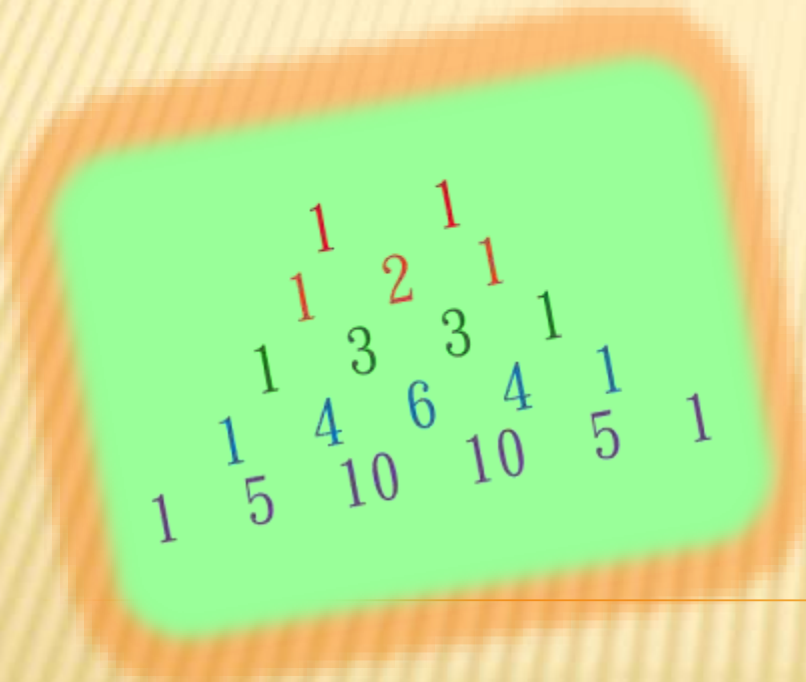
係數～你的美



探討
方程式
的
完美係數

步驟1

靈機一動

在老師的翻轉講義學習到

........「一元二次方程式」

$x^2+5x-2=0$之兩根為α、β

試求出：(1)$\alpha\beta$=? (2)$\alpha+\beta$=? (3)$\alpha^2+\beta^2$=?

sol：由$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

可得知：$\alpha\beta=-2$

$\alpha+\beta=-5$

解決問題ing…

步驟2

接下來$\alpha^2+\beta^2$，我們利用乘法公式的**完全平方式**，自己創造等式來解決。

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$$
$$(-5)^2=\alpha^2+\beta^2+2(-2)$$
$$\therefore \alpha^2+\beta^2=29$$

步驟3

初現瓶頸

接著我們想：「若$\alpha^3+\beta^3$是不是也可以創造**恆等式**來解決」？

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$$
$$=\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$(-5)\text{x}(29)=\alpha^3+\beta^3+(-2)(-5)$$
$$\therefore\alpha^3+\beta^3=-155$$

所以本組將研究依此類推至 $\alpha^n+\beta^n$

回顧與觀察

計算時，本組發現要解出 $\alpha^2+\beta^2$

必須需要先知道 $\alpha+\beta$

要解出 $\alpha^3+\beta^3$也必須需要先知道$\alpha^2+\beta^2$

所以都是**承上求來解決下一式的問題**，而且隨著**次方越高** 要利用的恆等式也越來越複雜，所以在這本組試著想解決的問題

靈光乍現

不利用恆等式來推出$\alpha^n+\beta^n$

本組想利用原方程式，換個方式來試試

$x^2+5x-2=0$之兩根為α、β

由前可知：$\alpha\beta=-2$

$\alpha+\beta=-5$

把原式改造一下 ⇨ $x^2=-5x+2$

兩根代入 ⇨

$$\begin{array}{rl} & \alpha^2=-5\alpha+2 \\ + & \beta^2=-5\beta+2 \\ \hline & \alpha^2+\beta^2=-5(\alpha+\beta)+4 \end{array}$$

$=(-5)\text{x}(-5)+4=29$

承上啟下

那 $\alpha^3+\beta^3$該怎麼辦呢?因為原式最高只到2次。
經本組思考後，把原式再同乘一次x

得$x^3+5x^2-2x=0$ ⇒ $x^3=-5x^2+2$

兩根代入 ⇒ $\alpha^3=-5\alpha^2+2\alpha$

$+\quad \beta^3=-5\beta^2+2\beta$

$\alpha^3+\beta^3=-5(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)$

$=(-5)\times(29)+2\times(-5)$

$=-155$

乘勝追題

為了更仔細知道這結果是正確的
本組再以下列的方式來驗證
是否也有相同的結果

撥雲見日

想到了

再次利用乘法公式的解法

創造式子

$$(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)=\alpha^4+\beta^4+\alpha\beta^3+\alpha^4\beta$$

$$=\alpha^4+\beta^4+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=(-5)\text{x}(-155)=\alpha^4+\beta^4+(-2)\text{x}29$$

$$775=(-5)\text{x}(-155)=\alpha^4+\beta^4-58$$

$$\therefore \alpha^4+\beta^4=833$$

完美驗證

驗證方式：

$x^2+5x-2=0$ 同乘x^2

$x^4+5x^2-2x^2=0$

$x^4=-5x^3-2x^2$

兩根代入

$$
\begin{array}{rl}
 & \alpha^4=-5\alpha^3+2\alpha^2 \\
+ & \beta^4=-5\beta^3+2\beta^2 \\
\hline
\end{array}
$$

$\alpha^4+\beta^4=-5(\alpha^3+\beta^3)+2(\alpha^2+\beta^2)$

$=(-5)\text{x}(-155)+2\text{x}29$

$=755+58=833$

得出結論

- 不利用承上一式的次方，而完成$\alpha^n+\beta^n$，並找到一個完美係數
- 先假設方程式 $x^2+ax+b=0$，兩根為α、β
- 本組陸續用上述方式$\alpha+\beta$、$\alpha^2+\beta^2$、$\alpha^3+\beta^3$....等多組的結果來觀察是否有一套規則，進而找到完美係數的規則。

再次驗證

1. $\alpha+\beta$

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$x^2+ax+b=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

得知：$\alpha+\beta=-a$

$\alpha\beta=b$

$\therefore \alpha+\beta=-a$

2. $\alpha^2+\beta^2$

$x^2=-ax-b$

α、β 代入 $\alpha^2=-ax-b$

$+\quad \beta^2=-a\beta-b$

$\alpha^2+\beta^2=-a(\alpha+\beta)-2b$

$=-a(-a)-2b$

利用 1 結果：$\alpha+\beta=-a$ 代換

$=a^2-2b$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=a^2-2b$

- 依此類推

$$\alpha^3+\beta^3 \Rightarrow \alpha^4+\beta^4 \Rightarrow \alpha^5+\beta^5$$

$$\Rightarrow \alpha^6+\beta^6 \Rightarrow \alpha^7+\beta^7$$

統整觀察

資料統整與觀察

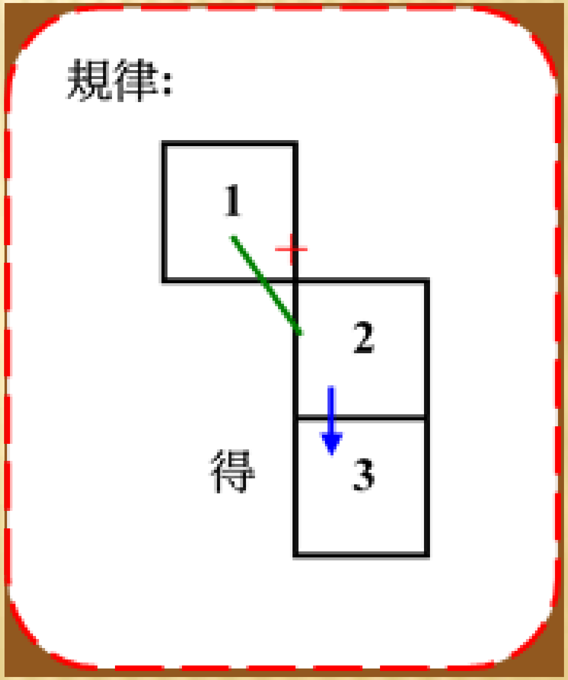
$\alpha+\beta=-a$
$\alpha^2+\beta^2=a^2-2b$
$\alpha^3+\beta^3=-a^3+3ab$
$\alpha^4+\beta^4=a^4-4a^2b+2b^2$
$\alpha^5+\beta^5=-a^5-6a^4b+5ab^2$
$\alpha^6+\beta^6=a^6-5a^3b+9a^2b^2-2b^3$
$\alpha^7+\beta^7=-a^7+7a^5b-14a^3b^2+7ab^3$

觀察：

a的次方➡7➡5➡3➡1
（遞減二次方）
b的次方➡0➡1➡2➡3
（遞增一次方）

找出規律

$\alpha+\beta$	1	0	0	0			
$\alpha^2+\beta^2$	1	2	0	0			
$\alpha^3+\beta^3$	1	3	0	0			
$\alpha^4+\beta^4$	1	4	2	0			
$\alpha^5+\beta^5$	1	5	5	0			
$\alpha^6+\beta^6$	1	6	9	2			
$\alpha^7+\beta^7$	1	7	14	7	0		
預測 $\alpha^8+\beta^8$	1	8	20	16	2		



驗證規律

試著驗證$\alpha^8+\beta^8$是否為相對應的規律

$x^2=-ax-b$ 同乘x^6

$x^8=-ax^7-bx^6$

α、β 代入 $\alpha^8=-a\alpha^7-b\alpha^6$

$+\quad \beta^8=-a\beta^7-b\beta^6$

$\alpha^8+\beta^8=-a(\alpha^7+\beta^7)+b(\alpha^6+\beta^6)$

$=-a(-a^7+7a^5b-14a^3b^2+7ab^3)-b(a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3)$

$=a^8-7a^6b-14a^4b^2+7a^2b^3-a^6b+6a^4b^2+9a^2b^3-2b^4$

$=a^8-8a^6b+20a^4b^2-16a^2b^3+2b^4$

$\therefore\ a^8-8a^6b+20a^4b^2-16a^2b^3+2b^4$

數字為1、8、20、16、2，完全相符

要解決的是a、b的關係及正負號如何安排

由以上數據可觀察：

(1) a、b的安排：$a^n b^0$，$a^{n-2}b^1$，$a^{n-4}b^2$ ....

★a每次的指數都遞減2次，從a^n開始遞減到a^0或a^1就結束。

★b則b^0指數每次遞增1次，直到有a^0或a^1出現就結束。

★a、b的次方和從n，n-1，n-2，.......有規律的每次差1次。

(2) 正負號的安排：第一項前加$(-1)^n$

第二項前加$(-1)^{n-1}$

第三項前加$(-1)^{n-2}$

.......依此類推

由$\alpha^8+\beta^8$來驗證一下： 1、8、20、16、2

$$(-1)^8\, a^8b^0+(-1)^7\,\text{x}a^6b^1+(-1)^6\,\text{x}20a^4b^2+(-1)^5\,\text{x}16a^2b^3+(-1)^4\,\text{x}2a^0b^4$$
$$= a^8-8a^6b+20a^4b^2-16a^2b^3+2b^4$$

大膽猜測

綜合上述觀察：

$\alpha^n+\beta^n=-(-1)^n$x A x $a^{n-2}b^1+(-1)^{n-1}$ x B x $a^{n-2}b^1+(-1)^{n-2}$ x C x a^{n-2}b.......

其中A、 B、 C...為所推出的完美係數

利用本組所發現的公式推導出$\alpha^9+\beta^9$

▼表(三) 由高次至低次排列

$\alpha+\beta$	1	0	0	0			
$\alpha^2+\beta^2$	1	2	0	0			
$\alpha^3+\beta^3$	1	3	0	0			
$\alpha^4+\beta^4$	1	4	2	0			
$\alpha^5+\beta^5$	1	5	5	0			
$\alpha^6+\beta^6$	1	6	9	2			
$\alpha^7+\beta^7$	1	7	14	7	0		
$\alpha^8+\beta^8$	1	8	20	16	2	0	
推出 $\alpha^9+\beta^9$	1	9	27	30	9	0	

旁徵博引

$\alpha^9+\beta^9 = -(-1)^9$x 1 x $a^9b^0+(-1)^{9-1}$ x 9 x $a^{9-2}b^1+(-1)^{9-2}$ x 27 x a^{9-4}
b^2
$+(-1)^{9-3}$ x 30 x $a^{9-6}b^3+(-1)^{9-4}$ x 9 x $a^{9-8}\,b^4$

$= -a^9+9a^7b-27\,a^5\,b^2-a^9+30\,a^3\,b^3-9b^4$

至此表示可推至$\alpha^n+\beta^n$，但次方越來越大，很難再利用乘法公式慢慢驗證，因此，利用巴斯卡三角形係數及二項式定理移項推出本組的方程式，及驗證上述一的結果。

設x^2+ax+b=0之兩根為α、β
x^2+ax+b
$=(x-\alpha)(x-\beta)$
$=x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta$
$\therefore a=-(\alpha+\beta)$
$b=-(\alpha+\beta)$

經過驗算，本組得出了一個結果

以3次方為例:

巴斯卡三角形(二項式定理)

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$\longrightarrow \quad (\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

用$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$代入得:

$\longrightarrow \quad (-a)^3=\alpha^3+\beta^3-3ab$

$\alpha^3+\beta^3=-a^3+3ab$

與本組**推導出的結果相同!**

研究結果

在驗證途中，發現推出了巴斯卡三角形係數及二項式定理，也更加證明了此係數安排是正確的，可稱為完美，所以本組稱它為「完美係數」。

突破成長

訂定主題 排除萬難 分工合作 文書處理 突破成長

當本組面對「創造恆等式」卡題無法突破時，多虧老師的耐心指導。克服難題後，對數學及獨立研究都有進一步的了解跟興趣。享受困境中的突破~是成長的喜悅!!

感謝各位教授的聆聽
敬請教授指導

問答時間

巴斯卡三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

巴斯卡三角形相互驗證__4次方

$(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha\beta^2+\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$......公式

驗算：$\alpha^4+\beta^4=a^4-4a^2b+2b^4$

$a^4=\alpha^4+\beta^4+4a^2b+2b^2$

$[(\alpha+\beta)]^4=\alpha^4+\beta^4+[(\alpha+\beta)]^2\alpha\beta-2(\alpha\beta)^2$

$(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+\beta^4+4[\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2]\alpha\beta-2\alpha^2\beta^2$

$=\alpha^4+\beta^4+4\alpha^3\beta+8\alpha^2\beta^2]+4\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta^2$

$=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2]+4\alpha\beta^2+\beta^2$

巴斯卡三角形相互驗證__5次方

$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$......公式

驗算：$\alpha^5+\beta^5=-a^5+5a^3b-5ab^2$

➡ $a^5=\alpha^5+\beta^5-5a^3b+5b^2$

➡ $-[-(\alpha+\beta)]^5=\alpha^5+\beta^5-[-(\alpha+\beta)]^3\alpha\beta+5[-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)^2$