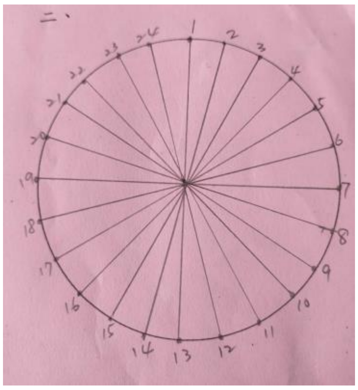
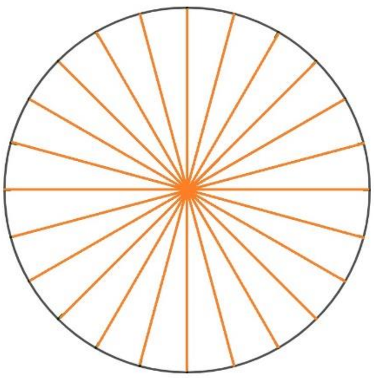
每一個內角為　1080°÷8=135°

| | |
|---|---|
|  | <br>圖 19 |

（三）正方形每一內角為 90 度，正八邊形每一內角為 135 度，135°×2+90°=360°，360 度為周角，2 個正八邊形和 1 個正方形的組合能無限延伸形成美麗的鑲嵌圖案。

| | |
|---|---|
|  | <br>圖 21 |

（四）周角 360 度等分 24 份，圓心角為 15 度，在圓上等分 24 個點，編號為 1－24，1 號連接 13 號，形成一條直徑，2 號連接 14 號，形成另一條直徑，依此規律畫出 12 條直徑，相交於圓心。

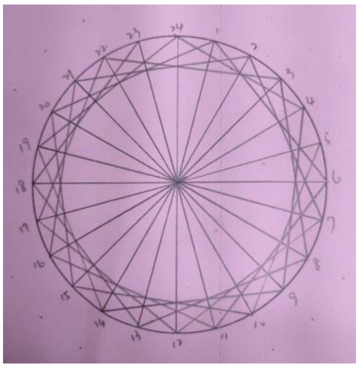
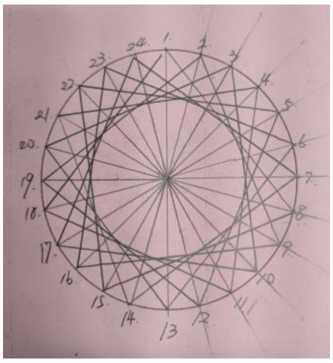
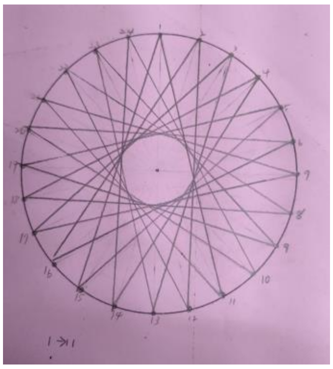
| | |
|---|---|
|  | <br>圖 22 |

（五）如果把 1 號連接 6 號，形成一條直線（弦），2 號連接 7 號，形成另一條直線（弦），依此規律畫出 24 條直線（弦），在中間的部分形成正多邊形的圖案。

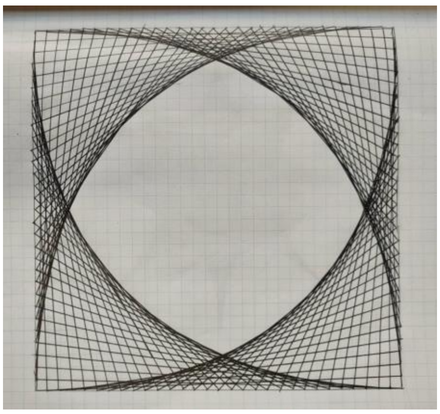
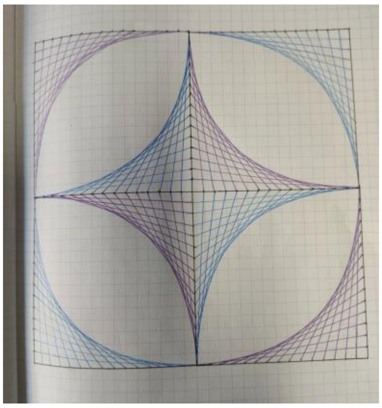
（1）1－6、2－7、3－8、4－9，以此類推，產生的第一組圖案。

（2）1－8、2－9、3－10、4－11，以此類推，產生的第二組圖案。

（3）1－11、2－12、3－13，以此類推，產生的第三組圖案。

| （1） | （2） | （3） |
|---|---|---|
|  |  |  |
| 圖 23 | 圖 24 | 圖 25 |

（六）中年級時，老師教我們用線條畫出許多不可思議的圖形，這些圖形看起來像曲線，而這些曲線都是由許多直線畫出來的，有些看起來還有點立體感，非常奧妙。當我們看到這些圖案時，覺得非常的有趣，每當有時間時，我就會拿起筆，開心地畫，後來更是會把這些圖案結合起來或是進行改造，這就是我們的玩美數學。

| | |
|---|---|
|  圖 26 |  圖 27 |

## 【我們的發現】

1、正多邊形的每一個內角加上圓心角總和為 180 度

| | 內角和 | 一個內角 | 圓心角 | 內角+圓心角 |
|---|---|---|---|---|
| 正五邊形 | 180°×(5-2)=540° | 108° | 72° | 108°+72°=180° |
| 正六邊形 | 180°×(6-2)=720° | 120° | 60° | 120°+60°=180° |
| 正八邊形 | 180°×(8-2)=1080° | 135° | 45° | 135°+45°=180° |
| 正九邊形 | 180°×(9-2)=1260° | 140° | 40° | 140°+40°=180° |

表九

2、數個正多邊形的內角總和為 360 度時，即可形成鑲嵌圖案：

正三角形：60°×6=360°

正方形： 90°×4=360°

正六邊形：120°×3=360°

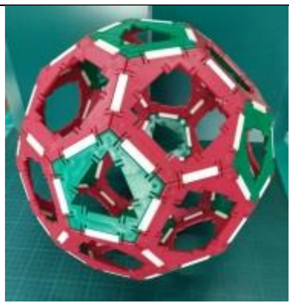
正方形＋正八邊形＋正八邊形：90°＋135°＋135°＝360°。(圖 21)

3、在圓上繪製有規律的 24 條弦，如圖 23～圖 25，當點與點的間隔越大，也就表示弦的長度越長時，形成的正多邊形會越小，且越趨近於圓形。

4、利用規律直線的魔力繪製出圖 26 和圖 27，此圖案產生奇妙的曲線和立體的視覺感。

## 五、 研究結果與討論

（一）由研習一中我們得知，正多面體，每一個面都是由全等的正多邊形所組成的，(如圖 1～圖 5)，正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體，以上這 5 種正多面體，也稱作柏拉圖多面體。12 個正五邊形+20 個正六邊形，可以組成多面體的成品(如圖 7)，此多面體為阿基米得多面體又稱為巴克球。

| 柏拉圖多面體 | 阿基米得多面體 |
|---|---|
| 20 個正三角形 | 12 個正五邊形+20 個正六邊形 |
|  正二十面體 |  巴克球 |

表十

（二）由研習一中，我們得知在多面體的組裝過程中，要構成「立體角」，至少需要三面多邊形（如圖 1)，至多五面多邊形（如圖 3)，相交頂點處角的總和必須小於 360 度。

（三）觀察多面體的頂點數、邊數及面數點的數量關係，發現多面體頂點數 V、面數 F 與邊數 E 之間，存在著以下的奇妙關係：
「頂點數 V ＋ 面數 F － 邊數 E ＝ 2」，這便是著名的尤拉定理

$$V - E + F = 2$$

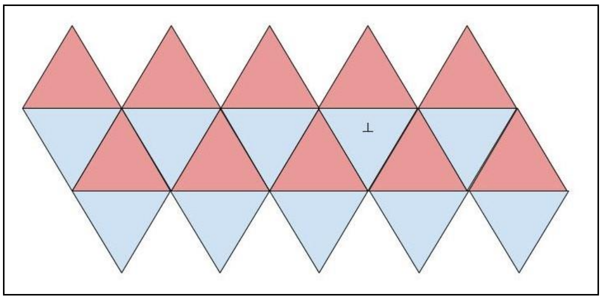
| 名稱 | 面數 F | 頂點數 V | 邊數 E | F、V、E 的數量關係 |
|---|---|---|---|---|
| 正四面體 | 4 | 4 | 6 | 4+4-6=2 |
| 正六面體 | 6 | 8 | 12 | 6+8-12=2 |
| 正八面體 | 8 | 6 | 12 | 8+6-12=2 |
| 正十二面體 | 12 | 20 | 30 | 12+20-30=2 |
| 正二十面體 | 20 | 12 | 30 | 20+12-30=2 |
| 巴克球 | 32 | 60 | 90 | 32+60-90=2 |

（四）

1、正四體展開圖共有 2 種(如圖 8)， 正六面體的展開圖共有 11 種，分成四大類， 1-4-1 型:6 種，1-3-2 型:3 種，3-3 型:1 種，2-2-2 型:1 種，(如圖 9～12)

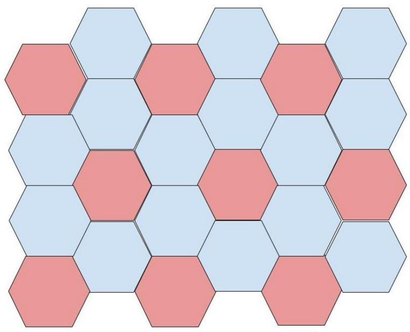
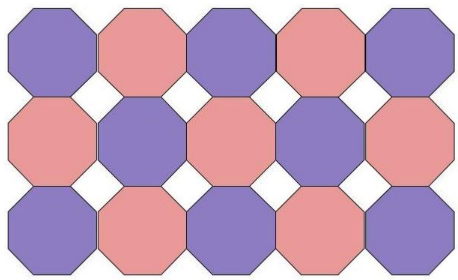
2、正八面體的展開圖共有 11 種，分成四大類，1-6-1 型:6 種，1-5-2 型:3 種，1-4-3 型:1 種，4-4 型:1 種，(如圖 13～16)

3、正二十面體的展開圖如下圖 （圖 17）



（五）正六邊形的每一個內角為 120 度，3 個正六邊形的內角和為 $120^\circ \times 3=360^\circ$，360 度為周角，無法形成立體角，因此正六邊形無法組成多面體，但能無限延伸形成美麗的鑲嵌圖案。

2 個正八邊形和 1 個正方形，其內角和為 $135^\circ \times 2+90^\circ=360^\circ$，360 度為周角，此組合也能無限延伸形成美麗的鑲嵌圖案。

| 正六邊形 | 2 個正八邊形和 1 個正方形 |
|---|---|
|  |  |

（六）在圓上繪製有規律的 24 條弦，如圖 23～圖 25，當連接的點與點間隔越大，也就表示弦的長度越長時，形成的正多邊形會越小，且越趨近於圓形。

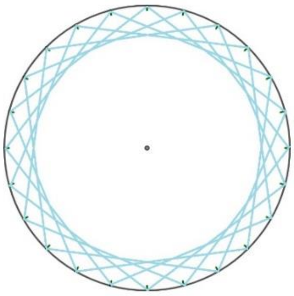


圖 23

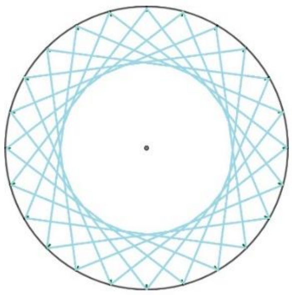


圖 24

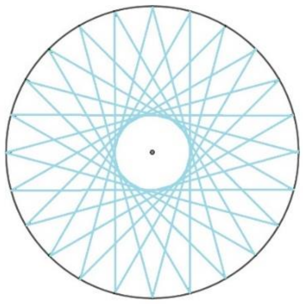


圖 25

（七）用不同的顏色的線段，當成直徑和弦，將圖 22～圖 25 結合於同一個圓之中，產生一個令人驚豔的圖案，且含有數學密碼的藝術作品——玩美數學。

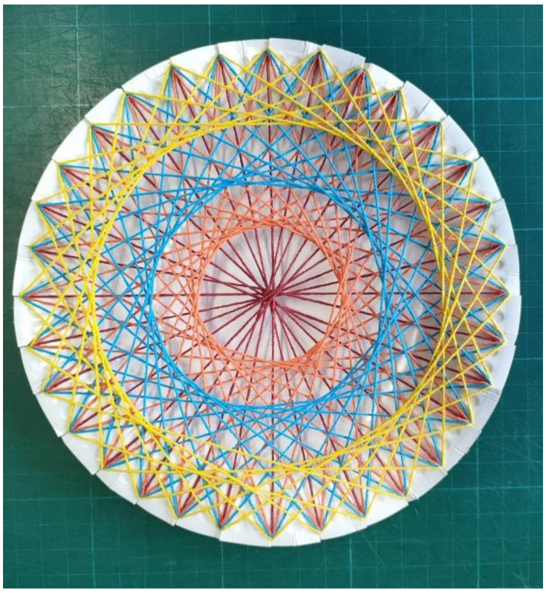


圖 28

六、 評鑑與檢討：上述每一階段的省思與收穫

（一）在拼正多面體立體形狀時，我們以班級上現有的多邊形拼片開始著手，因此研究中只限於正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形，未來若有機會，也許可以嘗試其他不同種類的正多邊形，享受實際動手做的成就感。

（二）拍攝照片時，我們發現背景顏色應該要與主要拍攝作品相襯，才能夠顯出作品的顏色以及立體感。因此研究後半段，我們除了動手製作成品之外，也學習電腦繪圖技巧，將平面圖以及直徑及弦繪畫成電子圖檔，不僅學習了電腦課沒有學過的軟體，也在繪圖過程中沉浸在線條與數學的美感。

（三）利用弦畫出藝術圖的時候，我們挑選了點與點間距 5、間距 7、間距 10，如果可以的話，我們也想嘗試固定不同的間距來製作不同的美麗圖形。除了固定間距外，我們也思考，這些圖形的變化是否會因為點與點之間的間距夾角度數，而產生不同變化，這些是未來值得探討的。

七、參考資料

（一）全國第46屆中小學科學展覽會作品說明書：柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究

（二）全國第51屆中小學科學展覽會作品說明書：滾動棋積—三角正多面體與滾積木遊戲

（三）全國第58屆中小學科學展覽會作品說明書：璀璨幾何~多面體之規律探究

（四）全國第59屆中小學科學展覽會作品說明書：大展鴻圖

（五）南一書局（2023）。國民小學數學課本第九冊。台南市：南一

（六）南一書局（2023）。國民小學數學課本第十冊。台南市：南一

（七）昌爸的數學工作坊 http://www.mathland.idv.tw/