附件六之一

彰化縣108學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：

組別：

■國小組

□國中組

■數學類

□自然與生活科技類

□人文社會類

作品名稱：**有稜有角—正方形的變化組合**

彰化縣108學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書(內文)

第一階段 研究訓練階段

一、 近二年學校獨立研究課程之規劃

1. 中年級，著重基本研究能力的培養，如：紀錄、作筆記、學習策略及歸納整理資料等。
2. 高年級，著重學生發現問題、高層次思考及規劃整體研究進度。

二、 學校如何提供該生獨立研究訓練

1. 透過任務導向的課程，引導學生儲備獨立研究的能力，從尋找研究方向、歷屆獨立研究觀摩、依照孩子的興趣深入探究、帶領孩子從日常生活環境的現象探討，包括人為現象的觀察啟發及自然現象的觀察啟發，進行科學探究活動。
2. 發現研究主題後，能有概念的選取不同的研究方法來進行研究，形成研究動機、探討可行性的研究資源並規劃整體進度，從問題中思考不同的解決方法，進而選取其認為最佳之方式。

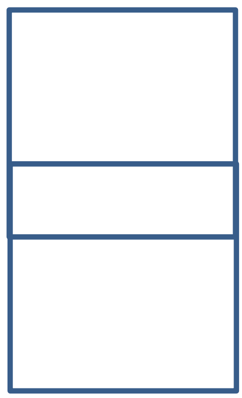
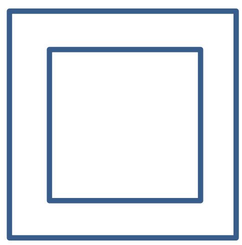
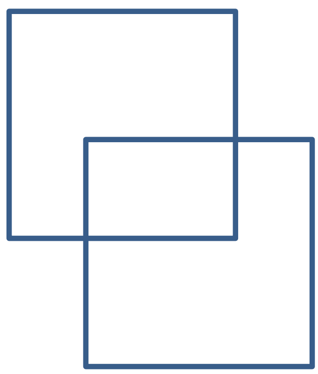
有稜有角—正方形的變化組合

摘要

我們要探討兩個正方形 nxn 能疊合出的多邊形中所有的變化形以及其中的規律，我們利用窮舉法來討論，將正分形分為全等及不全等兩種情況分別討論，並將所有可能詳列討論，共計有 10 種情形；據我們的研究結果發現，正方形疊合成多邊形有平移、旋轉的變化。此外，在正方形疊合成多邊形中，我們發現，最少邊數為 4 邊，最多邊數為 16 邊，但 12、14、15 無法產生，尚待後續研究持續討論。

壹、研究動機

我很喜歡數學，在考試時數學科對我來說得心應手，學習數學中接觸到四邊形相關的單元都覺得非常有趣，某天我在玩邊條組合時發現兩個正方形可以組成許多不一樣的變化，因此我很好奇到底可以有多少種的可能?同時我拿去考同學發現大家畫的都不盡相同，所以我希望透過研究試著找出所有的變化形以及其中的規律。

		
同學甲：兩個全等正方形構成四邊形	同學乙：兩個不等正方形構成四邊形	同學丙：兩個全等正方形構成八邊形

貳、研究目的

一、尋找兩個正方形構成多邊形的組合

二、探討兩個全等正方形所構成多邊形的變化組合

三、探討兩個不全等正方形所構成多邊形的變化組合

參、研究設備及器材

邊條組合、電腦軟體、紙、筆

肆、研究過程

一、研究進度

工作進度	日期	工作內容
收集資料	108 年 8 月	1. 嘗試四邊形構成多邊形的變化 2. 參考相關研究
確立研究主題 探討研究問題	108 年 9 月	1. 探討四邊形構成多邊形的規則 2. 操作幾合扣條
擬定研究計畫 整理資料	108 年 10 月	1. 討論四邊形構成多邊形的研究內容 2. 列出研究問題與目的
撰寫研究報告	108 年 11 月	1. 整理研究紀錄 2. 撰寫研究結果

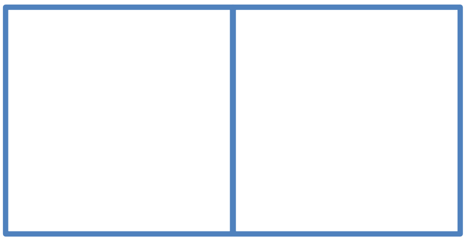
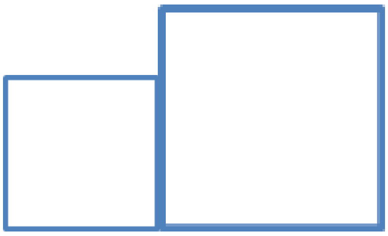
二、相關文獻

題目名稱	作者	摘要	資料來源
會隱身術的平方公分	王薇婷 葉盛 曾馨玉	我們推論出的公式：原正方形邊長甲，切割長度乙，則 =拼湊後長方形的面積－原正方形的面積=〔(2 × 甲－乙)×(甲－乙)〕－(甲 × 甲)。而我們發現.任一正方形邊長甲都可以找到一最佳切割比例，及長度乙≦甲/2，且以最接近甲/2 的長度時，使得拼成後的長方形面積與原正方形面積的差量為最小，並可將拼成後的長方形歸類為凸出型(以⊕表示)與凹陷型(以⊖表示)兩種類型： 最後我們歸納出一規則，即相同面積差量的每一列中的每一數恰好是前兩數的和(最前面兩數除外)，也就是說，對每一列數任取連續三數(A，B，C)就是一組最佳組合，C 為正方形邊長甲，A 為切割比例乙，而面積差量＝B×(2B－A)－C×C＝B×(B+C)－C×C最小。 另外，亦可連續四數為一組合(A、B、C、D)， D 即為組合後長方形長，B 為寬，因此面積最小差量為：B×(B+C)－C×C＝B×D－C×C，可用來預測出不同的正方形邊長甲，它們所得到的面積最小差量相同的最佳切割值。	第四十五屆中小學科學展覽會

「角」盡腦汁	黃聖益 黃亦聖 李天官 陳旃綺 楊恭年 楊暄禾	研究後發現只有正三角形、正方形、正六邊形 等圖形，因為其內角角度數是 360 的因數，所以可構成平面；一層一層的平面圖形所需 要正多邊形個數記算方式，推論如下：正三角形【(3n2 －3n) ÷2】＋1；正四邊形【(4 n2 －4n) ÷2】＋1；正六邊形 3 n2 －3n＋1，此結果可讓我們運用在地磚的鋪設上。而可構 成正多面體的條件是正多邊形的單一內角角度 3 以上的整數倍須小於 360°，實驗結果發 現只有正三角形可構成正四面體、正八面體、正二十面體；正四邊形可構成正六面體； 正五邊形可構成正十二面體，此研究在建築界有很大的幫助。	第四十六屆中小學科學展覽會
探討整數三角形周長與面積的關係與疊合性質	楊家婕 歐陽芊芊 林家伃	本篇在探討整數三角形〔指邊長與面積均為自然數〕周長與面積成倍數關係的存在與 否；由〔 6、8、10〕的三角形出發，發現其面積與周長的數值相同，但這是否唯一？還是有 限個？或以某種形式無限個存在？再拓展方向考慮p · 面積 = k · 周長〔p、k均為自然數〕時 的情形，更發現到面積值、$s - c$值〔s為周長的一半，c為三角形最長邊〕、p值與k 值存在 某種巧妙的關聯。	第 58 屆中小學科學展覽會

三、名詞解釋

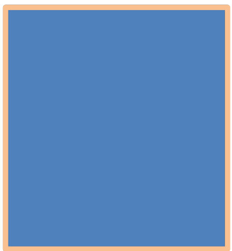
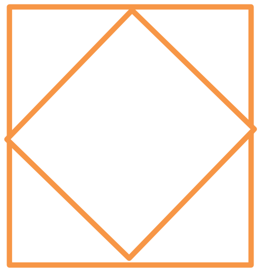
由一個 n×n 及一個 m×m 的正方形構成新的多邊形，其中 n、m 可以為全等或不全等，例如：兩個邊長 3 公分的正方形或一個 3 公分及一個 2 公分的正方形，所形成的變化組合。

	
兩個邊長 3 公分的正方形，所構成的四邊形	一個 2 公分及一個 1 公分的正方形，所構成的六邊形

伍、研究結果與討論

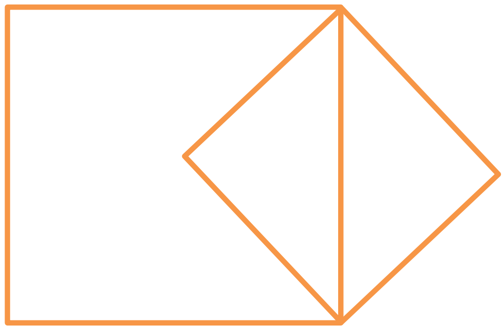
一、 尋找兩個正方形構成多邊形的所有組合

（一）觀察

組合後多邊形數：4		
4-1 	4-2	4-3
4-4		4-5 

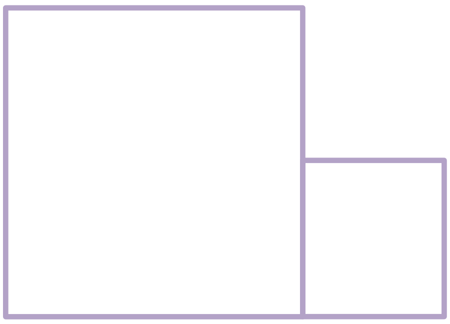
組合後多邊形數：5

5-1

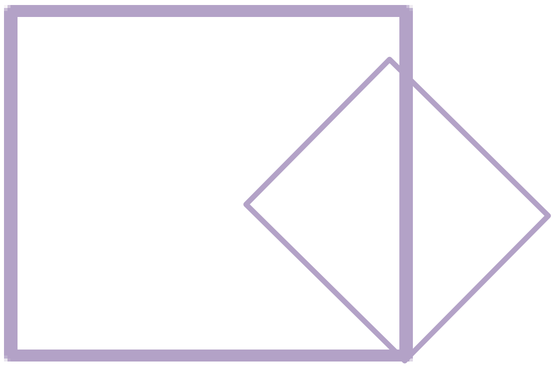


組合後多邊形數：6

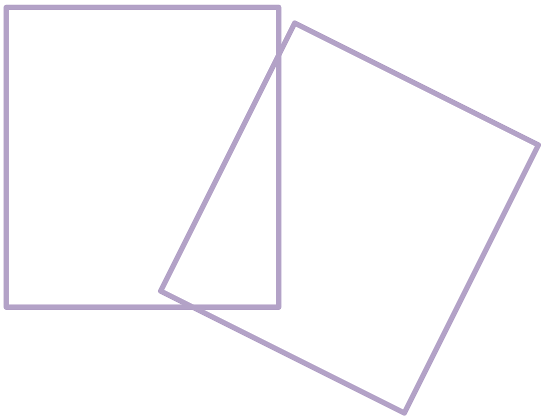
6-1

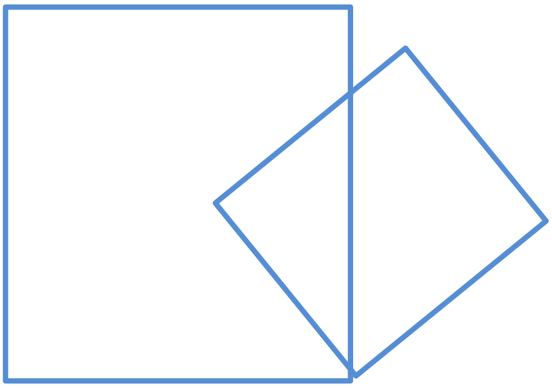
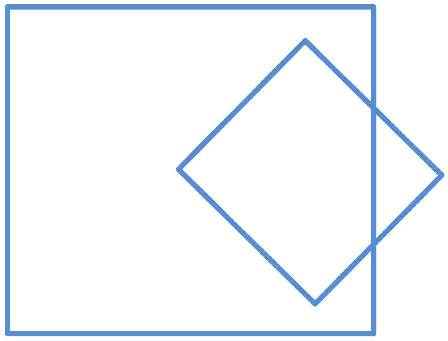
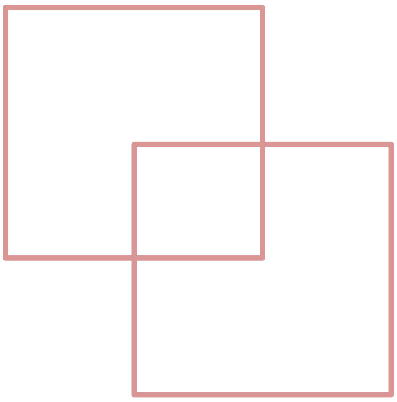
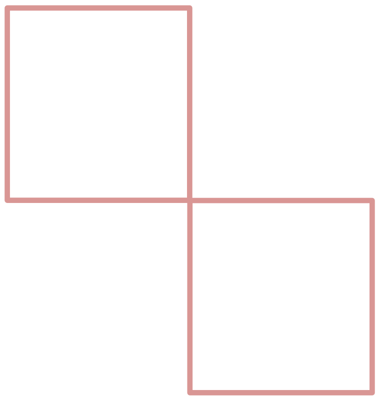
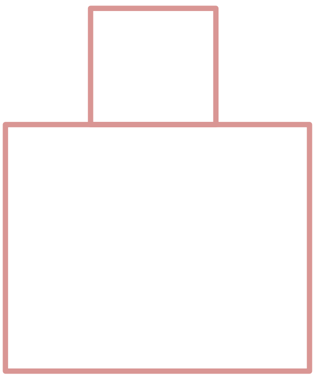
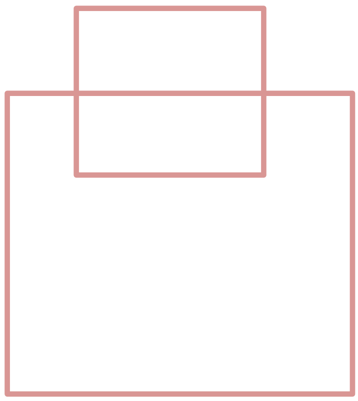


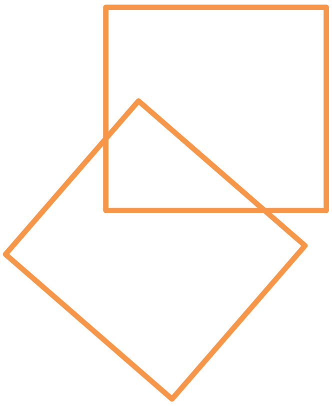
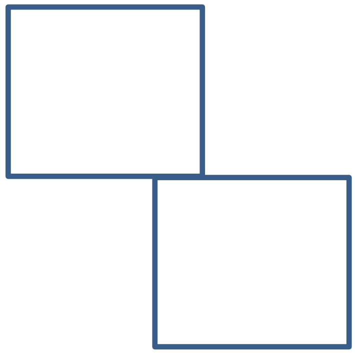
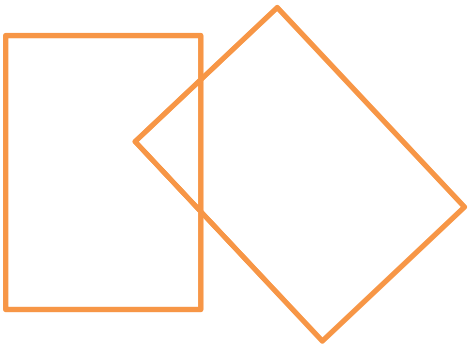
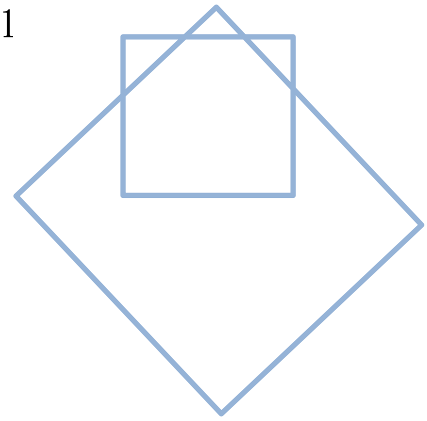
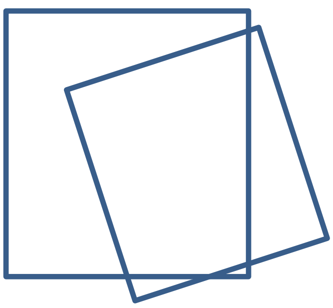
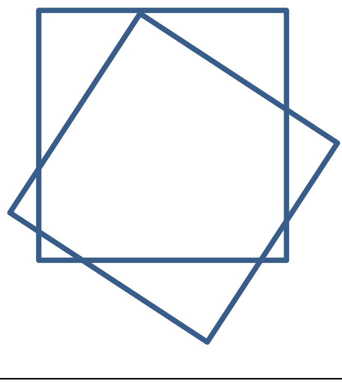
6-2



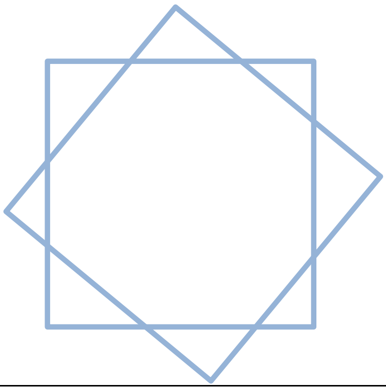
6-3



<table>
<tr><td colspan="2">組合後多邊形數： 7</td></tr>
<tr><td>7-1
</td><td>7-2
</td></tr>
<tr><td colspan="2">組合後多邊形數 ： 8</td></tr>
<tr><td>8-1
</td><td>8-2
</td></tr>
<tr><td>8-3
</td><td>8-4
</td></tr>
</table>

組合後多邊形數 ： 8	
8-5 	8-6 
組合後多邊形數 ：9	組合後多邊形數 ：10
9-1 	10-1 
組合後多邊形數 ：11	組合後多邊形數 ：13
11-1 	13-1 

組合後多邊形數 ：16



（二）關係：

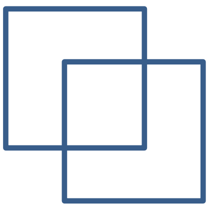
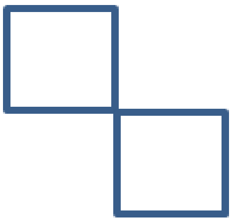
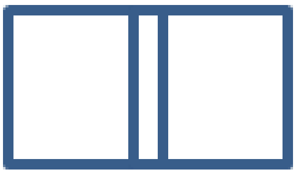
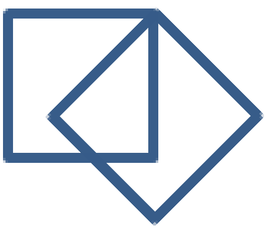
組合後多邊形邊數	4	5	6	7	8
圖形角數	4	5	6	7	8
圖形數量	4	1	3	2	6
組合後多邊形邊數	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
圖形角數	9	10	11	X	13
圖形數量	1	1	1	0	1
組合後多邊形邊數	**14**	**15**	**16**		
圖形角數	X	X	16		
圖形數量	0	0	1		

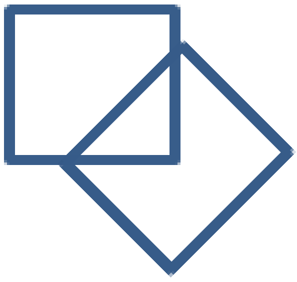
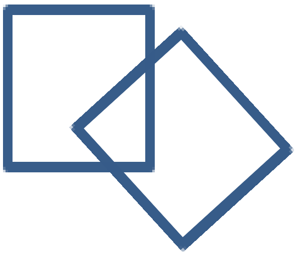
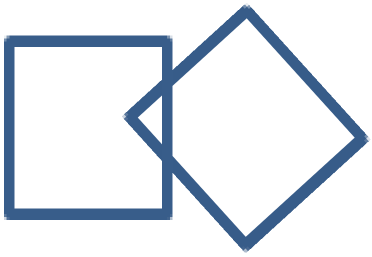
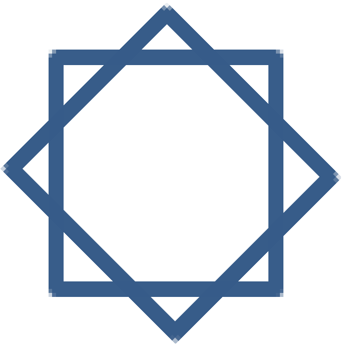
（三）發現：

我們發現兩個正方形所組成的多邊形有十種多邊形，最少邊為四邊形，最多邊為十六邊形，其中十二邊、十四邊、十五邊是無法產生圖形的，這個尚待持續討論可能的因素。此外，多邊形形成的角數即，因為疊合時邊數容易重疊不可細數，因此確認角數是可以替代的檢核辦法。

二、　探討兩個全等正方形所構成多邊形的變化組合

（一）　觀察

編號	圖示	說明
1-1		觀察：往右下平移 發現：兩個邊長 1 公分構成的八邊形
1-2		觀察：往右下平移至頂點疊合 發現：兩個邊長 1 公分構成的八邊形
1-3		觀察：往右平移 發現：兩個邊長 1 公分構成的四邊形
1-4		觀察：旋轉 45 度 發現：兩個邊長 1 公分構成的六邊形

1-5		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：兩個邊長 1 公分構成的七邊形
1-6		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：兩個邊長 1 公分構成的八邊形
1-7		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：兩個邊長 1 公分構成的九邊形
1-8		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：兩個邊長 1 公分構成的十六邊形

（二） 關係

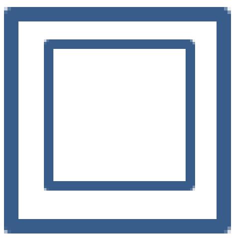
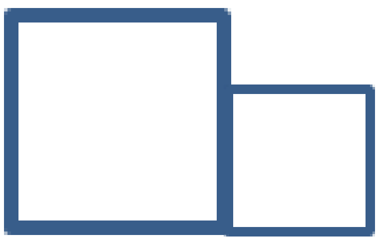
	四	六	七	八	九	十六
平移	V			V		
旋轉 45°		V	V	V	V	V

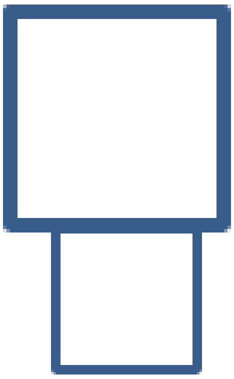
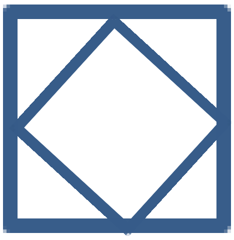
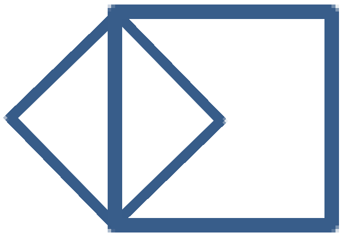
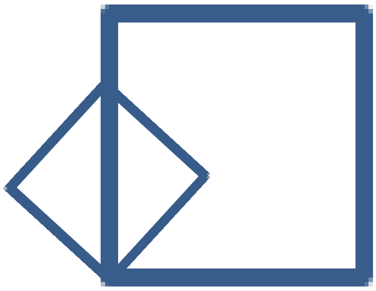
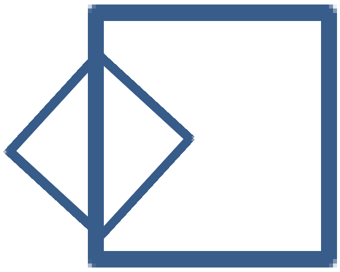
（三） 發現

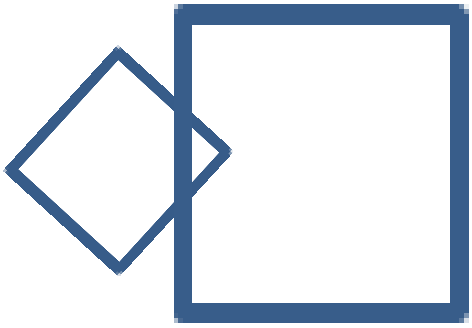
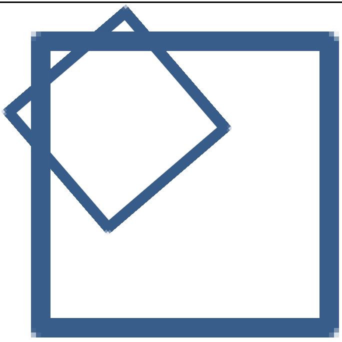
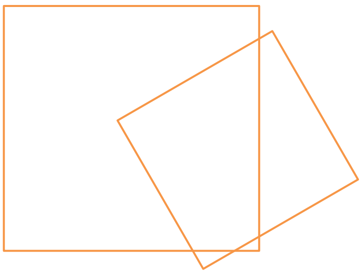
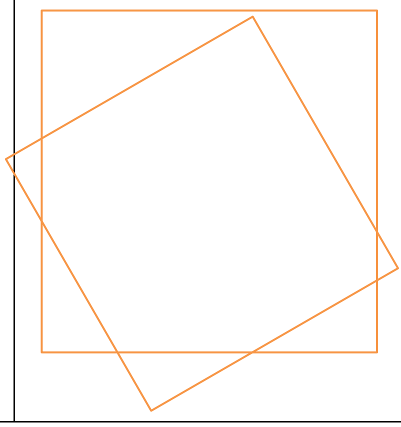
我們發現全等的正方形可以變化出六種多邊形，分別是四、六、七、八、九、十六；其中，四、八是平移即可產生，六、七、八、九、十六需要經過旋轉 45°且移動位置。

三、 探討兩個不全等正方形所構成多邊形的變化組合

（一） 觀察

編號	圖示	說明
2-1		觀察：平移疊合 發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2 公分構成的四邊形
2-2		觀察：平移邊長疊合 發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2 公分構成的六邊形

2-3		觀察：平移交疊 發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2 公分構成的八邊形
2-4		**觀察：旋轉 45 度** **發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2.1 公分構成的四邊形**
2-5		**觀察：旋轉 45 度且位移** **發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2.1 公分構成的五邊形**
2-6		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2 公分構成的六邊形
2-7		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：一個邊長 1 公分及一個邊長 2 公分構成的七邊形

2-8		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2 公分構成的九邊形
2-9		觀察：旋轉 45 度且位移 發現：一個邊長 3 公分及一個邊長 2 公分構成的十邊形
2-10		**觀察：旋轉 60 度且位移** **發現：一個邊長 2.4 公分及一個邊長 3 公分構成的十一邊形**
2-11		觀察：旋轉 60 度且位移 發現：一個邊長 2.6 公分及一個邊長 3 公分構成的十三邊形

（二） **關係**

	四	**五**	**六**	**七**	**八**	**九**	**十**	**十一**	**十三**
平移	**V**		**V**		**V**				
旋轉	**V**	**V**	**V**	**V**		**V**	**V**	**V**	**V**

（三） **發現**

我們發現不全等的正方形可以變化出十一種多邊形，分別是四、五、六、七、八、九、十、十一、十三；其中，四、六、八是平移即可產生，四、五、六、七、九、十、十一、十三需要經過旋轉且移動位置;四、五邊形旋轉角度需為45°，十一邊形旋轉角度為 60°。

陸、評鑑與檢討

一、 我們歸納出兩個正方形所組成的多邊形有 10 種多邊形

二、 最少邊為 4 邊形，最多邊為 16 邊形，其中 12 邊、14 邊、15 邊是無法產生圖形的，這個尚待持續討論可能的因素。

三、 此外，多邊形形成的角數即等於邊數，因為疊合時邊數容易重疊不可細數，因此確認角數是可以替代的檢核辦法。

四、 我們發現全等的正方形可以變化出 6 種多邊形，分別是 4、6、7、8、9、16。其中，4、8 是平移即可產生，6、7、8、9、16 需要經過旋轉 45°且移動位置。

五、 不全等的正方形可以變化出 11 種多邊形，分別是 4、5、6、7、8、9、10、11、13；其中，4、6、8 是平移即可產生，4、5、6、7、9、10、11、13 需要經過旋轉且移動位置;4、5 邊形旋轉角度需為 45°，11 邊形旋轉角度為 60°。

柒、參考資料及其他

蒼弘萃編(2005)，康軒文教事業國小數學第 11 冊，第 2 版，p.32-36

釣 浩康作， 簡瑞宏譯(2003) ， 與愛麗絲同遊奇妙的數學世界，第 1 版，p.61－p.85，

黃聖益等(2007),「角」盡腦汁，第四十六屆中小學科學展覽會

楊家婕等(2019)，探討整數三角形周長與面積的關係與疊合性質，第五十八屆中小學科學展覽會