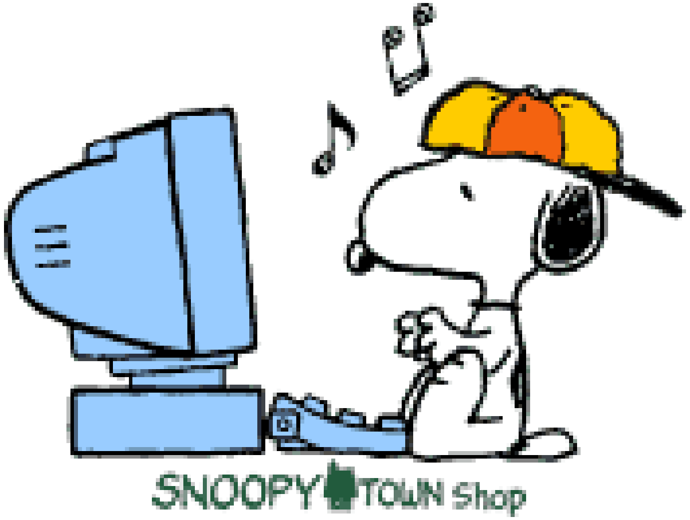
數列萬花筒



0123456789101112131415161718192021222324252627282930313233

5101520253035404550556065707580859095100105110115120125130

2481632641282565121024204840968192163843276865536131072262

1392781243729218765611968359049177147531441159432347829691

研究動機 1/2

　　前一陣子，看到學長學姊為了去參加由九九文教基金會所舉辦的JHMC數學競賽，練習了許多歷屆試題，看到他們如此的認真，我們也湊過去看了看題目，看幾題後覺得很有趣，所以就跟老師拿了幾屆試題來練習，其中在2019年第17屆JHMC國中數學競賽個人賽第三回的題目，有一題引起我們的興趣，原題目內容如下：若一等差數列，其「前4n項的和」比「前n項的和」多180，則前5n項和為多少？

研究動機 2/2

我們原本利用暴力解法花了很多時間才解出，後來老師提醒我們一句話：「等差數列第1項到第n項的和，第n+1項到第2n項的和，第2n+1項到第3n項的和…依此類推可得一個新的等差數列。」從這個方向思考解題較簡單又快速，不到五秒就解開了題目，為了更加了解數列的奧妙，於是展開了本次的獨立研究。

研究目的

(一)如果數列a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$ 是等差數列，其公差為d。

我們是否可在經過適度的重排後，在數列a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$中找到新的等差數列，並求出新數列的公差。

(二)如果數列b_1、b_2、$b_3 \cdots b_n$ 是等比數列，其公比為r。

我們是否可在經過適度的重排後，在數列b_1、b_2、$b_3 \cdots b_n$中找到新的等比數列，並求出新數列的公比。

研究成果1/18

(一)如果數列a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$ 是等差數列公差是d，$c \in R$則數列ca_1、ca_2、$ca_3 \cdots ca_n$ 也是等差數列，其公差為cd。

(二)如果數列 a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$ 是等比數列公比是r，$c \in R$則數列ca_1、ca_2、$ca_3 \cdots ca_n$ 也是等比數列，其公比為r。

(三)如果數列a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$是等差數列公差d_a；數列b_1、b_2、$b_3 \cdots b_n$是等差數列公差d_b。令$c_1=a_1+b_1$、$c_2=a_2+b_2$、$c_3=a_3+b_3 \cdots c_n=a_n+b_n$則數列$c_1$、$c_2$、$c_3 \cdots c_n$也是等差數列，公差為$d_a+d_b$。

研究成果2/18

(四)如果數列a_1、a_2、a_3…a_n是等比數列公比r_a；數列b_1、b_2、b_3…b_n是等比數列公比r_b。令$c_1=a_1b_1$、$c_2=a_2b_2$、$c_3=a_3b_3$…$c_n=a_nb_n$則數列c_1、c_2、c_3…c_n也是等比數列，公比為r_ar_b。

(五)如果數列a_1、a_2、a_3…a_n是等差數列公差d；b是個常數。令$c_1=a_1+b$、$c_2=a_2+b$、$c_3=a_3+b$…$c_n=a_n+b$則數列c_1、c_2、c_3…c_n也是等差數列，公差為d。

(六)如果數列a_1、a_2、a_3…a_n 是等差數列公差是d，則數列a_p、a_{p+m}、a_{p+2m}、a_{p+3m}… 是等差數列，其公差md。

研究成果3/18

(七)如果數列a_1、a_2、$a_3\cdots a_n$ 是等比數列公比是r，則數列a_p、a_{p+m}、a_{p+2m}、$a_{p+3m}\cdots$ 是等比數列，其公比為r^m。

(八)如果數列a_1、a_2、$a_3\cdots a_n$ 是等差數列公差是d。
我們令 $b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$，即原等差數列前m項的和。
$b_2 = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}$，即原等差數列第m+1項到2m項的和。$b_3 = a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{3m}$，即原等差數列第2m+1項到3m項的和。依此類推，
第s項$b_s = a_{(s-1)m+1} + a_{(s-1)m+2} + \cdots + a_{sm}$。
則數列b_1、b_2、$b_3\cdots b_p$是等差數列，公差為m^2d

研究成果4/18

證明:$b_{k+1}-b_k=[a_{km+1}+a_{km+2}+\cdots+a_{(k+1)m}]-[a_{(k-1)m+1}+a_{(k-1)m+2}+\cdots+a_{km}]=[a_{km+1}-a_{(k-1)m+1}]+[a_{km+2}-a_{(k-1)m+2}]+\cdots+[a_{(k+1)m}-a_{km}]=md+md+md+\cdots+md=m^2d$

(九)如果數列a_1、a_2、$a_3\cdots a_n$ 是等比數列公比是r。
我們令$b_1=a_1\times a_2\times\cdots\times a_m$，即原等比數列前m項的積。
$b_2=a_{m+1}\times a_{m+2}\times\cdots\times a_{2m}$，即原等比數列第m+1項到2m項的積。$b_3=a_{2m+1}\times a_{2m+2}\times\cdots\times a_{3m}$，即原等比數列第2m+1項到3m項的積。依此類推，
第k項$b_k=a_{(k-1)m+1}\times a_{(k-1)m+2}\times\cdots\times a_{km}$。
則數列b_1、b_2、$b_3\cdots b_p$是等比數列，公比為r^{m^2}

研究成果5/18

若數列a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$是一個公差為d的等差數列，我們將它重新排列成下面矩形的形狀(此矩形每列有m行)，我們發現這裡面隱藏許多等差數列。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & 、 & a_2 & 、 & a_3 & 、 & a_4 & \cdots & a_m \\
a_{m+1} & 、 & a_{m+2} & 、 & a_{m+3} & 、 & a_{m+4} & \cdots & a_{2m} \\
a_{2m+1} & 、 & a_{2m+2} & 、 & a_{2m+3} & 、 & a_{2m+4} & \cdots & a_{3m} \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{pm+1} & 、 & a_{pm+2} & 、 & a_{pm+3} & 、 & a_{pm+4} & \cdots & a_{(p+1)(m)}
\end{array}
$$

為了方便討論，我們將此等差數列所形成的矩形稱為：「矩形[A]」

研究成果6/18

並將矩形[A]的元素重新命名。

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 = a_{1,1} & a_2 = a_{1,2} & a_3 = a_{1,3} & \cdots & a_m = a_{1,m} \\
a_{m+1} = a_{2,1} & a_{m+2} = a_{2,2} & a_{m+3} = a_{2,3} & \cdots & a_{2m} = a_{2,m} \\
a_{2m+1} = a_{3,1} & a_{2m+2} = a_{3,2} & a_{2m+3} = a_{3,3} & \cdots & a_{3m} = a_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{pm+1} = a_{(p+1),1} & a_{pm+2} = a_{(p+1),2} & a_{pm+3} = a_{(p+1),3} & \cdots & a_{(p+1)m} = a_{(p+1),m} \\
 & & \vdots & &
\end{array}
$$

研究成果7/18

(A1)矩形[A]的任一列，都是一個等差數列，其公差為d。

(A2)矩形[A]的任一行，都是一個等差數列，其公差為md。

(A3)從矩形[A]的左上角向右下45度畫一線，經過的數成等差數列，即$a_{1,1}$、$a_{2,2}$、$a_{3,3}$、$a_{4,4}$…等差數列，其公差為(m+1)d。

(A4)矩形[A]的右上角向左下45度畫一線，經過的數成等差數列，即 $a_{1,m}$、$a_{2,(m-1)}$、$a_{3,(m-2)}$、$a_{4,(m-3)}$… 等差數列，其公差 為 (m-1)d。

研究成果8/18

(A5)從矩形[A]的第i列j行$a_{i,j}$開始，每隔(p-1)列，取一個數，即$a_{i,j}$、$a_{(i+p),j}$、$a_{(i+2p),j}$、$a_{(i+3P),j}$…是等差數列，其公差為pmd。。

(A6)從矩形[A]的第i列j行$a_{i,j}$開始，每隔(q-1)行，取一個數，即$a_{i,j}$、$a_{i,(j+q)}$、$a_{i,(j+2q)}$、$a_{i,(j+3q)}$…是等差數列，其公差為qd。

(A7)從矩形[A]的第i列j行a_{ij}開始，每隔(p-1)列(q-1)行，取一個數，即$a_{i,j}$、$a_{(i+p),(j+q)}$、$a_{(i+2p),(j+2q)}$、$a_{(i+3p),(j+3q)}$…是等差數列，其公差為(pm+q)d。

研究成果9/18

若數列b_1、b_2、$b_3 \cdots b_n$是一個公比為r的等比數列，我們將此等比數列重新排列成下面矩形的形狀(此矩形每列有m行)，我們發現這裡面隱藏許多等比數列。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
b_1 & 、 & b_2 & 、 & b_3 & 、 & b_4 & \cdots & b_m \\
b_{m+1} & 、 & b_{m+2} & 、 & b_{m+3} & 、 & b_{m+4} & \cdots & b_{2m} \\
b_{2m+1} & 、 & b_{2m+2} & 、 & b_{2m+3} & 、 & b_{2m+4} & \cdots & b_{3m} \\
 & & & & \vdots & & & & \\
b_{pm+1} & 、 & b_{pm+2} & 、 & b_{pm+3} & 、 & b_{pm+4} & \cdots & b_{(p+1)(m)}
\end{array}
$$

為了方便討論，我們將此等比數列所形成的矩形稱為：「矩形[B]」

研究成果10/18

並將矩形[B]的元素重新命名

$$
\begin{array}{ccccc}
b_1 = b_{1,1} & b_2 = b_{1,2} & b_3 = b_{1,3} & \cdots & b_m = b_{1,m} \\
b_{m+1} = b_{2,1} & b_{m+2} = b_{2,2} & b_{m+3} = b_{2,3} & \cdots & b_{2m} = b_{2,m} \\
b_{2m+1} = b_{3,1} & b_{2m+2} = b_{3,2} & b_{2m+3} = b_{3,3} & \cdots & b_{3m} = b_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{pm+1} = b_{(p+1),1} & b_{pm+2} = b_{(p+1),2} & b_{pm+2} = b_{(p+1),3} & \cdots & b_{(p+1)m} = b_{(p+1),m}
\end{array}
$$

$$\vdots$$

研究成果11/18

(B1)矩形[B]的任一列，都是一個等比數列，其公比是r。

(B2)矩形[B]的任一行，都是一個等比數列，其公比是r^m。

(B3)從矩形[B]的左上角向右下45度畫一線，經過的數成等比數列，即$b_{1,1}$、$b_{2,2}$、$b_{3,3}$、$b_{4,4}$…等比數列，其公比為r^{m+1}。

(B4)從矩形[B]的右上角向左下45度畫一線，經過的數成等比數列，即$b_{1,m}$、$b_{2,(m-1)}$、$b_{3,(m-2)}$、$b_{4,(m-3)}$ 是等比數列，其公比為r^{m-1}。

研究成果12/18

(B5)從矩形[B]的第i列j行$b_{i,j}$開始，每隔(p-1)列，取一個數，即$b_{i,j}$、$b_{(i+p),j}$、$b_{(i+2p),j}$、$b_{(i+3P),j}$…是等比數列，其公比為r^{pm}。

(B6)從矩形[B]的第i列j行$b_{i,j}$開始，每隔(q-1)行，取一個數，即$b_{i,j}$、$b_{i,(j+q)}$、$b_{i,(j+2q)}$、$b_{i,(j+3q)}$…是等比數列，其公比為r^{q}。

(B7)從矩形[B]的第i列j行$a_{i,j}$開始，每隔(p-1)列(q-1)行，取一個數，即$b_{i,j}$、$b_{(i+p),(j+q)}$、$b_{(i+2p),(j+2q)}$、$b_{(i+3p),(j+3q)}$…是等比數列，其公比為r^{pm+q}。

研究成果13/18

若數列c_1、c_2、$c_3 \cdots c_n$是一個公差為d的等差數列，我們將它重新以S形的排列方式排成下面矩形的形狀(此矩形每列有m行)，我們發現這裡面隱藏許多等差數列。

$$
\begin{array}{cccccc}
c_1 \text{、} & c_2 \text{、} & c_3 & \cdots & c_{m-1} \text{、} & c_m \\
c_{2m} \text{、} & c_{2m-1} \text{、} & c_{2m-2} & \cdots & c_{m+2} \text{、} & c_{m+1} \\
c_{2m+1} \text{、} & c_{2m+2} \text{、} & c_{2m+3} & \cdots & c_{3m-1} \text{、} & c_{3m} \\
c_{4m} \text{、} & c_{4m-1} \text{、} & c_{4m-2} & \cdots & c_{3m+2} \text{、} & c_{3m+1} \\
 & & & \vdots & & \\
c_{2(k-1)m+1} \text{、} & c_{2(k-1)m+2} \text{、} & c_{2(k-1)m+3} & \cdots & c_{(2k-1)m-1} \text{、} & c_{(2k-1)m} \\
c_{2km} \text{、} & c_{2km-1} \text{、} & c_{2km-2} & \cdots & c_{(2k-1)m+2} \text{、} & c_{(2k-1)m+1} \\
 & & & \vdots & &
\end{array}
$$

為了方便討論，我們將此等差數列以S形的排列方式所形成的矩形稱為：「矩形[C]」

研究成果14/18

並將矩形[C]的元素重新命名。

$$
\begin{array}{ccccc}
c_1 = c_{1,1} & c_2 = c_{1,2} & c_3 = c_{1,3} & \cdots & c_m = c_{1,m} \\
c_{2m} = c_{2,1} & c_{2m-1} = c_{2,2} & c_{2m-2} = c_{2,3} & \cdots & c_{m+1} = c_{2,m} \\
c_{2m+1} = c_{3,1} & c_{2m+2} = c_{3,2} & c_{2m+3} = c_{3,3} & \cdots & c_{3m} = c_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{2(k-1)m+1} = c_{(2k-1),1} & c_{2(k-1)m+2} = c_{(2k-1),2} & c_{2(k-1)m+3} = c_{(2k-1),3} & \cdots & c_{(2k-1)m} = c_{(2k-1),m} \\
c_{2km} = c_{2k,1} & c_{2km-1} = c_{2k,2} & c_{2km-2} = c_{2k,3} & \cdots & c_{(2k-1)m+1} = c_{2k,m}
\end{array}
$$

$$\vdots$$

研究成果15/18

(C1)矩形[C]的任一列，都是一個等差數列，奇數列公差為d，偶數列公差為-d。

(C2)從矩形[C]的第i列j行$c_{i,j}$開始，每隔一列，取一個數，即$c_{i,j}$、$c_{(i+2),j}$、$c_{(i+4),j}$、$c_{(i+6),j}$…是等差數列。其公差為2md。

(C3)從矩形[C]的第i列j行$c_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列，取一個數，即$c_{i,j}$、$c_{(i+2p),j}$、$c_{(i+4p),j}$、$c_{(i+6p),j}$…是等差數列。其公差為2pmd。

(C4)從矩形[C]的第i列j行$c_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列(q-1)行，取一個數，即$c_{i,j}$、$c_{(i+2p),(j+q)}$、$c_{(i+4p),(j+2q)}$、$c_{(i+6p),(j+3q)}$…是等差數列。當i是奇數時其公差為(2pm+q)d，當i是偶數時其公差為(2pm-q)d。

研究成果16/18

若數列d_1、d_2、$d_3 \cdots d_n$是一個公比為r的等比數列，我們將它重新以S形的排列方式排成下面矩形的形狀(此矩形每列有m行)，我們發現這裡面亦隱藏許多等比數列。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
d_1 & 、 & d_2 & 、 & d_3 & \cdots & d_{m-1} & 、 & d_m \\
d_{2m} & 、 & d_{2m-1} & 、 & d_{2m-2} & \cdots & d_{m+2} & 、 & d_{m+1} \\
d_{2m+1} & 、 & d_{2m+2} & 、 & d_{2m+3} & \cdots & d_{3m-1} & 、 & d_{3m} \\
d_{4m} & 、 & d_{4m-1} & 、 & d_{4m-2} & \cdots & d_{3m+2} & 、 & d_{3m+1} \\
 & & & & \vdots & & & & \\
d_{2(k-1)m+1} & 、 & d_{2(k-1)m+2} & 、 & d_{2(k-1)m+3} & \cdots & d_{(2k-1)m-1} & 、 & d_{(2k-1)m} \\
d_{2km} & 、 & d_{2km-1} & 、 & d_{2km-2} & \cdots & d_{(2k-1)m+2} & 、 & d_{(2k-1)m+1} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

為了方便討論，我們將此等比數列以S形的排列方式所形成的矩形稱為：「矩形[D]」

研究成果17/18

並將矩形[D]的元素重新命名。

$$
\begin{array}{ccccc}
d_1 = d_{1,1} & d_2 = d_{1,2} & d_3 = d_{1,3} & \cdots & d_m = d_{1,m} \\
d_{2m} = d_{2,1} & d_{2m-1} = d_{2,2} & d_{2m-2} = d_{2,3} & \cdots & d_{m+1} = d_{2,m} \\
d_{2m+1} = d_{3,1} & d_{2m+2} = d_{3,2} & d_{2m+3} = d_{3,3} & \cdots & d_{3m} = d_{3,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d_{2(k-1)m+1} = d_{(2k-1),1} & d_{2(k-1)m+2} = d_{(2k-1),2} & d_{2(k-1)m+3} = d_{(2k-1),3} & \cdots & d_{(2k-1)m} = d_{(2k-1),m} \\
d_{2km} = d_{2k,1} & d_{2km-1} = d_{2k,2} & d_{2km-2} = d_{2k,3} & \cdots & d_{(2k-1)m+1} = d_{2k,m}
\end{array}
$$

研究成果18/18

(D1)矩形[D]的任一列，都是一個等比數列，奇數列公比為r，偶數列公比為$\frac{1}{r}$。

(D2)從矩形[D]的第i列j行$d_{i,j}$開始，每隔一列，取一個數，即$d_{i,j}$、$d_{(i+2),j}$、$d_{(i+4),j}$、$d_{(i+6),j}$⋯是等比數列。其公比為r^{2m}。

(D3)從矩形[D]的第i列j行$d_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列，取一個數，即$d_{i,j}$、$d_{(i+2p),j}$、$d_{(i+4p),j}$、$d_{(i+6p),j}$⋯是等比數列。其公比為r^{2pm}。

(D4)從矩形 [D]的第i列j行$d_{i,j}$開始，每隔(2p-1)列(q-1)行，取一個數，即$d_{i,j}$、$d_{(i+2p),(j+q)}$、$d_{(i+4p),(j+2q)}$、$d_{(i+6p),(j+3q)}$⋯是等比數列。當i是奇數時其公比為r^{2pm+q}，當i是偶數時其公比為r^{2pm-q}。

未來展望

將等差數列排列成其它的幾何圖形，看看裡面是否有等差數列存在。

將等比數列排列成其它的幾何圖形，看看裡面是否有等比數列存在。

研究其它數列，例如調和數列，看看經過適度的重排之後，是否也可找到新的調和數列。

感謝聆聽
敬請指教