

彰化縣 112 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

組別：

國小組

數學類

自然、科技類

國中組

人文社會類

作品名稱：千變萬化-探討 Gabriel's Problem

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

彰化縣 112 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選 作品說明書

第一階段 研究訓練階段（教師撰寫）

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校自三年級起提供資優學生相關課程服務，主要切分為兩大部分：研究技能訓練與獨立研究實踐。

課程目標：（一）能體驗發現及解決問題的過程。

（二）能熟練某領域的知識。

（三）能學會研究所需技能。

（四）能依個人興趣拓展相關知識。

（五）能培養正確與積極的研究態度。

（六）能學會與人分工合作的正確態度。

課程大綱如下圖：



二、學校如何提供該生獨立研究訓練

學校在安排獨立研究課程時，按照學生年級切分為三年級、四年級，以及高年級三層次，說明如下：

- (一) 三年級：針對三年級的資優生，會設計與學科相關的課程以拓展其知識基礎，每週安排兩節主題探索課程，主要在研究技巧的訓練方面，讓學生學習文書處理、資料蒐集與整理方法、圖書館運用、觀察與做筆記的能力、晤談方法。在資源教室的充實活動中，提供一般探索機會，搭配如數位相機、顯微鏡、簡單科學實驗技術等的操作練習。每年安排參訪多場展覽，讓學生能找出研究興趣與觀摩優秀作品，並隨時記錄有興趣的主題。
- (二) 四年級：在學科加深加廣方面與三年級相同，但進入此階段，學生已開始針對有興趣的主題進行研究，而非單純只蒐集資料。每週兩節課的獨立研究課程，四年級資優生主要擔任研究協助者，配合學長姐的引導，協助研究觀察與記錄工作，對於了解實際研究歷程與重點事項，是很重要的訓練。
- (三) 高年級：每週進行兩節課的獨立研究課程，實際進行研究，在教師協助下，完成「訂定主題」、「擬定工作進度與分配」、「擬定研究問題」、「蒐集資料與整理」、「尋求資源」、「實際研究與記錄」、「研究討論與發現」、「撰寫書面報告與分享」之流程。在此階段，教師的角色會依據學生能力，慢慢減少干預，擔任引導討論與技術指導工作，掌握學生計畫安排與實際進度是否得宜，並在學生完成報告時協助修改。

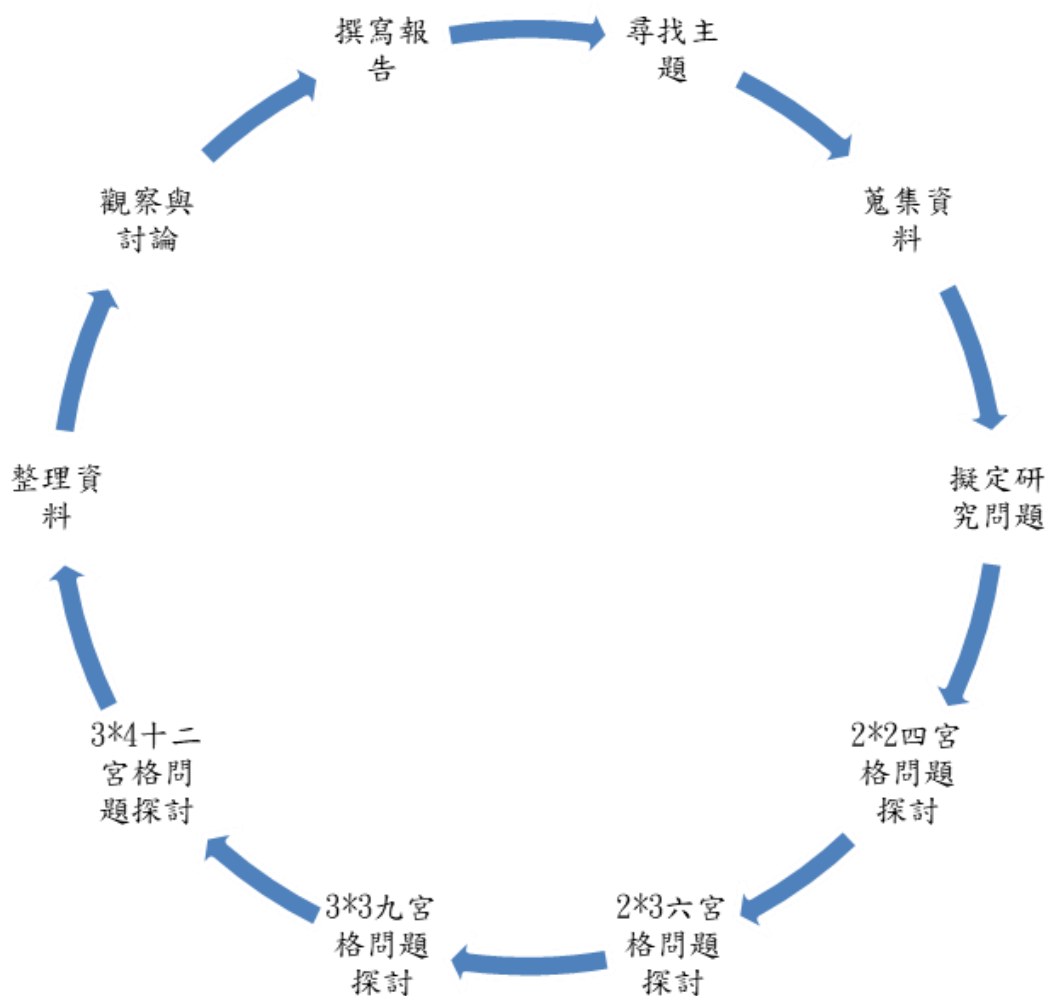
第二階段 獨立研究階段（由學生撰寫）

一、研究動機

原本是想先進行人文與社會方面主體的研究，但因為可能要和陌生人訪談、發問卷等工作，我覺得自己害怕這類的任務，又想改為自然科學類研究，又因為自然科學可能需要做很久的實驗，我覺得很麻煩，所以，最後選擇數學來進行研究。原本是想更進一步了解數學的各種類型題目，一開始回家尋找一些數學的課外讀物閱讀，當時老師也推薦我幾種不同類型的數學遊戲，嘗試之後，我覺得有些遊戲或問題太深奧、困難，我看不懂無法解題，而這款遊戲-加布里埃爾問題(Gabriel's Problem)難易適中，剛好是適合我的程度，所以想繼續深入研究。

二、擬定正式研究計畫

(一)擬定正式研究計畫



(二)研究問題

1. 探究 2×2 的四宮格加布里埃爾問題
2. 探究 2×3 的六宮格加布里埃爾問題
3. 探究 3×3 的九宮格加布里埃爾問題
4. 探究 3×4 的十二宮格加布里埃爾問題

(三)研究期程

日期	工作項目
2022/10/03~10/31	尋找主題
11/01~11/13	蒐集資料與討論研究方向
11/14~11/20	探討 2×2 的加布里埃爾問題
11/21~12/11	探討 2×3 的加布里埃爾問題
12/12~2023/01/15	觀察與討論： 2×2 四宮格與 2×3 六宮格的數字排列特性
01/16~02/16	尋找 3×3 九宮格相關資料
02/17~06/09	探討 3×3 的加布里埃爾問題
06/10~06/30	觀察與討論： 3×3 九宮格的解題策略
07/01~08/29	尋找 3×4 十二宮格相關資料
09/01~11/17	探討 3×4 的加布里埃爾問題
11/18~11/24	觀察與討論： 3×4 十二宮格的解題策略
11/25~12/15	撰寫報告

三、文獻探討

(一)名詞解釋

1. 因數：用於描述自然數 a 和自然數 b 之間存在的整除關係，即 b 可以被 a 整除。這裡我們稱 b 是 a 的倍數， a 是 b 的因數或因子。這種關係記作 $a|b$ ，讀作「 a 整除 b 」。例如： $24=3 \times 8$ ， $1150=25 \times 46$ ，所以 $3|24$ ， $25|1150$ ，同時 3 是 24 的因數； 25 是 1150 的因數。

2. 倍數：一個數的倍數是該數和另一個整數的乘積。換句話說，針對兩個數 a 和 b ，若存在一整數 n 使得 $b=na$ ，則 b 是 a 的倍數，若 a 不為零，也就表示 b/a 為一整數，其除法可以整除，沒有餘數。

例如： $4*5=20$ ，所以 20 就是 4 和 5 的倍數。

3. 質數：質數是指比 1 大的正整數中只有 1 和數字本身才能整除的數。例如： $13/1=13$ ， $13/13=1$ ，所以 1 和 13 是質數。

4. 質因數分解：將一個大的數分解成其質因數的連乘積。

5. 最大公因數：英文為 Greatest Common Divisor，簡寫為 gcd，是指能夠整除多個整數的最大正整數，且多個整數不能都為零，例如 8 和 12 的最大公因數為 4。

(二)加布里埃爾問題(Gabriel's Problem)

題目說明:在 3×3 的宮格中寫下數字 1-9，然後，將每一行中的所有數字相乘，並將結果寫在該行下方；還將每一列中的數字相乘，並將乘積寫在該列右方，最後出題者拿掉了數字 1-9。

變化一：可以使用數字 1、2、3、4、5、6、9、10 和 12，完成下列九宮格。

			12
			60
20	135		

變化二：加布里埃爾用數字 1、2、3、4、6、8、9、12 和 16 來完成下列九宮格。

			36
			384
			144
96	384	54	

四、資料分析

(一)、探究 2×2 的加布里埃爾問題

1. 將 4 個數字(以 1、2、3、4 為例)放在 2×2 的四宮格有幾種變化？

1	2	2	1	2	2	1	3	3	1	3	3	1	4	4	1	4	4
3	4	12	4	3	12	2	4	8	4	2	8	2	3	6	3	2	6
3	8		4	6		2	12		4	6		2	12		3	8	

2	1	2	2	1	2	2	3	6	2	3	6	2	4	8	2	4	8
3	4	12	4	3	12	1	4	4	4	1	4	1	3	3	3	1	3
6	4		8	3		2	12		8	3		2	12		6	4	

3	1	3	3	1	3	3	2	6	3	2	6	3	4	12	3	4	12
2	4	8	4	2	8	1	4	4	4	1	4	1	2	2	2	1	2
6	4		12	2		3	8		12	2		3	8		6	4	

4	1	4	4	1	4	4	2	8	4	2	8	4	3	12	4	3	12
2	3	6	3	2	6	1	3	3	3	1	3	1	2	2	2	1	2
8	3		12	2		4	6		12	2		4	6		8	3	

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

因為第一格有 4 個選擇，第二格有 3 個選擇，第三格有 2 個選擇，最後一格只剩 1 個選擇所以共有 24 種變化。

2. 觀察上述表格，整理出所有的倍數，可分成 3 組：(2、12)，(4、6)，(3、8)。

將每一組的數字各自進行質因數分解，找出其最大公因數。

$2=1*2$, $12=2^2*3$ 最大公因數：2

$4=2^2$, $6=2*3$ 最大公因數：2

$3=1*3$, $8=2^3$ 最大公因數：1

錯誤範例：

3	2	6	2	3	6	?	2	2
4	?	4	?	1	2	1	3	12
12	8		8	3		3	6	

$8=2^3$, $12=2^2*3$ 最大公因數：4

$2=1*2$, $6=2*3$ 最大公因數：2

$3=1*3$, $6=2*3$ 最大公因數：3

從上述我們觀察發現：

(1) 正確組數(2、12)，(4、6)，(3、8)的最大公因數只能 ≤ 2 。

(2) 因為正確組數是由 1~4 組成，而 1~4 的最大公因數是 1。

(3) 不正確組數的最大公因數會 ≥ 2 。

3. 為了檢驗，我們嘗試尋找其他的數字關係與樣式。

a. 再用更大的數字(5、6、7、8)來試試。

整理出所有的倍數，可分成 3 組：(48、35)，(42、40)，(30、56)。

將每一組的數字各自進行質因數分解，找出其最大公因數。

$48=2^4*3$, $35=5*7$ 最大公因數：1

$42=2*3*7$, $40=2^3*5$ 最大公因數：2

$30=2*3*5$, $56=2^3*7$ 最大公因數：2

錯誤範例：

6	5	30	6	?	35	6	?	56
?	7	42	8	5	40	5	7	35
48	35		48	40		30	42	

$$30=2*3*5, 42=2*3*7 \quad \text{最大公因數：3}$$

$$48=2^4*3, 40=2^3*5 \quad \text{最大公因數：2}$$

$$56=2^3*7, 35=5*7 \quad \text{最大公因數：7}$$

從上述我們觀察發現：

(1) 正確組數(48、35)，(42、40)，(30、56)的最大公因數，同樣也符合正確組數的條件： ≤ 2 。

(2) 因為正確組數是由 5~8 組成，而 5~8 的最大公因數也是 1。

b. 這次用不連續的數字(1、3、5、7)來試試。

整理出所有的倍數，可分成 3 組：(35、3)，(21、5)，(15、7)。

將每一組的數字各自進行質因數分解，找出其最大公因數。

$$35=5*7, 3=1*3 \quad \text{最大公因數：1}$$

$$21=3*7, 5=1*5 \quad \text{最大公因數：1}$$

$$15=3*5, 7=1*7 \quad \text{最大公因數：1}$$

錯誤範例：

1	7	7	5	1	5	1	7	7
3	?	35	?	3	15	5	?	35
3	21		21	3		5	15	

$$35=5*7, 7=1*7 \quad \text{最大公因數：7}$$

$$5=1*5, 15=3*5 \quad \text{最大公因數：5}$$

$$3=1*3, 21=3*7 \quad \text{最大公因數：3}$$

從上述我們觀察發現：

(1) 正確組數(35、3)，(21、5)，(15、7)的最大公因數，同樣也符合正確組數的條件： ≤ 2 。

(2) 因為正確組數是由 1、3、5、7 組成，而 1、3、5、7 的最大公因數也是 1。

c. 這次換用倍數(40、30、20、10)來試試。

10	30	300	30	40	1200	30	10	300
20	40	800	20	10	200	20	40	800
200	1200		600	400		600	400	

整理出所有的倍數，可分成 3 組：(200、1200)，(300、800)，(600、400)。

將每一組的數字各自進行質因數分解，找出其最大公因數。

$$200=2^3 \times 5^2, \quad 1200=2^4 \times 3 \times 5^2 \quad \text{最大公因數：200}$$

$$300=2^2 \times 3 \times 5^2, \quad 800=2^5 \times 5^2 \quad \text{最大公因數：100}$$

$$600=2^3 \times 3 \times 5^2, \quad 400=2^4 \times 5^2 \quad \text{最大公因數：200}$$

從上述我們觀察發現：

(1) 正確組數(200、1200)，(300、800)，(600、400)的最大公因數是 100。

(2) 因為正確組數是由 40、30、20、10 組成，而它們的最大公因數是 10。

d. 我們這次換用連續的二位數(10、11、12、13)來試試。

10	11	110	10	13	130	13	10	130
13	12	156	12	11	144	11	12	144
130	144		120	169		169	120	

整理出所有的倍數，可分成 3 組：(110、156)，(130、144)，(120、169)。

將每一組的數字各自進行質因數分解，找出其最大公因數。

$$110=2 \times 5 \times 11, \quad 156=2^2 \times 3 \times 13 \quad \text{最大公因數：2}$$

$$130=2 \times 13 \times 5, \quad 144=2^4 \times 3^2 \quad \text{最大公因數：2}$$

$$120=2^3 \times 3 \times 5, \quad 169=13^2 \quad \text{最大公因數：1}$$

從上述我們觀察發現：

(1) 正確組數(110、156)，(130、144)，(120、169)的最大公因數，同樣也符合正確組數的條件： ≤ 2 。

(2) 因為正確組數是由 10、11、12、13 組成，而它們的最大公因數是 1。e. 我們這次換用不同十位數的二位數的數字(11、23、36、47)來試試。

11	23	253	23	11	253	47	36	1692
47	36	1692	36	47	1692	23	11	253
517	828		828	517		1081	396	

整理出所有的倍數，可分成 3 組：(253、1692)，(517、828)，(1081、396)可分成 3 組。

將每一組的數字各自進行質因數分解，找出其最大公因數。

$$253=11*23, \quad 1692=2^2*3^2*47 \quad \text{最大公因數：1}$$

$$517=11*47, \quad 828=2^2*3^3 \quad \text{最大公因數：1}$$

$$1081=23*47, \quad 396=2^2*3^2*11 \quad \text{最大公因數：1}$$

從上述我們觀察發現：

(1) 正確組數(253、1692)，(517、828)，(1081、396)的最大公因數，同樣也符合正確組數的條件： ≤ 2 。

(2) 因為正確組數是 11、23、36、47 組成，它們的最大公因數是 1。

透過觀察、尋找，我們猜測「當任意四數 a, b, c, d 的最大公因數 (gcd) 是 1 時，則其中任意二數相乘的最大公因數必 ≤ 2 ，但是四數都非質數的連續倍數不成立。」

為了檢驗猜測，整理如下：

舉例	特性	gcd	任意二數相乘 (ab, cd) 的最大公因數 (gcd) 必 ≤ 2
1, 2, 3, 4	連續四數	1	✓

5, 6, 7, 8	較大連續四數	1	✓
1, 3, 5, 7	連續奇數	1	✓
10, 20, 30, 40	連續倍數	10	×
10, 11, 12, 13	連續二位數	1	✓
11, 23, 36, 47	無規律四數	1	✓
2, 4, 6, 8	連續偶數	2	×
3, 33, 333, 3333	相同數字但不同位數	3	×

(二)、探究 2*3 的加布里埃爾問題

1. 將 6 個數字(以 1~6 為例)放在 2*3 的六宮格有幾種變化?

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$

2. 數字 1~6 任意取兩數相乘，能得到多少種變化?

$$1 * 2 = 2 \quad 2 * 3 = 6 \quad 3 * 4 = 12 \quad 4 * 5 = 20 \quad 5 * 6 = 30$$

$$1 * 3 = 3 \quad 2 * 4 = 8 \quad 3 * 5 = 15 \quad 4 * 6 = 24$$

$$1 * 4 = 4 \quad 2 * 5 = 10 \quad 3 * 6 = 18$$

$$1 * 5 = 5 \quad 2 * 6 = 12$$

$$1 * 6 = 6$$

發現：

(1) 任意取兩數相乘會有 15 種算式變化，但其實只有 13 個乘積倍數，因為 6 和 12 會重複出現。

(2) 也就是說裡面上下的因數相乘會有 15 種變化，外圍下面的倍數會有 13 種結果。

3. 數字 1~6 任意取三數相乘，能得到多少種變化?

$$1 * 2 * 3 = 6 \quad 1 * 3 * 4 = 12 \quad 1 * 4 * 5 = 20 \quad 1 * 5 * 6 = 30$$

$$1 * 2 * 4 = 8 \quad 1 * 3 * 5 = 15 \quad 1 * 4 * 6 = 24$$

$$1 * 2 * 5 = 10 \quad 1 * 3 * 6 = 18$$

$$1*2*6=12$$

$$2*3*4=24 \quad 2*4*5=40 \quad 2*5*6=60 \quad 3*4*5=60 \quad 3*5*6=90 \quad 4*5*6=120$$

$$2*3*5=30 \quad 2*4*6=48 \quad 3*4*6=72$$

$$2*3*6=36$$

發現：

(1)任意取三數相乘會有 20 種算式變化，但其實只有 16 個乘績倍數，因為 12、24、30、60 會重複出現。

(2)也就是說裡面左右的因數相乘會有 20 種變化，外圍右側的倍數會有 16 種結果。

(三)、探究 3*3 的加布里埃爾問題

1. 將 9 個數字放在 3*3 的九宮格有幾種變化？

$$9!=1*2*3*4*5*6*7*8*9=362880$$

2. 數字 1~9 任意取三數相乘，能得到多少種變化？

$$1*2*3=6 \quad 1*3*4=12 \quad 1*4*5=20 \quad 1*5*6=30 \quad 1*6*7=42$$

$$1*2*4=8 \quad 1*3*5=15 \quad 1*4*6=24 \quad 1*5*7=35 \quad 1*6*8=48$$

$$1*2*5=10 \quad 1*3*6=18 \quad 1*4*7=28 \quad 1*5*8=40 \quad 1*6*9=54$$

$$1*2*6=12 \quad 1*3*7=21 \quad 1*4*8=32 \quad 1*5*9=45$$

$$1*2*7=14 \quad 1*3*8=24 \quad 1*4*9=36$$

$$1*2*8=16 \quad 1*3*9=27$$

$$1*2*9=18$$

$$1*7*8=56 \quad 1*8*9=72$$

$$1*7*9=63$$

$$2*3*4=24 \quad 2*4*5=45 \quad 2*5*6=60 \quad 2*6*7=84 \quad 2*7*8=112$$

$$2*3*5=30 \quad 2*4*6=48 \quad 2*5*7=70 \quad 2*6*8=96 \quad 2*7*9=126$$

$$2*3*6=36 \quad 2*4*7=65 \quad 2*5*8=80 \quad 2*6*9=108$$

$$2*3*7=42 \quad 2*4*8=64 \quad 2*5*9=90$$

$$2*3*8=48 \quad 2*4*9=72$$

$$2*3*9=54$$

$$2*8*9=144$$

$3*4*5=60$ $3*5*6=90$ $3*6*7=126$ $3*7*8=168$ $3*8*9=216$

$3*4*6=72$ $3*5*7=105$ $3*6*8=144$ $3*7*9=189$

$3*4*7=84$ $3*5*8=120$ $3*6*9=162$

$3*4*8=96$ $3*5*9=135$

$3*4*9=108$

$4*5*6=120$ $4*6*7=168$ $4*7*8=224$ $4*8*9=288$

$4*5*7=140$ $4*6*8=192$ $4*7*9=252$

$4*5*8=160$ $4*6*9=162$

$4*5*9=180$

$5*6*7=210$ $5*7*8=280$ $5*8*9=360$

$5*6*8=240$ $5*7*9=315$

$5*6*9=270$

$6*7*8=336$ $6*8*9=432$

$6*7*9=378$

$7*8*9=504$

發現：

(1)任意三數相乘會有 84 種算式變化，但其實只有 62 個乘績倍數，因為 12、24、30、36、42、45、48、54、56、60、72、84、90、96、108、120、126、144、162、168、189 會重複出現，尤其 24 共出現 3 次，所以 $21+1+62=84$ 。

(2)也就是說外面的倍數會有 62 種變化，裡面的因數會有 84 種變化。

3. 探討如何解題？

說明：題目為黑色數字。

題一：

題二：

題三：

2	3	4	24	4	1	6	24	1	4	7	28
5	1	8	40	3	8	5	120	8	6	3	144
6	7	9	378	2	9	7	126	5	2	9	90

60	21	288		24	72	210		40	48		
----	----	-----	--	----	----	-----	--	----	----	--	--

策略：

(1) 解答：紅色數字 5

說明：因為 5 的倍數其個位一定是 0 或 5，所以只要在外圍倍數的部分尋找出個位是 0 或 5 的倍數，並將這兩數垂直和水平延伸，其交會處寫上 5，就能完成第一步驟。

(2) 解答：橘色數字 7

說明：觀察外圍的數字，尋找出 7 的倍數，並將這兩數垂直和水平延伸，其交會處寫上 7，就能完成第二步驟。因為所有的數都是 1 的倍數；每個偶數都有可能是 2、4、8 的倍數；且 6 和 9 的倍數都是 3 的倍數，所以只有 7 的倍數不會和其他數重複。

補充：以下是我整理出的 7 的倍數分列表，發現算式共有 28 種變化，但其實只有 23 個乘積倍數，因為 42、56、84、126、168 會重複出現。

$$7*1*2=14 \quad 7*2*3=42 \quad 7*3*4=84 \quad 7*4*5=140 \quad 7*5*6=210$$

$$7*1*3=21 \quad 7*2*4=56 \quad 7*3*5=105 \quad 7*4*6=168 \quad 7*5*8=280$$

$$7*1*4=28 \quad 7*2*5=70 \quad 7*3*6=126 \quad 7*4*8=224 \quad 7*5*9=315$$

$$7*1*5=35 \quad 7*2*6=84 \quad 7*3*8=168 \quad 7*4*9=252$$

$$7*1*6=42 \quad 7*2*8=112 \quad 7*3*9=189$$

$$7*1*8=56 \quad 7*2*9=126$$

$$7*1*9=63$$

$$7*6*8=336 \quad 7*8*9=504$$

$$7*6*9=378$$

(3) 接下來的步驟，有種兩可能性：

a. 解答：題二黃色數字 6。

說明：當三數相乘的其中兩數出來了，就可以填入第三個數字。

b. 解答：黃色數字 9。

說明：找出 9 的倍數，雖然有些數會和 3 重複，但因為 9 是 $3*3$ ，一個數字只能出現一次，所以可將尋找 9 作為下一個步驟。

補充：以下是我整理出的 9 的倍數分列表，發現算式共有 28 種變化，但其實只有 24 個乘績倍數，因為 54、72、108、216 會重複出現。

$$\begin{array}{l}
 9*1*2=18 \quad 9*2*3=54 \quad 9*3*4=108 \quad 9*4*5=180 \quad 9*5*6=270 \\
 9*1*3=27 \quad 9*2*4=72 \quad 9*3*5=135 \quad 9*4*6=216 \quad 9*5*7=315 \\
 9*1*4=36 \quad 9*2*5=90 \quad 9*3*6=162 \quad 9*4*7=252 \quad 9*5*8=360 \\
 9*1*5=45 \quad 9*2*6=108 \quad 9*3*7=189 \quad 9*4*8=288 \\
 9*1*6=54 \quad 9*2*7=126 \quad 9*3*8=216 \\
 9*1*7=63 \quad 9*2*8=144 \\
 9*1*8=72 \\
 9*6*7=378 \quad 9*7*8=504 \\
 9*6*8=432
 \end{array}$$

(5) 接下來的步驟，有種兩可能性：

- a. 因九宮格是三數相乘，只要將一行中的其中一個數解出來，那一行就變成二數相乘，而且其中一數已知，剩下未知的另一數繼續拆解成兩數相乘，且只能是 1~9 的組合，所以可能性已經受限，往往只剩一兩個可能性，再考量一些條件，幾乎可以確定答案。
- b. 當三數相乘的其中兩數出來了，就可以填入第三個數字。
- c. 將 a. b. 兩步驟反複使用至填滿所有空格。

(四)、探究 3*4 的加布里埃爾問題

				1980					100
				56					1584
	105	90	176		72	64		210	

1. 將 12 個數字放在 3*4 的十二宮格有幾種變化？

12!

2. 數字 1~12 任意取三數相乘，能得到多少種變化？

延續之前 1~9 的任意三數相乘，繼續延伸到 12。

$1*2*10=20 \quad 1*3*10=30 \quad 1*4*10=40 \quad 1*5*10=50$

$1*2*11=22 \quad 1*3*11=33 \quad 1*4*11=44 \quad 1*5*11=55$

$1*2*12=24 \quad 1*3*12=36 \quad 1*4*12=48 \quad 1*5*12=60$

$1*6*10=60 \quad 1*7*10=70 \quad 1*8*10=80 \quad 1*9*10=90$

$1*6*11=66 \quad 1*7*11=77 \quad 1*8*11=88 \quad 1*9*11=99$

$1*6*12=72 \quad 1*7*12=84 \quad 1*8*12=96 \quad 1*9*12=108$

$1*10*11=110 \quad 1*11*12=132$

$1*10*12=120$

$2*3*10=60 \quad 2*4*10=80 \quad 2*5*10=100 \quad 2*6*10=120$

$2*3*11=66 \quad 2*4*11=88 \quad 2*5*11=110 \quad 2*6*11=132$

$2*3*12=72 \quad 2*4*12=96 \quad 2*5*12=120 \quad 2*6*12=144$

$2*7*10=140 \quad 2*8*10=160 \quad 2*9*10=180 \quad 2*10*11=220$

$2*7*11=154 \quad 2*8*11=176 \quad 2*9*11=198 \quad 2*10*12=240$

$2*7*12=168 \quad 2*8*12=192 \quad 2*9*12=216 \quad 2*11*12=264$

$3*4*10=120 \quad 3*5*10=150 \quad 3*6*10=180 \quad 3*7*10=210$

$3*4*11=132 \quad 3*5*11=165 \quad 3*6*11=198 \quad 3*7*11=231$

$3*4*12=144 \quad 3*5*12=180 \quad 3*6*12=216 \quad 3*7*12=252$

$3*8*10=240 \quad 3*9*10=270 \quad 3*10*11=330 \quad 3*11*12=396$

$3*8*11=264 \quad 3*9*11=297 \quad 3*10*12=360$

$3*8*12=288 \quad 3*9*12=324$

$4*5*10=200 \quad 4*6*10=240 \quad 4*7*10=280 \quad 4*8*10=320$

$4*5*11=220 \quad 4*6*11=264 \quad 4*7*11=308 \quad 4*8*11=352$

$4*5*12=240 \quad 4*6*12=288 \quad 4*7*12=336 \quad 4*8*12=384$

$4*9*10=360 \quad 4*10*11=440 \quad 4*11*12=528$

$4*9*11=396 \quad 4*10*12=480$

$4*9*12=432$

$5*6*10=300 \quad 5*7*10=350 \quad 5*8*10=400 \quad 5*9*10=450$

$5*6*11=330$ $5*7*11=385$ $5*8*11=440$ $5*9*11=495$

$5*6*12=360$ $5*7*12=420$ $5*8*12=480$ $5*9*12=540$

$5*10*11=550$ $5*11*12=660$

$5*10*12=600$

$6*7*10=420$ $6*8*10=480$ $6*9*10=540$ $6*10*11=660$

$6*7*11=462$ $6*8*11=528$ $6*9*11=594$ $6*10*12=720$

$6*7*12=504$ $6*8*12=576$ $6*9*12=648$

$6*11*12=792$

$7*8*10=560$ $7*9*10=630$ $7*10*11=770$ $7*11*12=924$

$7*8*11=616$ $7*9*11=693$ $7*10*12=840$

$7*8*12=672$ $7*9*12=756$

$8*9*10=720$ $8*10*11=880$ $8*11*12=1056$

$8*9*11=792$ $8*10*12=960$

$8*9*12=864$

$9*10*11=990$ $9*11*12=1188$

$9*10*12=1080$

$10*11*12=1320$

發現：

(1)任意取三數相乘會有 220 種算式變化，但其實只有 164 個乘積倍數，因為 12、24、30、36、42、45、48、54、56、60、66、72、80、84、88、90、96、108、110、120、126、132、144、162、168、180、189、198、216、220、264、288、360、396、420、480、528、560、660、720、792 會重複出現。

(2)宮格裡上下因數相乘會有 220 種變化，外圍下面倍數會有 164 種結果。

3. 數字 1~12 任意取四數相乘，能得到多少種變化？(請參閱附件一。)

發現：我們以數字 1~12 當作因數填入十二宮格當中，任意取四數相乘會有 495 種算式變化，但其實只有 277 個乘積倍數，因為有 96 個乘積倍數會重複出現(如下表)，也就是說裡面左右的因數相乘會有 495 種變化，右側的倍數會有 277 種結果。

倍數	48	60	72	80	84	90	96	108
次數	3	4	4	2	2	2	3	2
倍數	120	126	132	140	144	160	168	180
次數	6	2	2	2	5	2	4	5
倍數	192	198	210	216	220	240	252	264
次數	3	2	3	5	2	8	3	4
倍數	270	280	288	300	320	324	330	336
次數	3	3	5	2	2	2	3	4
倍數	360	378	384	396	400	420	432	440
次數	8	2	2	3	2	5	5	3
倍數	448	462	480	504	528	540	560	576
次數	2	2	8	5	3	5	3	6
倍數	594	600	616	630	640	648	660	672
次數	2	3	3	2	2	3	4	5
倍數	704	720	756	768	792	840	864	880
次數	2	9	3	2	6	4	5	3

倍數	924	960	990	1008	1056	1080	1120	1188
次數	2	5	2	5	4	4	2	2
倍數	1260	1320	1344	1440	1512	1584	1680	1848
次數	2	4	2	3	3	2	4	2
倍數	1980	2016	2160	2400	2520	2640	2880	2970
次數	2	3	4	2	2	3	2	2
倍數	3240	3360	3600	3960	4320	5040	5544	6600
次數	2	2	2	4	3	2	2	2

4. 解題策略：

(1) 位置說明：

題一：

題二：

A	B	C	D	1980 (解答1)	A	B	C	D	100 (解答1)
E	F	G	H	56 (解答2)	E	F	G	H	1584 (解答2)
I	J	K	L	(解答3)	I	J	K	L	(解答3)
(解答4)	105 (解答5)	90 (解答6)	176 (解答7)		72 (解答4)	64 (解答5)	(解答6)	210 (解答7)	

6	3	10	11	1980	1	2	5	10	100
4	7	1	2	56	6	8	11	3	1584
12	5	9	8	4320	12	4	9	7	3024
288	105	90	176		72	64	495	210	

(2)題一步驟：

①解答：紅色數字 11、2

說明：雖然 176 和 56 都是 8 的倍數，但如果在交會處(位置 H)放填上數字 8，剩下的位置只能填 1 和 7，而無法填入第 4 個數字，橫式算式無法成立，所以位置 H 絕對不能填入數字 8。

a. $176=2^4*11$

$=1*16*11$ (✖ 因為 16 已經超過最大數 12 了。)

$=2*8*11$

$=4*4*11$ (✖ 因為一個數字只能用一次。)

b. $56=2^3*7$

$=1*2*4*7$

$=2*2*2*7$ (✖ 因為一個數字只能用一次。)

c. $1980=2^2*3^2*5*11$

$=5*6*6*11$ (✖ 因為一個數字只能用一次。)

$=2*6*11*15$ (✖ 因為 15 已經超過最大數 12 了。)

$=2*5*11*18$ (✖ 因為 18 已經超過最大數 12 了。)

$=1*5*11*36$ (✖ 因為 36 已經超過最大數 12 了。)

$=3*4*11*15$ (✖ 因為 15 已經超過最大數 12 了。)

$=4*5*9*11$

$=3*6*10*11$

$=3*5*12*11$

$=2*9*10*11$ (✖ 因為 2 已經在第 4 行被使用了。)

因為 a. 和 c. 可知 1980 與 176 都有 11 這個公因數，因此 11 在位置 D；又因為 a. 和 b. 加上位置 H 絕對不能填入數字 8，所以合理的安排是 2 在位置 H。

②解答：橘色數字 8

說明：因為 a. 和 b.，且知 2 在位置 H，所以 8 就可以放在位置 L。

③解答：黃色數字 7、1、4

說明：因為 b，已知 $56=1*2*4*7$ ，且因為 90 不能被 4 或 7 整除，所以位置 G 只能是 1，因為 105 是奇數且是 7 的倍數，因此位置 F 只能是 7，而第 2 橫排只剩下位置 E 可以填 4。

④解答：綠色數字 10、3、6

說明：因為 d. 和 e.，且 4、1、7 已經確定位置，也就是因為 1 放在位置 G，而 d 只剩 $90=1*9*10$ 這組因數分解，所以 10 只能填在位置 C，一旦用了 10，就代表只剩 $1980=3*6*10*11$ 這組因數可以運用，因為奇數 105 不可能有偶數 6 這個因數，所以位置 B 只可放 3 進去，位置 A 只可放 6 進去。

d. $90=2*3^2*5$ (需拆解成三數)

$$=1*9*10$$

$$=1*3*30(\text{✗ 因為 } 15 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

e. $105=3*5*7$ (需拆解成三數)

⑤解答：藍色數字 9

說明：105、90 所以剩位置 I、J、K 可放 5、9、12，因 90 已經放了 10，所以不能放 5，位置 K 就只剩能放 9。

⑥解答：紫色數字 12、5

說明：最後因 105 不是 12 的倍數，105 是 5 的倍數，所以 5 只能填位置 J，12 就只剩下位置 I 可以填入。

⑦解答：解答 3、解答 4(粉紅色數字)

說明：第三橫排的積是 4320，第一列的積是 288。

(3)題二步驟：

①解答：紅色數字 7

說明：因為 7 是一個獨特的個位數因數，將已經有的每一個解答都除以 7 後，只有 210 可以被整除，所以 7 只能放 210 和解答 3 的交會處位置 L。

②解答：橘色數字 3、10

說明：延續上一步驟，依照上述判斷，只剩下 3 和 10 這組因數。依上面的表格，3 可以填入位置 H，10 可以填入位置 D，因為 3 不能整除 100，但可整除 1584。

a. $210=2*3*5*7$ (需拆解成三數)

$$=2*7*15(\text{✘ 因為 } 15 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=3*5*14(\text{✘ 因為 } 14 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=3*7*10$$

$$=2*5*21(\text{✘ 因為 } 21 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=2*3*35(\text{✘ 因為 } 35 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

③解答：黃色數字 11

說明：因為 11 是一個獨特的因數，將已經有的每一個解答都除以 11 後，只有 1584 可以被整除，所以 11 只能放 1584 和解答 6 的交會處位置 G。

b. $1584=2^4*3^2*11$ (需拆解成四數，且其中一數已知是 3)

$$=3*6*8*11$$

$$=3*4*11*12$$

$$=2*3*8*33(\text{✘ } 33 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=2*3*11*24(\text{✘ } 24 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=2*3*6*44(\text{✘ } 44 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=1*3*4*132(\text{✘ } 132 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=3*4*4*33(\text{✘ } 33 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{，數字只能用一次。})$$

$$=3*3*4*44(\text{✘ } 44 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{，數字只能用一次。})$$

$$=1*3*6*88(\text{✘ } 132 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{。})$$

$$=2*3*3*88(\text{✘ } 88 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{，數字只能用一次。})$$

$$=1*3*8*66(\text{✘ } 66 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{。})$$

$$=3*3*8*22(\text{✘ } 22 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{。})$$

$$=1*3*16*33(\text{✘ } 16 \text{ 和 } 33 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{。})$$

④解答：綠色數字 5

說明：因為 5 的倍數的個位數只能是 5 或 0，因此 5 只能放在 100 和解答 6 的交界處，也就是位置 C。

c. $100=2^2*5^5$ (需拆解成四數，且其中一數已知是 10)

$=2*2*5*5$ (✖ 因為一個數字只能用一次。)

$=1*4*5*5$ (✖ 因為一個數字只能用一次。)

$=1*2*5*10$

⑤解答：藍色數字 1、2

說明：因為 100 和 64 有 2 這個公因數，因此 2 可以放在位置 B，也就可以把 1 填在位置 A。1 和 2 已經確定了。

d. $64=2^6$ (需拆解成三數)

$=2*4*8$

$=1*8*8$ (✖ 因為一個數字只能用一次。)

$=1*4*16$ (✖ 因為 15 已經超過最大數 12 了。)

⑥解答：紫色數字 9、解答 6(495)

說明：因為 8 和 4 都是 64 和 1584 的公因數，所以都可以放在位置 F，但還不確定要放哪一個數字，且它們搭配的數字分別是 6 和 12，所 1~12 的數字當中，只剩 9 還沒用，因此可以確定 9 能放在位置 K，6 和 12 可以放在位置 E 和 I，但還不確定要放在哪格位置，不過 $6*8$ 、 $4*12$ 的解答都是 48，因此有以下兩種狀況，先用表格 1 的方式填入。

表格 1

表格 2

12	4	6	8
6	8	12	4

e. $72=2^3*3^2$ (需拆解成三數)

$=1*6*12$

$=1*8*9$ (X 因 8 已經使用了。)

$=2*4*9$ (X 因 2 和 4 已經使用了)

說明： $5*9*11=495$ 因此解答 6 是 495。

⑦解答：粉紅色數字 4, 6, 8, 12、解答 3(3024)

說明： $6*7*8*9=4*7*9*12=3024$

解答 3 是 3024，不論是 $6*7*8*9$ 還是 $4*7*9*12$ 答案都一樣，組成後的數字都是 3024。

題三題目(位置說明)：				題三解答					
	A	B	(解答 1)		6	9	54		
C	D	E	F	←1320 (解答 2)	10	11	12	1	←1320
G	H	I	J	(解答 3)	5	2	8	7	560
↑50 (解答 8)	K	L	←12 / ↑7 ↑(解答 4) ←(解答 5)	↑50	3	4	←12 / ↑7		
	↑396 (解答 7)	(解答 6)			↑396	3456			

(4)題三步驟：

①解答：紅色數字 1、7

說明： $7=1*7$

7 只有 1 和 7 兩個因數，又因為 1320 沒有 7 這個因數，因此 7 只能放在位置 J，而 1 只能放在位置 F。

$1320=2^3*3*5*11$ (需拆解成四數，且其中一個數字是 1)

$=3*5*8*11$ (✘因為無 1)

$=4*5*6*11$ (✘因為無 1)

$=2*5*11*12$ (✘因為無 1)

$=1*10*11*12$

$=2*3*4*11*12$ (✘因為一列或一欄最多只能有 4 個數字)

$=3*4*10*11$ (✘因為無 1)

$=3*4*5*22$ (✘因為 22 已經超過最大數 12 了。)

$=2*6*10*11$ (✘因為無 1)

$$=2*3*5*44(\text{✖ 因為 } 44 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=2*5*4*33(\text{✖ 因為 } 33 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=2*4*11*15(\text{✖ 因為 } 15 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=2*3*10*22(\text{✖ 因為 } 22 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

②解答：橘色數字 10、5

$$50=2*5^2(\text{需拆解成二數})$$

$$=5*10$$

$$=2*25(\text{✖ 因為 } 25 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

$$=1*50(\text{✖ 因為 } 50 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{ 了。})$$

因為 $1320=1*10*11*12$ ， $50=5*10$ ，兩數的公因數是 10，所以 10 填在位置 C，5 在位置 G。

③解答：數字 11

雖然 1320 和 396 有許多公因數，例如：2、3、6、11 等，但依據上述分析，它們共同出現的數字是 11，所以位置 D 就一定要放 11。

④綠色數字 2、3、6

$$396=2^2*3^2*11(\text{需拆解成四數，且不能使用數字 } 1)$$

$$=1*3*11*12(\text{✖ 因為 } 1 \text{ 不能用。})$$

$$=3*3*4*12(\text{✖ 因為一個數字只能用一次。})$$

$$=2*2*9*11(\text{✖ 因為一個數字只能用一次。})$$

$$=2*3*6*11$$

$$=2*3*3*22(\text{✖ 因為 } 22 \text{ 已經超過最大數 } 12 \text{，數字只能用一次。})$$

如果將 6(2) 填在位置 K，2(6) 就只能填在位置 L，而 3 只能填在位置 A 或 H，這樣會導致沒有數字可以填在位置 H(A)，因此位置 K 只能填 3，而 2 和 6 可以填在位置 A 或位置 H。

⑤解答：藍色數字 4、12

$$12=2^2*3$$

$$=3*4$$

$$=2*6(\text{✖ 因為 } 2 \text{ 和 } 6 \text{ 已經用了})$$

$$=1*12(\text{✖ 因為 } 1 \text{ 已經用了})$$

因此 4 要填在位置 L，而 1、10、11 已經用了，位置 E 就必須填 12。

⑥解答：紫色數字 8、9

因解答 1、3、6 沒有答案，因此 8 和 9 可互換，可能填在位置 B 或位置 I。

⑦解答：解答 1、3、6(粉紅色數字)

$6*9=54$ (解答 1)

$2*5*7*8=560$ (解答 3)

$4*8*9*12=3456$ (解答 6)

五、研究結果與討論

(一)四宮格：

1. 將 4 個數字放在 $2*2$ 的四宮格中，發現共有 24 種變化。
2. 當任意四數 $a、b、c、d$ 的最大公因數是 1 時，則其中任意二數相乘的最大公因數必 ≤ 2 。

(二)六宮格：

1. 將 6 個數字放在 $2*3$ 的六宮格中，會有 720 種變化。
2. 在六宮格當中，任意取兩數相乘會有 15 種算式變化；我們是以數字 1~6 當作因數填在六宮格中，則外圍的倍數乘積其實只有 13 個數字變化，因為 6 和 12 會重複出現，也就是說裡面上下的因數相乘會有 15 種變化，外圍下面的倍數會有 13 種結果。
3. 同樣在六宮格當中，任意取三數相乘會有 20 種算式變化，但其實只有 16 個乘積倍數，因為 12、24、30、60 會重複出現，也就是說裡面左右的因數相乘會有 20 種變化，外圍右側的倍數會有 16 種結果。
4. 當任意六數 $a、b、c、d、e、f$ 的最大公因數是 1 時，則其中任意二數相乘或任意三數相乘的最大公因數必 ≤ 3 。

(三)九宮格：

1. 將 9 個數字放在 $3*3$ 的九宮格中，會有有 362880 種變化。
2. 我們以數字 1~9 當作因數填入九宮格當中，發現任意三數相乘會有 84 種算式變化，但其實只有 62 個乘積倍數，因為 12、24、30、36、42、45、48、54、56、60、72、84、90、96、108、120、126、

144、162、168、189 會重複出現，尤其 24 共出現 3 次，所以 $21+1+62=84$ ，也就是說外面的倍數會有 62 種變化，裡面的三個因數相乘會有 84 種變化。

3. 解題策略：九宮格的加布里埃爾問題就是從外圍的倍數推論裡面 1~9 的因數適當的排列，考量 1~9 倍數特性，建議第一個尋找檢驗的數字是 5，因為 5 的倍數的個位數只有 5 和 0，是最容易判斷尋找的數字；第二個步驟是尋找 7 的倍數，因為在 1~9 當中就只有 7 的倍數有獨特性，不會像偶數那樣，同時有可能是 2、4、8 倍數；第三個可以先考慮嘗試尋找 9 的倍數，因為 9 是所有可用數字裡的最大數，也是 3、6、9 之中最大的數，所以會有較少的可能，找完之後再找 3、6 的倍數；最後可以考慮是 2、4、8 這三個數字的倍數，它的特性一定是偶數，所以需要同時考量其他條件一併判斷；最後是 1，因為所有的數字都有這一個因數；檢驗倍數的過程當中，如果三數相乘的其中兩數出來後，就可以填入第三個數字。

(四)十二宮格：

1. 我們以數字 1~12 當作因數填入十二宮格當中，任意取三數相乘會有 220 種算式變化，但其實只有 164 個乘積倍數，因為會重複出現，也就是裡面上下的因數相乘會有 220 種變化，外圍下面的倍數會有 164 種結果。

2. 我們以數字 1~12 當作因數填入十二宮格當中，任意取四數相乘會有 495 種算式變化，但其實只有 277 個乘積倍數，因為有 96 個倍數乘積會重複出現，也就是裡面左右的因數相乘會有 495 種變化，右側的倍數會有 277 種結果。

3. 解題策略：十二宮格的加布里埃爾問題就是從外圍的倍數推論裡面 1~12 的因數適當的排列，考量 1~12 倍數特性，通常第一直覺是尋找 10 的倍數，因為 10 的倍數的個位數一定是 0，是最容易一眼就看出來的，只要在右側和下方的兩個倍數個位數都是 0，就可以完全確定那兩數的交會點是 10；如果是在右側和下方數字的個位數各有 5 和 0 的數字，那兩數的交會點是 5；接下來是尋找檢驗的數

字是 11 或 7，因為這兩個數字是很獨特的數字，它的倍數不會像偶數那樣，同時有可能是 2、4、8 倍數，只要找到倍數的交會處，幾乎可以確定填入數字；所以這兩個數字的倍數，可以最先檢驗確認；第三步驟可以先嘗試尋找 9 的倍數，因為 9 是所有可用數字裡的最大數，也是 3、6、9 之中最大的數，所以會有較少的可能，找完之後再找 3、6 的倍數；最後尋找檢驗 2、4、8、12 的倍數，因為這四個數字的倍數一定是偶數，可以在排除前面那些數字之後，再一一比較填入；最後是 1，因為所有的數字都有 1 這個因數；同樣的幫助小技巧，檢驗倍數的過程當中，如果是上下三數相乘的其中兩數出來後，就可以填入第三個數字，免除反覆檢驗的辛苦。

六、評鑑與檢討

(一) 尋找主題

我在這之前完全沒有進行獨立研究的經驗，一開始覺得好像所有的題目都很有趣，都可以嘗試，但稍微了解之後，又都覺得有難度，就想找一個比較適合自己能力的主題，後來覺得自己較擅長的科目是數學，所以從數學遊戲開始尋找，最後尋找到加布里埃爾問題，是一個我覺得較適合自己程度的主題，總算可以開始進行研究，我覺得尋找主題是一件困難且耗費體力和時間的任務。

(二) 蒐集資料

加布里埃爾問題是老師偶然在網路上找到的數學問題，它似乎是英國小學的數學教材，因為我們也不知道中文名稱，我們嘗試以「九宮格數學問題」等相關關鍵字尋找中文資料，但所找到的資料與加布里埃爾問題並不相符，中文資料通常都是類似魔方陣或是數獨的問題，我們只有找到一部影片介紹解答方式，從中我們知道是運用類似相乘的方式來解出最後的答案，與我們所學的因數、倍數相關，我們由此開始進行研究。

(三) 擬定研究問題

在剛開始的時候，我們不知道如何下手開始進行研究，思來想去，我們決定以簡化的方式開始進行，使用最簡單、最容易思考的

四宮格，開始認識題型，接下來慢慢變化，提升難度，討論出四宮格、六宮格、九宮格、十二宮格的變化，讓我們對於研究有進一步的概念與方向，擬定研究問題是一件很重要的步驟，讓我們了解未來的解題方向。

(四)資料分析

一開始的時候，我們先計算最基礎的四宮格以及六宮格的問題，因為數字簡單、格子少，所以非常的容易計算，幾乎用心算就能輕鬆地算出來，讓我信心滿滿，覺的這是一個簡單的研究，不過後來開始探討九宮格和十二宮格，我發現數字開始變大、格子也變多了，心算好像不太夠用，計算速度慢下來，一些比較大的數字還要用計算機幫助才能快速運算作答，後來要列表整理很龐大的數字，簡直太頭痛了，所幸老師教我運用 excel 的公式列表，我才可以迅速整理出這些龐大的數字，到了這個階段，我開始覺得這個研究似乎很困難，有複雜性，充滿各種可能變化，必須多加思考，不像課堂的數學只有單一的答案，充滿挑戰性。

(五)研究結果與討論、撰寫報告

最後，我們終於算出了四宮格、六宮格、九宮格、十二宮格和井字型十二宮格的加布里埃爾問題後，老師不斷提醒我們觀察數字型態樣式和各種關係，想破了腦袋，努力說出一些小小的發現，終於快完成了這份報告，辛苦的研究總算有一些小收穫，為了要寫完這個報告，我們花了非常久的時間，最後甚至連假日也都在趕工，我覺得撰報告真是辛苦的工作，但看到成果，這一份厚厚的研究報告，讓我們非常有成就感，更高興的是完成後，我們也能好好休息。

七、參考資料

1. Gabriel' s Problem。檢自

<https://nrich.maths.org/11750>(Oct. 2022)

2. Sec1 - Gabriel' s Problem solution(2020)。檢自

<https://www.youtube.com/watch?v=XtClsdLkuH4>(Oct. 2022)

1	1	2	3	4	24	1	3	4	5	60	1	4	5	6	120
2	1	2	3	5	30	1	3	4	6	72	1	4	5	7	140
3	1	2	3	6	36	1	3	4	7	84	1	4	5	8	160
4	1	2	3	7	42	1	3	4	8	96	1	4	5	9	180
5	1	2	3	8	48	1	3	4	9	108	1	4	5	10	200
6	1	2	3	9	54	1	3	4	10	120	1	4	5	11	220
7	1	2	3	10	60	1	3	4	11	132	1	4	5	12	240
8	1	2	3	11	66	1	3	4	12	144					
9	1	2	3	12	72										
10															
11	1	5	6	7	210	1	6	7	8	336	1	7	8	9	504
12	1	5	6	8	240	1	6	7	9	378	1	7	8	10	560
13	1	5	6	9	270	1	6	7	10	420	1	7	8	11	616
14	1	5	6	10	300	1	6	7	11	462	1	7	8	12	672
15	1	5	6	11	330	1	6	7	12	504					
16	1	5	6	12	360										
17															
18	1	8	9	10	720	1	9	10	11	990	1	10	11	12	1320
19	1	8	9	11	792	1	9	10	12	1080					
20	1	8	9	12	864										
21															
22	2	3	4	5	120	2	4	5	6	240	2	5	6	7	420
23	2	3	4	6	144	2	4	5	7	280	2	5	6	8	480
24	2	3	4	7	168	2	4	5	8	320	2	5	6	9	540
25	2	3	4	8	192	2	4	5	9	360	2	5	6	10	600
26	2	3	4	9	216	2	4	5	10	400	2	5	6	11	660
27	2	3	4	10	240	2	4	5	11	440	2	5	6	12	720
28	2	3	4	11	264	2	4	5	12	480					
29	2	3	4	12	288										
30															
31	2	6	7	8	672	2	7	8	9	1008	2	8	9	10	1440
32	2	6	7	9	756	2	7	8	10	1120	2	8	9	11	1584
33	2	6	7	10	840	2	7	8	11	1232	2	8	9	12	1728
34	2	6	7	11	924	2	7	8	12	1344					
35	2	6	7	12	1008										
36															
37	2	9	10	11	1980	2	10	11	12	2640					
38	2	9	10	12	2160										
39															
40	3	4	5	6	360	3	5	6	7	630	3	6	7	8	1008
41	3	4	5	7	420	3	5	6	8	720	3	6	7	9	1134
42	3	4	5	8	480	3	5	6	9	810	3	6	7	10	1260
43	3	4	5	9	540	3	5	6	10	900	3	6	7	11	1386
44	3	4	5	10	600	3	5	6	11	990	3	6	7	12	1512
45	3	4	5	11	660	3	5	6	12	1080					
46	3	4	5	12	720										
47															
48	3	7	8	9	1512	3	8	9	10	2160	3	9	10	11	2970
49	3	7	8	10	1680	3	8	9	11	2376	3	9	10	12	3240
50	3	7	8	11	1848	3	8	9	12	2592					
51	3	7	8	12	2016										
52															
53	3	10	11	12	3960										
54															
55	4	5	6	7	840	4	6	7	8	1344	4	7	8	9	2016
56	4	5	6	8	960	4	6	7	9	1512	4	7	8	10	2240
57	4	5	6	9	1080	4	6	7	10	1680	4	7	8	11	2464
58	4	5	6	10	1200	4	6	7	11	1848	4	7	8	12	2688
59	4	5	6	11	1320	4	6	7	12	2016					
60	4	5	6	12	1440										
61															
62	4	8	9	10	2880	4	9	10	11	3960	4	10	11	12	5280
63	4	8	9	11	3168	4	9	10	12	4320					
64	4	8	9	12	3456										
65															
66	5	6	7	8	1680	5	7	8	9	2520	5	8	9	10	3600
67	5	6	7	9	1890	5	7	8	10	2800	5	8	9	11	3960
68	5	6	7	10	2100	5	7	8	11	3080	5	8	9	12	4320
69	5	6	7	11	2310	5	7	8	12	3360					
70	5	6	7	12	2520										
71															
72	5	9	10	11	4950	5	10	11	12	6600					
73	5	10	11	12	6600										
74															
75	6	7	8	9	3024	6	8	9	10	4320	6	9	10	11	5940
76	6	7	8	10	3360	6	8	9	11	4752	6	9	10	12	6480
77	6	7	8	11	3696	6	8	9	12	5184					
78	6	7	8	12	4032										
79															
80	6	10	11	12	7960										
81															
82	7	8	9	10	5040	7	9	10	11	6930	7	10	11	12	9240
83	7	8	9	11	5544	7	9	10	12	7560					
84	7	8	9	12	6048										
85															
86	8	9	10	11	7920	8	10	11	12	10560					
87	8	9	10	12	8640										
88															
89	9	10	11	12	11880										
90															
91															
92	1	2	4	5	40	1	2	5	6	60	1	2	6	7	84
93	1	2	4	6	48	1	2	5	7	70	1	2	6	8	96
94	1	2	4	7	56	1	2	5	8	80	1	2	6	9	108
95	1	2	4	8	64	1	2	5	9	90	1	2	6	10	120
96	1	2	4	9	72	1	2	5	10	100	1	2	6	11	132
97	1	2	4	10	80	1	2	5	11	110	1	2	6	12	144
98	1	2	4	11	88	1	2	5	12	120	1	2	6	13	156
99	1	2	4	12	96										

166	2	3	5	11	330	2	3	6	12	432					
167	2	3	5	12	360										
168															
169	2	3	8	9	432	2	3	9	10	540	2	3	10	11	660
170	2	3	8	10	480	2	3	9	11	594	2	3	10	12	720
171	2	3	8	11	528	2	3	9	12	648					
172	2	3	8	12	576										
173															
174	2	3	11	12	792										
175															
176	2	4	6	7	336	2	4	7	8	448	2	4	8	9	576
177	2	4	6	8	384	2	4	7	9	504	2	4	8	10	640
178	2	4	6	9	432	2	4	7	10	560	2	4	8	11	704
179	2	4	6	10	480	2	4	7	11	616	2	4	8	12	768
180	2	4	6	11	528	2	4	7	12	672					
181	2	4	6	12	576										
182															
183	2	4	9	10	720	2	4	10	11	880	2	4	11	12	1056
184	2	4	9	11	792	2	4	10	12	960					
185	2	4	9	12	864										
186															
187	2	4	7	8	448	2	4	8	9	576	2	4	9	10	720
188	2	4	7	9	504	2	4	8	10	640	2	4	9	11	792
189	2	4	7	10	560	2	4	8	11	704	2	4	9	12	864
190	2	4	7	11	616	2	4	8	12	768					
191	2	4	7	12	672										
192															
193	2	4	10	11	880	2	4	11	12	1056					
194	2	4	10	12	960										