Again！ Mathmagic ～ 拍案叫「絕對值」

之幾何天堂覓雲形蹤

一、研究動機

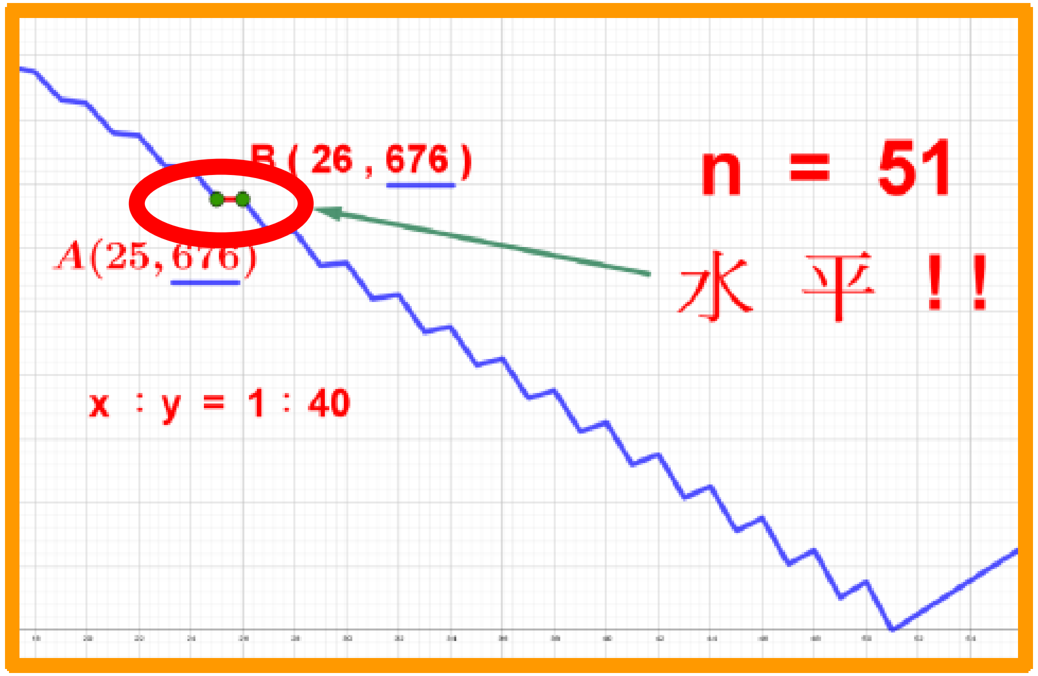
日前於機緣下，閱讀了學長姐「獨立研究」得獎作品之後，發現

- $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|\cdots+n|x-n|$ 發生極值「水平」之 n 值非常少！
- $f(x)=\mathrm{A}|x-a|+\mathrm{B}|x-b|+\mathrm{C}|x-c|+\cdots+\mathrm{K}|x-k|$ 之幾何結構，尚需要探討與研究⋯

這便引起了我們極大的好奇心，思考著⋯

$$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$$

1. $f(x)$ 幾何圖形中發生「水平」之 n 值為何？也很少嗎？
2. $f(x)$ 的完整幾何結構為何？如何分析之…
3. $f(x)$ 有哪些特殊的幾何性質、幾何特徵？



第一個提問 → 便馬上發生了「認知衝突」！

◆ 研究中，我們發現 $f(x)$ 之幾何圖形中發生「水平」之 n 值很多！

n 值似乎有規則性…

本研究，我們更想進一步探討：

$$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$$

- $f(x)$ 到底在什麼條件下，其幾何圖形才會有「水平」幾何特徵？
- $f(x)$ 之幾何全貌為何？
- 如何解析 $f(x)$ 之幾何特徵？
- 如何論證幾何性質嗎？可以一般化嗎？


獨立研究認識與態度
研究法介紹
資料收集與篩選
討論研究題目
確定研究題目
搜尋相關資料
以幾何法研究問題
發現規律
以代數法分析論證性質
論證與推廣
紀錄及分析
討論結論
撰寫「作品說明書」
檢討及修正
「作品說明書」

B. 研究問題：

$$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$$

1. 當 $\boldsymbol{n}$ = ？時 $\Rightarrow \boldsymbol{f(x)}$ 也會有「水平」的幾何特徵？
2. 當 $\boldsymbol{x}$ = ？時 $\Rightarrow \boldsymbol{f(x)}$ 有「水平」的幾何特徵？
3. 如何論證，$\boldsymbol{f(x)}$ 沒有「水平」的幾何特徵？
4. $\boldsymbol{f(x)}$ 有「水平」的幾何特徵之 $\boldsymbol{n}$ 值，可以一般化嗎？
5. $\boldsymbol{f(x)}$ 之幾何圖形中，有哪些特殊的幾何特徵？
6. $\boldsymbol{f(x)}$ 之幾何圖形中，特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之數量為何？可以一般化嗎？

7. $f(x)$ 於特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之各頂點，會分別都落在兩條特殊的直線上面嗎？

8. 求出 $f(x)$ 之幾何結構中，發現之三條特殊的直線方程式的一般化？及頂點之一般化？

9. $f(x)$ 之幾何圖形中，兩直線上各頂點依序之三角形面積有規律嗎？

10. 探討 n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形「交點」之幾何性質為何？

11. 探討 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x-n|}{|x-(n+1)|} \text{ 與 } f(x)=\dfrac{|x+n|}{|x+(n+1)|} \text{ 之 對稱性。} \\ f(x)=\dfrac{|x-(n+1)|}{|x-n|} \text{ 與 } f(x)=\dfrac{|x+(n+1)|}{|x+n|} \text{ 之 對稱性。} \end{cases}$

（二）幾何特徵：

$$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$$

有下列各幾何特徵：

- 「滑梯、水平、鋸齒」
- 「第一條直線、第二條直線」

將於「資料分析」中，逐一定義之。

◆ 研究 1：當 $n=$？ $\Rightarrow f(x)$ 也會有「水平」的幾何特徵？

Sol：

✧ 根據之前的獨立研究作品中，所得到的結論如下：

$f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+n|x-n|$ 中，

$\boxed{n=\{3、20、119、696、4059、23660、137903、803760\cdots\}}$

$\Rightarrow f(x)$ 才有水平之幾何特徵！

➤ 本研究之

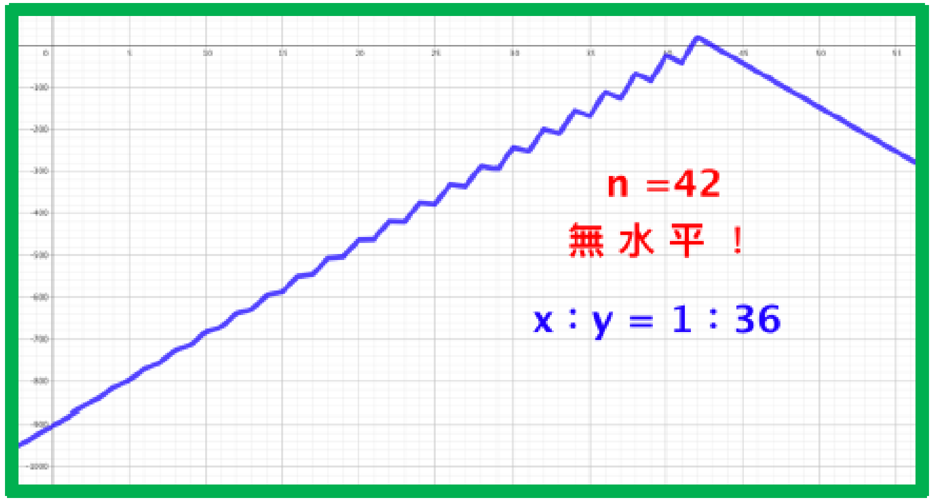
$$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$$

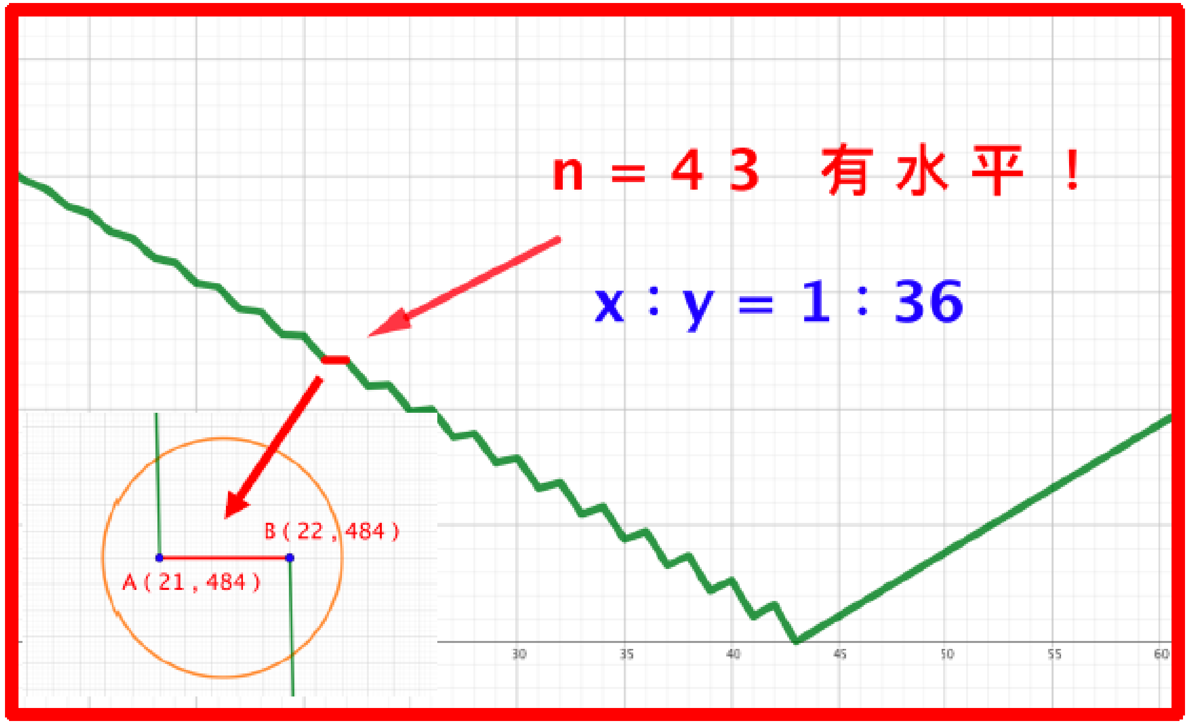
當 $n=$？時，$f(x)$ 也會有「水平」的幾何特徵？

猜測1：

$f(x)$ 有「水平」幾何特徵之 n 值，有規則嗎？也是少數嗎？

➢ 幾何圖形分析：GGB 軟體程式



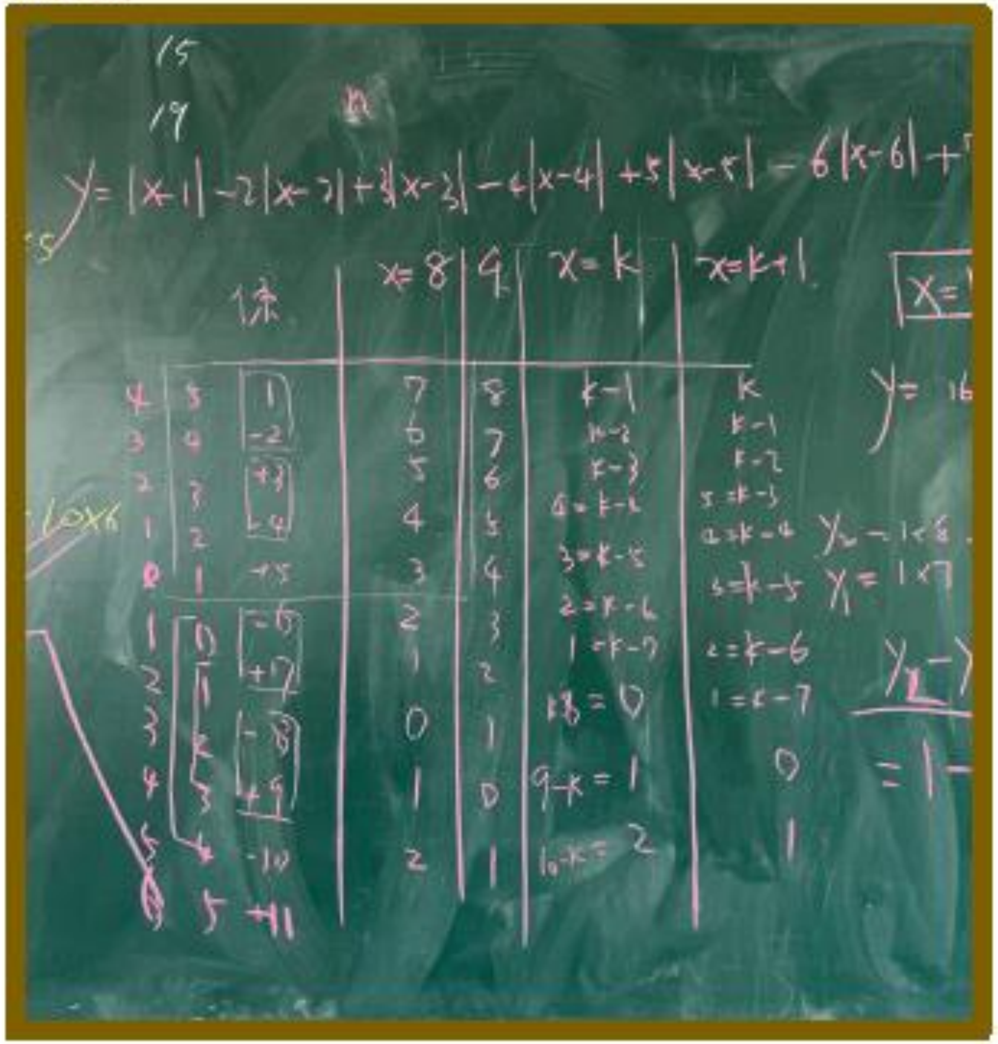


➢ 代數分析：研究方法利用 Excel 程式。

n = 51

有水平！

第1條直線					第2條直線			
25x+y=1326				交點	26x+y=1326			
x	y	檢驗		(0,1326)	x	y		檢驗
50	76	1326	76		51	0	-76	1326
48	126	1326	74		49	52	-74	1326
46	176	1326	72		47	104	-72	1326
44	226	1326	70		45	156	-70	1326
42	276	1326	68		43	208	-68	1326
40	326	1326	66		41	260	-66	1326
38	376	1326	64		39	312	-64	1326
36	426	1326	62		37	364	-62	1326
34	476	1326	60		35	416	-60	1326
32	526	1326	58		33	468	-58	1326
30	576	1326	56		31	520	-56	1326
28	626	1326	54		29	572	-54	1326
26	676	1326	52		27	624	-52	1326
24	726	1326	50		25	676	-50	1326
22	776	1326	48		23	728	-48	1326
20	826	1326	46		21	780	-46	1326
18	876	1326	44		19	832	-44	1326
16	926	1326	42		17	884	-42	1326
14	976	1326	40		15	936	-40	1326
12	1026	1326	38		13	988	-38	1326



研究方法。

★ 認知衝突 1 ★

★ 推論 1：

$$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$$

$\Rightarrow f(x)$ 有「水平」幾何特徵之 n 值，

例如：$n=43$、44、$51\cdots$等等 $\Rightarrow$ 有很多！

（認知衝突！）

◆ 研究 2：當 $x=$ ？時 $\Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵？

Sol：

$$f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$$

▲ 觀察 1：

✓ $n=43 \Rightarrow x=21$、22（中位數）有「水平」幾何特徵！

✓ $n=48 \Rightarrow x=24$、25（中位數）有「水平」幾何特徵！

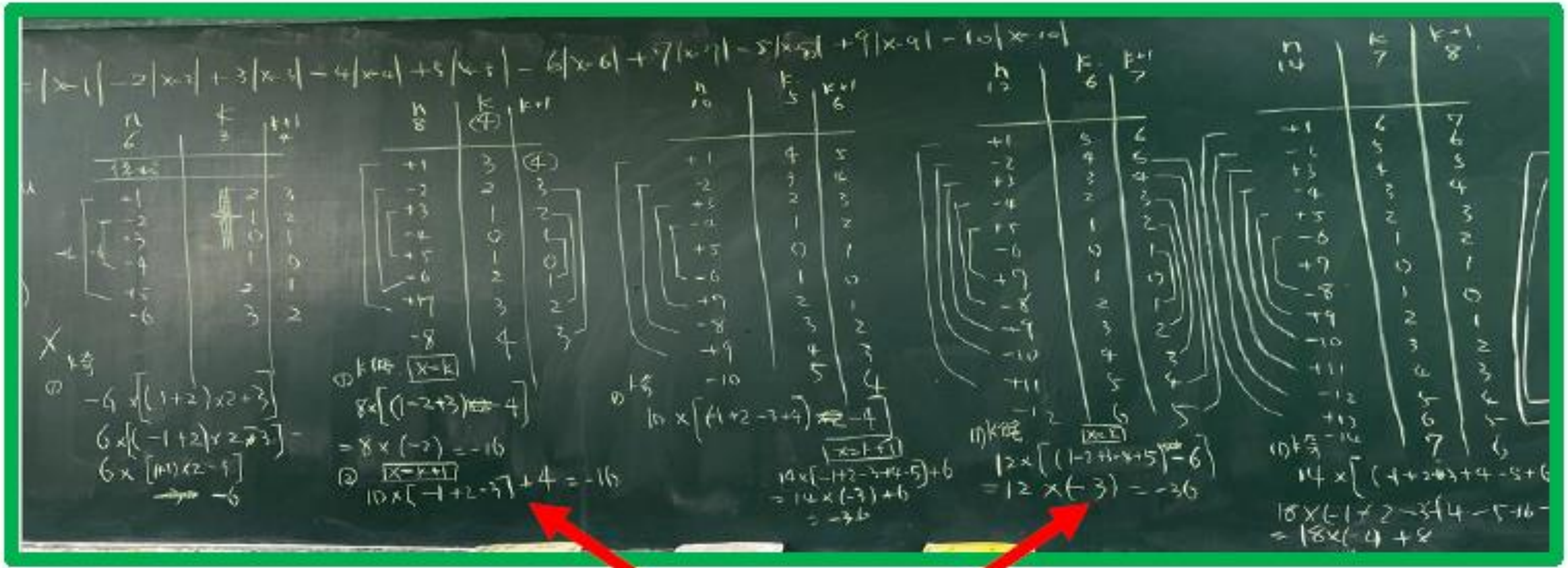
✓ $n=51 \Rightarrow x=25$、26（中位數）有「水平」幾何特徵！

☯ 猜測 2：

當 $x=n$ 之「中位數」時，$f(x)$ 有「水平」幾何特徵！

★「研究方法」★

➢ 代數分析：思考規律，以快速計算 $y_k = f(k)$ 之值。



y 值

n	x	
	k	k+1
6	3	4
1	2	3
-2	1	2
3	0	1
-4	1	0
5	2	1
-6	3	2
f(x)	-12	-5
	y1	y2

n	x	
	k	k+1
10	5	6
1	4	5
-2	3	4
3	2	3
-4	1	2
5	0	1
-6	1	0
7	2	1
-8	3	2
9	4	3
-10	5	4
f(x)	-30	-19
	y1	y2

$$y_1 = f(3) = 6 \times (-1 + 2 - 3) = -12$$

$$y_2 = f(4) = 8 \times (1 - 2) + 3 = -5$$

$$y_1 = f(5) = 10 \times (-1 + 2 - 3 + 4 - 5) = -30$$

$$y_2 = f(6) = 12 \times (1 - 2 + 3 - 4) + 5 = -19$$

$\mathrm{n} = 6 \Rightarrow x = 3\,,4 \;\Rightarrow\; y_1 \neq y_2$（非水平）

$\mathrm{n} = 10 \Rightarrow x = 5\,,6 \;\Rightarrow\; y_1 \neq y_2$（非水平）

n	x	
	k	k+1
8	4	5
1	3	4
-2	2	3
3	1	2
-4	0	1
5	1	0
-6	2	1
7	3	2
-8	4	3
f(x)	-16	-16
	y1	y2

n	x	
	k	k+1
12	6	7
1	5	6
-2	4	5
3	3	4
-4	2	3
5	1	2
-6	0	1
7	1	0
-8	2	1
9	3	2
-10	4	3
11	5	4
-12	6	5
f(x)	-36	-36
	y1	y2

$$y_1 = f(4) = 8 \times (1 - 2 + 3 - 4) = -16$$

$$y_2 = f(5) = 10 \times (-1 + 2 - 3) + 4 = -16$$

$$y_1 = f(6) = 12 \times (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6) = -36$$

$$y_2 = f(7) = 14 \times (-1 + 2 - 3 + 4 - 5) + 6 = -36$$

$n = 8 \Rightarrow x = 4 , 5 \Rightarrow y_1 = y_2$ （水平）

$n = 12 \Rightarrow x = 6 , 7 \Rightarrow y_1 = y_2$ （水平）

★ 推論2：

n	x	
	k	k+1
2k	2u-1	2u
1	2u-2	2u-3
-2	2u-3	2u-4
3	2u-4	2u-5
⋮	⋮	⋮
2u-3	2	3
-(2u-2)	1	2
2u-1	0	1
-2u	1	0
2u+1	2	1
-(2u+2)	3	2
⋮	⋮	⋮
4u-1	2u-2	2u-3
-(4u-2)	2u-1	2u-2
f(x)	$-4u^2+2u$	$-4u^2+6u-1$
	y1	y2

4u-2

4u

- $y_1 = f(2u-1) = n \times \left(-1+2-3+4+\cdots-(2u-1)\right)$

$$= (4u-2)\cdot[(u-1)-(2u-1)] = (4u-2)\cdot(-u)$$

$$= -4u^2+2u$$

- $y_2 = f(2u)$

$$= (n+2)\times[1-2+3-4+\cdots+(2u-2)]+(2u-1)$$

$$= (4u)\cdot[-(u-1)]+(2u-1)$$

$$= -4u^2+6u-1$$

$n = 2k = 4u-2$

$\Rightarrow x = 2u-1\,,2u \;\Rightarrow\; y_1 \neq y_2$ （非水平！）

n	x	
	k	k+1
2k	2u	2u+1
1	2u-1	2u
-2	2u-2	2u-1
3	2u-3	2u-2
⋮	⋮	⋮
-(2u-2)	2	3
2u-1	1	2
-2u	0	1
2u+1	1	0
-(2u+2)	2	1
2u+3	3	2
⋮	⋮	⋮
4u-1	2u-1	2u-2
-4u	2u	2u-1
f(x)	$-4u^2$	$-4u^2$
	y1	y2

4u

4u+2

- $y_1 = f(2u) = n \times (1-2+3-4+\cdots+(2u-1)-2u)$

$$= 4u\cdot(-u) = -4u^2$$

- $y_2 = f(2u+1)$

$$= (n+2)\times[-1+2-3+4+\cdots-(2u-1)]+2u$$

$$= (4u+2)\cdot\left(u-1-(2u-1)\right)+2u$$

$$= (4u+2)\cdot(-u)+2u = -4u^2$$

$n = 2k = 4u$

$\Rightarrow x = 2u\,,2u+1 \;\Rightarrow\; y_1 = y_2$ （水 平！）

◆ 研究 3：如何論證，$f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵？

☼☼ 創意想法 ☼☼

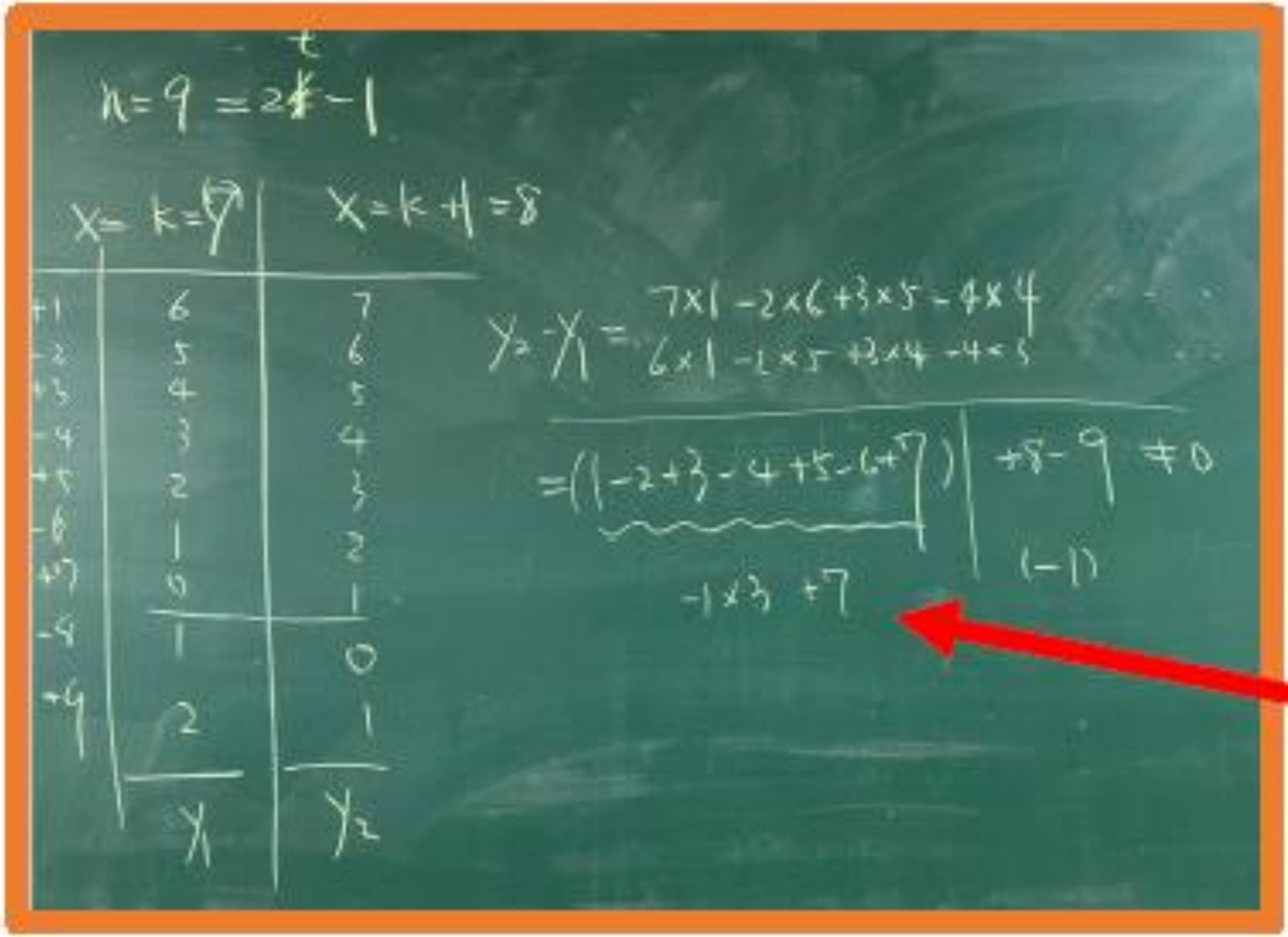
✧ 欲論證 $f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵$\Rightarrow$ $y_k = f(k)$ 計算量龐大！

✧ 點子：

欲論證 $f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！

$\Rightarrow$ 只需論證 $y_2 \neq y_1 \Rightarrow \; y_2 - y_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！


n=9 = 2k−1
x = k = 7
x = k+1 = 8
y2 − y1 = 7×1 −2×6 +3×5 −4×4
6×1 −2×5 +3×4 −4×5
=(1−2+3−4+5−6+7)
+8−9 ≠ 0
(−1)
−1×3 +7
y1
y2

創意想法！

◆ 研究 4：$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵之 n 值，可以一般化嗎？

▲ 觀察 2：

➢ 代數分析：運用 GGB 軟體及 Excel 計算各 n 值並觀察之。

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	X	○	○	X	X	○	○	X	X
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
○	○	X	X	○	○	X	X	○	○

○：水平。　　　　╳：無水平。

猜測3：

$f(x)$ 有「水平」幾何特徵之 n 值

$\Rightarrow$ 似乎與「4的倍數」有關。

1. $n = (4u+1) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！
2. $n = (4u+2) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！
3. $n = (4u+3)$

   $\Rightarrow (2u+1) \leq x \leq (2u+2)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！
4. $n = (4u+4)$

   $\Rightarrow (2u+2) \leq x \leq (2u+3)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

➢ 代數分析：研究方法！

① $n = 4u + 1 \implies$ 論證 $f(x)$ 無「水平」幾何特徵！

n	x		
4u+1	2k	2k+1	2k+2
1	2k-1	2k	2k+1
-2	2k-2	2k-1	2k
3	2k-3	2k-2	2k-1
⋮	⋮	⋮	⋮
2k-3	3	4	5
-(2k-2)	2	3	4
2k-1	1	2	3
-2k	0	1	2
2k+1	1	0	1
-(2k+2)	2	1	0
2k+3	3	2	1
-(2k+4)	4	3	2
2k+5	5	4	3
⋮	⋮	⋮	⋮
-4u	4u-2k	4u-2k-1	4u-2k-2
(4u+1)	4u-2k+1	4u-2k	4u-2k-1
f(x)	y1	y2	y3
	-2u-2k-1		-2u+2k+1
	y2 ≠ y1		y3 ≠ y2

$$y_2 = 1\cdot(2k) - 2\cdot(2k-1) + 3\cdot(2k-2) - 4\cdot(2k-3) + \cdots - 2k\cdot 1 + (2k+1)\cdot 0 - (2k+2)\cdot 1 + (2k+3)\cdot 2 - (2k+4)\cdot 3 + \cdots - (4u)\cdot(4u-2k-1) + (4u+1)\cdot(4u-2k)$$

$$y_1 = 1\cdot(2k-1) - 2\cdot(2k-2) + 3\cdot(2k-3) - 4\cdot(2k-4) + \cdots - 2k\cdot 0 + (2k+1)\cdot 1 - (2k+2)\cdot 2 + (2k+3)\cdot 3 - (2k+4)\cdot 4 + \cdots - (4u)\cdot(4u-2k) + (4u+1)\cdot(4u-2k+1)$$

$$\implies \boldsymbol{y_2 - y_1 = (1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 2k) + [-(2k+1) + (2k+2) - (2k+3) + \cdots + (4u) - (4u+1)]}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2k}{2}\cdot(-1) + \frac{4u-2k}{2}\cdot 1 - (4u+1) = -k + (2u-k) - (4u+1) = -2u - 2k - 1 = 2\cdot(-u-k) - 1 = \text{偶數} - \text{奇數} \neq 0 \implies \text{無水平！}}$$

$$y_3 = 1\cdot(2k+1) - 2\cdot(2k) + 3\cdot(2k-1) - 4\cdot(2k-2) + \cdots - 2k\cdot 2 + (2k+1)\cdot 1 - (2k+2)\cdot 0 + (2k+3)\cdot 1 - (2k+4)\cdot 2 + \cdots - (4u)\cdot(4u-2k-2) + (4u+1)\cdot(4u-2k-1)$$

$$y_2 = 1\cdot(2k) - 2\cdot(2k-1) + 3\cdot(2k-2) - 4\cdot(2k-3) + \cdots - 2k\cdot 1 + (2k+1)\cdot 0 - (2k+2)\cdot 1 + (2k+3)\cdot 2 - (2k+4)\cdot 3 + \cdots - (4u)\cdot(4u-2k-1) + (4u+1)\cdot(4u-2k)$$

$$\implies \boldsymbol{y_3 - y_2 = (1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 2k) + (2k+1) + (2k+2) + [-(2k+1) + (2k+2) - (2k+3) + \cdots + (4u) - (4u+1)]}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2k}{2}\cdot(-1) + (2k+1) + (2k+2) + \frac{4u-2k-2}{2}\cdot 1 - (4u+1) = -k + (2k+1) + (2k+2) + (2u-k-1) - (4u+1)}$$

$$\boldsymbol{= -2u + 2k + 1 = 2\cdot(-u+k) + 1 = \text{偶數} + \text{奇數} \neq 0 \implies \text{無水平！}}$$

➢ 代數分析：研究方法！

② $n=4u+2 \Longrightarrow$ 論證 $f(x)$ 無「水平」幾何特徵！

n	x		
4u+2	2k-1	2k	2k+1
1	2k-2	2k-1	2k
-2	2k-3	2k-2	2k-1
3	2k-4	2k-3	2k-2
⋮	⋮	⋮	⋮
2k-3	2	3	4
-(2k-2)	1	2	3
2k-1	0	1	2
-2k	1	0	1
2k+1	2	1	0
-(2k+2)	3	2	1
2k+3	4	3	2
-(2k+4)	5	4	3
2k+5	6	5	4
⋮	⋮	⋮	⋮
4u+1	4u-2k+2	4u-2k+1	4u-2k
-(4u+2)	4u-2k+3	4u-2k+2	4u-2k+1
f(x)	y1	y2	y3
	2u+2k+1		2u-2k+1
	y2 ≠ y1		y3 ≠ y2

$$y_2=1\cdot(2k-1)-2\cdot(2k-2)+3\cdot(2k-3)-4\cdot(2k-4)+\cdots+(2k-1)\cdot1-(2k)\cdot0+(2k+1)\cdot1-(2k+2)\cdot2+(2k+3)\cdot3+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k+1)-(4u+2)\cdot(4u-2k+2)$$

$$y_1=1\cdot(2k-2)-2\cdot(2k-3)+3\cdot(2k-4)-4\cdot(2k-5)+\cdots+(2k-1)\cdot0-(2k)\cdot1+(2k+1)\cdot2-(2k+2)\cdot3+(2k+3)\cdot4+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k+2)-(4u+2)\cdot(4u-2k+3)$$

$$\Longrightarrow y_2-y_1=[1-2+3-4+\cdots+(2k-1)]+[(2k)-(2k+1)+(2k+2)-(2k+3)+\cdots-(4u+1)+(4u+2)]$$

$$=\frac{2k-2}{2}\cdot(-1)+(2k-1)+(2k)+\frac{4u-2k+2}{2}\cdot1=(-k+1)+(2k-1)+(2k)+(2u-k+1)=2u+2k+1=2\cdot(u+k)+1=\text{偶數}+\text{奇數}\neq0\Longrightarrow\text{無水平！}$$

$$y_3=1\cdot(2k)-2\cdot(2k-1)+3\cdot(2k-2)-4\cdot(2k-3)+\cdots+(2k-1)\cdot2-(2k)\cdot1+(2k+1)\cdot0-(2k+2)\cdot1+(2k+3)\cdot2+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k)-(4u+2)\cdot(4u-2k+1)$$

$$y_2=1\cdot(2k-1)-2\cdot(2k-2)+3\cdot(2k-3)-4\cdot(2k-4)+\cdots+(2k-1)\cdot1-(2k)\cdot0+(2k+1)\cdot1-(2k+2)\cdot2+(2k+3)\cdot3+\cdots+(4u+1)\cdot(4u-2k+1)-(4u+2)\cdot(4u-2k+2)$$

$$\Longrightarrow y_3-y_2=(1-2+3-4+\cdots-2k)+[-(2k+1)+(2k+2)-(2k+3)+\cdots-(4u+1)+(4u+2)]$$

$$=\frac{2k}{2}\cdot(-1)+\frac{4u-2k+2}{2}\cdot1=-k+(2u-k+1)=2u-2k+1=2\cdot(u-k)+1=\text{偶數}+\text{奇數}\neq0\Longrightarrow\text{無水平！}$$

➢ 代數分析：研究方法！

③ $n = 4u + 3 \Longrightarrow$ 論證 $f(x)$ 於 $(2u+1) \le x$（中位數）$\le (2u+2)$ 時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

④ $n = 4u + 4 \Longrightarrow$ 論證 $f(x)$ 於 $(2u+2) \le x$（中位數）$\le (2u+3)$ 時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

③

$$y_2 = 1\cdot(2k+1) - 2\cdot(2k) + 3\cdot(2k-1) - 4\cdot(2k-2) + \cdots + (2k+1)\cdot 1 - (2k+2)\cdot 0 + (2k+3)\cdot 1 - (2k+4)\cdot 2 + \cdots - (4u+2)\cdot(4u-2k) + (4u+3)\cdot(4u-2k+1)$$

$$y_1 = 1\cdot(2k) - 2\cdot(2k-1) + 3\cdot(2k-2) - 4\cdot(2k-3) + \cdots + (2k+1)\cdot 0 - (2k+2)\cdot 1 + (2k+3)\cdot 2 - (2k+4)\cdot 3 + \cdots - (4u+2)\cdot(4u-2k+1) + (4u+3)\cdot(4u-2k+2)$$

$$\Longrightarrow y_2 - y_1 = [1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (2k+1)] + [(2k+2) - (2k+3) + \cdots + (4u+2) - (4u+3)]$$

$$= \frac{2k}{2}\cdot(-1) + (2k+1) + (2k+2) + \frac{4u-2k}{2}\cdot 1 - (4u+3) = -k + (2k+1) + (2k+2) + (2u-k) - (4u+3) = -2u + 2k$$

Then $n = 4u + 3 \Longrightarrow$ 當「$k = u$」$\Longrightarrow y_2 - y_1 = 0 \Longrightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

④

$$y_2 = 1\cdot(2k+2) - 2\cdot(2k+1) + 3\cdot(2k) - 4\cdot(2k-1) + \cdots - (2k+2)\cdot 1 + (2k+3)\cdot 0 - (2k+4)\cdot 1 + \cdots + (4u+3)\cdot(4u-2k) - (4u+4)\cdot(4u-2k+1)$$

$$y_1 = 1\cdot(2k+1) - 2\cdot(2k) + 3\cdot(2k-1) - 4\cdot(2k-2) + \cdots - (2k+2)\cdot 0 + (2k+3)\cdot 1 - (2k+4)\cdot 2 + \cdots + (4u+3)\cdot(4u-2k+1) - (4u+4)\cdot(4u-2k+2)$$

$$\Longrightarrow y_3 - y_2 = [1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (2k+2)] + [-(2k+3) + (2k+4) + \cdots - (4u+3) + (4u+4)]$$

$$= \frac{2k+2}{2}\cdot(-1) + \frac{4u-2k+2}{2}\cdot 1 = -(k+1) + (2u-k+1) = 2u - 2k$$

Then $n = 4u + 4 \Longrightarrow$ 當「$k = u$」$\Longrightarrow y_2 - y_1 = 0 \Longrightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

★定義 1：

$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$

1. 若 $x_2 = i+1$、$x_1 = i \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1 = 0$,$\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

2. 若 $x_2 = i+1$、$x_1 = i \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1 \neq 0$,$\forall k \in \mathbb{N}$

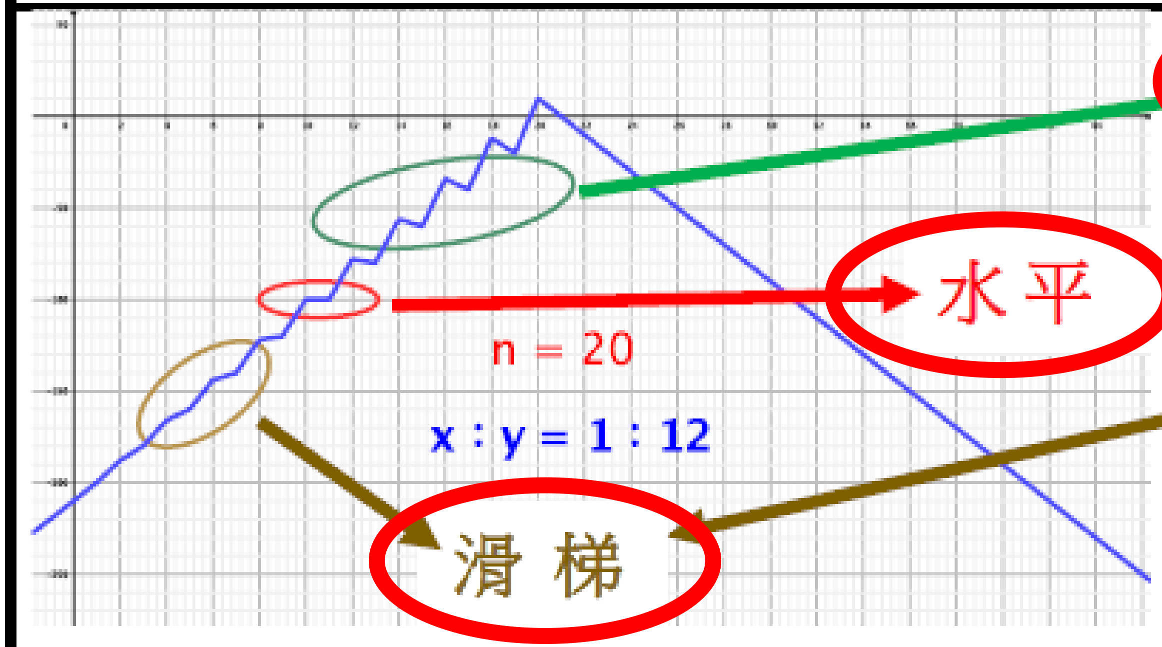
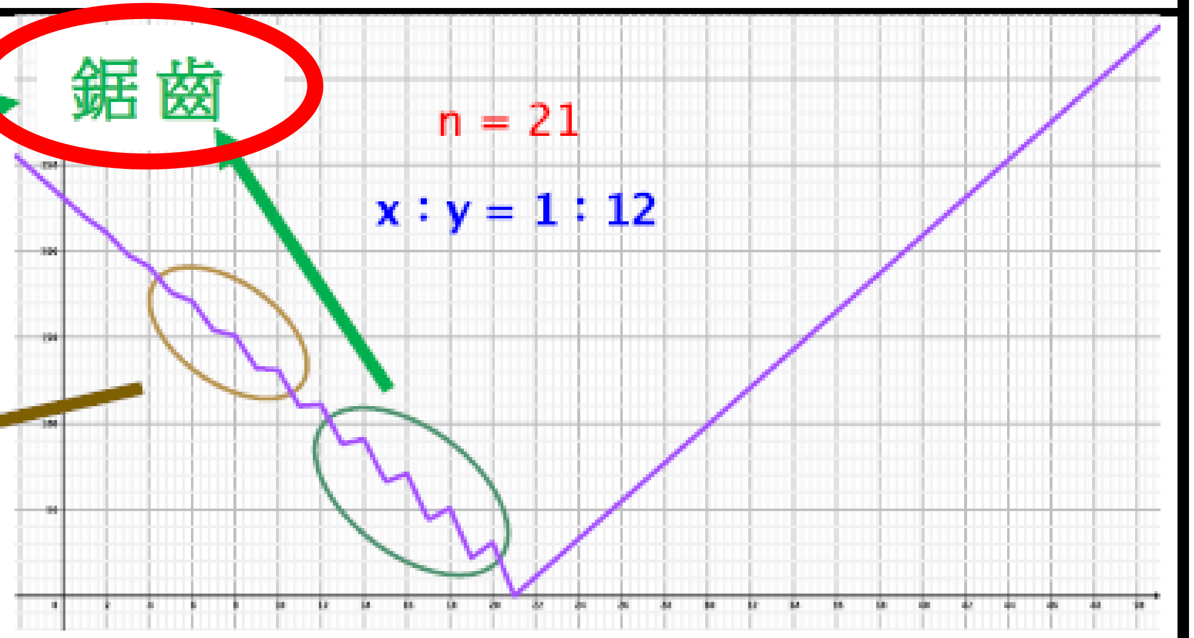
$\Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！

★ 推論 3：

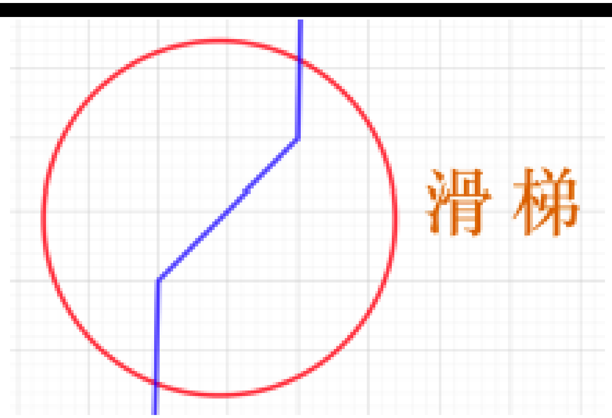
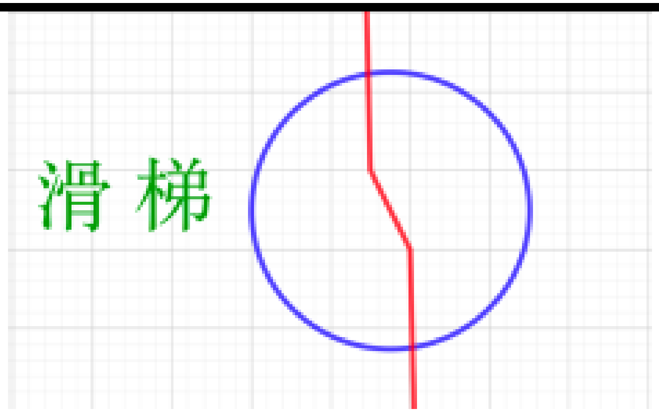
1. n = $(4u+1) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！
2. n = $(4u+2) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵 ！
3. n = $(4u+3) \Rightarrow (2u+1) \leq x \leq (2u+2)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵 ！
4. n = $(4u+4) \Rightarrow (2u+2) \leq x \leq (2u+3)$時，$f(x)$ 有「水平」的幾何特徵 ！

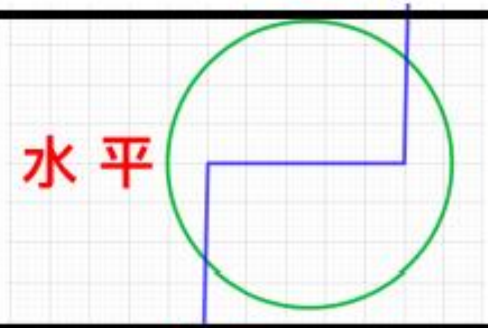
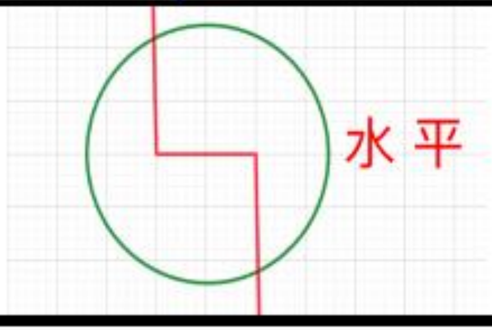
◆ 研究 5：$f(x)$ 之幾何圖形中，有哪些特殊的幾何特徵？

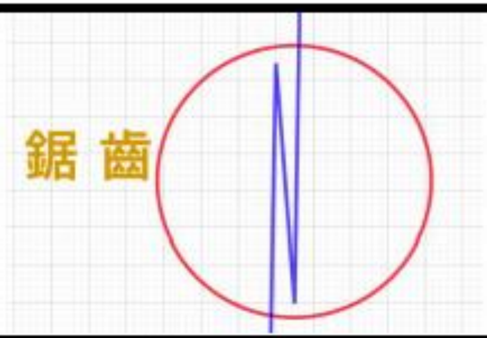
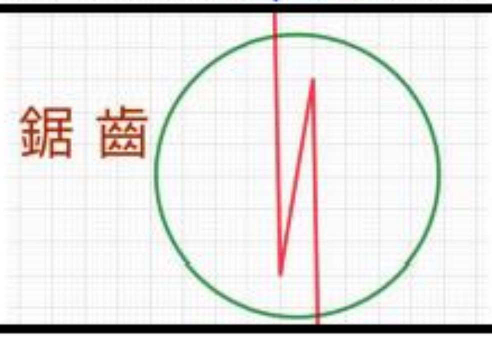
Sol：（一）全貌幾何圖形

$f(x)=\lvert x-1\rvert-2\lvert x-2\rvert+3\lvert x-3\rvert+\cdots+19\cdot\lvert x-19\rvert-20\cdot\lvert x-20\rvert$	$f(x)=\lvert x-1\rvert-2\lvert x-2\rvert+3\lvert x-3\rvert+\cdots-20\cdot\lvert x-20\rvert+21\cdot\lvert x-21\rvert$
	

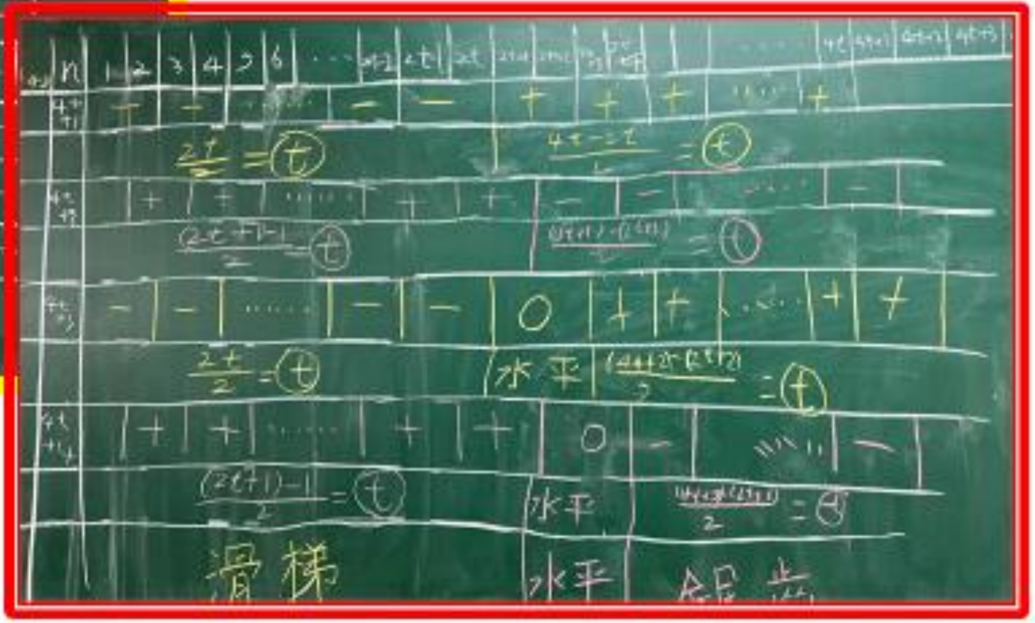
✧ 定義： 1、滑梯 2、水平 3、鋸齒

n=2k （朝下）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1>0$ $\forall i \in \mathbb{N}，i<n$	
n=2k+1 （朝上）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1<0$ $\forall i \in \mathbb{N}，i<n$	

n=2k （朝下）	$f(k+1)-f(k)=y_2-y_1=0$ $k \in \mathbb{N}$	
n=2k+1 （朝上）	$f(k+1)-f(k)=y_2-y_1=0$ $k \in \mathbb{N}$	

n=2k （朝下）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1<0$ $\forall\, i \in \mathbb{N}，i<n$	
n=2k+1 （朝上）	$f(i+1)-f(i)=y_2-y_1>0$ $\forall\, i \in \mathbb{N}，i<n$	

◆ 研究 6： $f(x)$ 之幾何圖形中，特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之數量為何？可以一般化嗎？



✧ 思考1：「滑梯、水平、鋸齒」之數量與一般化

$$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$$

➢ 由「滑梯、水平、鋸齒」之定義

$\Rightarrow$ 檢驗 $f(i+1) - f(i) = y_2 - y_1$ 之「值」，為 正、0、負

$\Rightarrow$ 即可判斷 $f(x)$ 於此處之幾何特徵為「滑梯、水平、鋸齒」。

$\Rightarrow$ 即可計算出 $f(x)$ 各幾何特徵之數量以及一般化 ！

★ 推論 4：

<table>
<tr><th>n</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>…</th><th>…</th><th>2u-3</th><th>2u-2</th><th>2u-1</th><th>2u</th><th>2u+1</th><th>2u+2</th><th>2u+3</th><th>2u+4</th><th>…</th><th>…</th><th>4u-3</th><th>4u-2</th><th>4u-1</th><th>4u</th><th>4u+1</th><th>4u+2</th><th>4u+3</th><th>4u+4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4u+1</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="12">$\frac{2u}{2}=u$ 個 滑 梯</td><td colspan="10">$\frac{4u-2u}{2}=u$ 個 鋸 齒</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>n</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>…</th><th>…</th><th>2u-3</th><th>2u-2</th><th>2u-1</th><th>2u</th><th>2u+1</th><th>2u+2</th><th>2u+3</th><th>2u+4</th><th>…</th><th>…</th><th>4u-3</th><th>4u-2</th><th>4u-1</th><th>4u</th><th>4u+1</th><th>4u+2</th><th>4u+3</th><th>4u+4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4u+2</td><td></td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="12">$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個 滑 梯</td><td colspan="10">$\frac{(4u+1)-(2u+1)}{2}=u$ 個 鋸 齒</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>n</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>…</th><th>…</th><th>2u-3</th><th>2u-2</th><th>2u-1</th><th>2u</th><th>2u+1</th><th>2u+2</th><th>2u+3</th><th>2u+4</th><th>…</th><th>…</th><th>4u-3</th><th>4u-2</th><th>4u-1</th><th>4u</th><th>4u+1</th><th>4u+2</th><th>4u+3</th><th>4u+4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4u+3</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2" rowspan="2">水平</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="12">$\frac{2u}{2}=u$ 個 滑 梯</td><td colspan="10">$\frac{(4u+2)-(2u+2)}{2}=u$ 個 鋸 齒</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>n</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>…</th><th>…</th><th>2u-3</th><th>2u-2</th><th>2u-1</th><th>2u</th><th>2u+1</th><th>2u+2</th><th>2u+3</th><th>2u+4</th><th>…</th><th>…</th><th>4u-3</th><th>4u-2</th><th>4u-1</th><th>4u</th><th>4u+1</th><th>4u+2</th><th>4u+3</th><th>4u+4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4u+4</td><td></td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2" rowspan="2">水平</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">⋯</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="12">$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個 滑 梯</td><td colspan="10">$\frac{(4u+3)-(2u+3)}{2}=u$ 個 鋸 齒</td><td></td></tr>
</table>

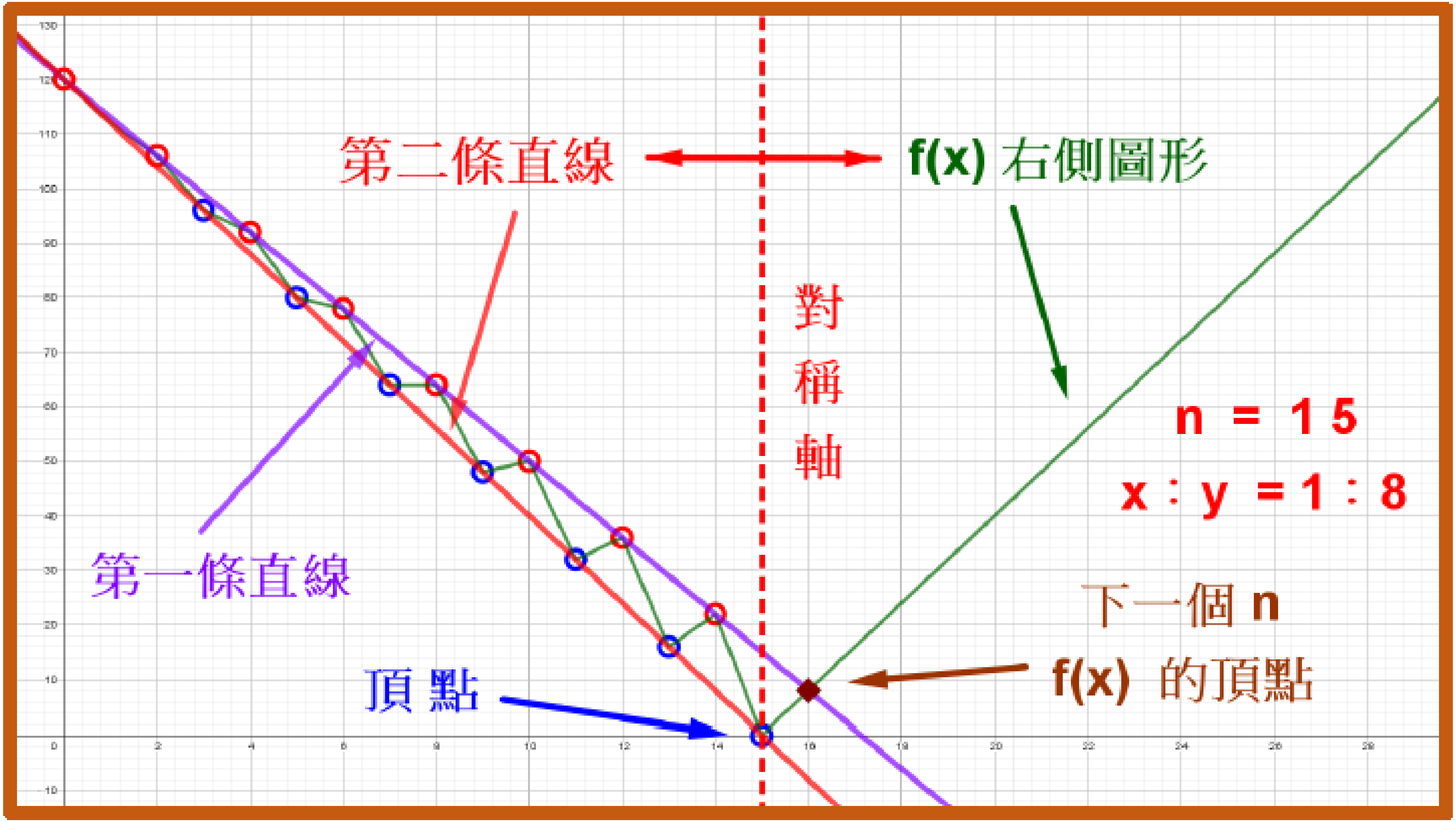
◆ 研究 7： $f(x)$ 於特殊的幾何特徵(滑梯、水平、鋸齒)之各項點，會分別都落在兩條特殊的直線上面嗎？

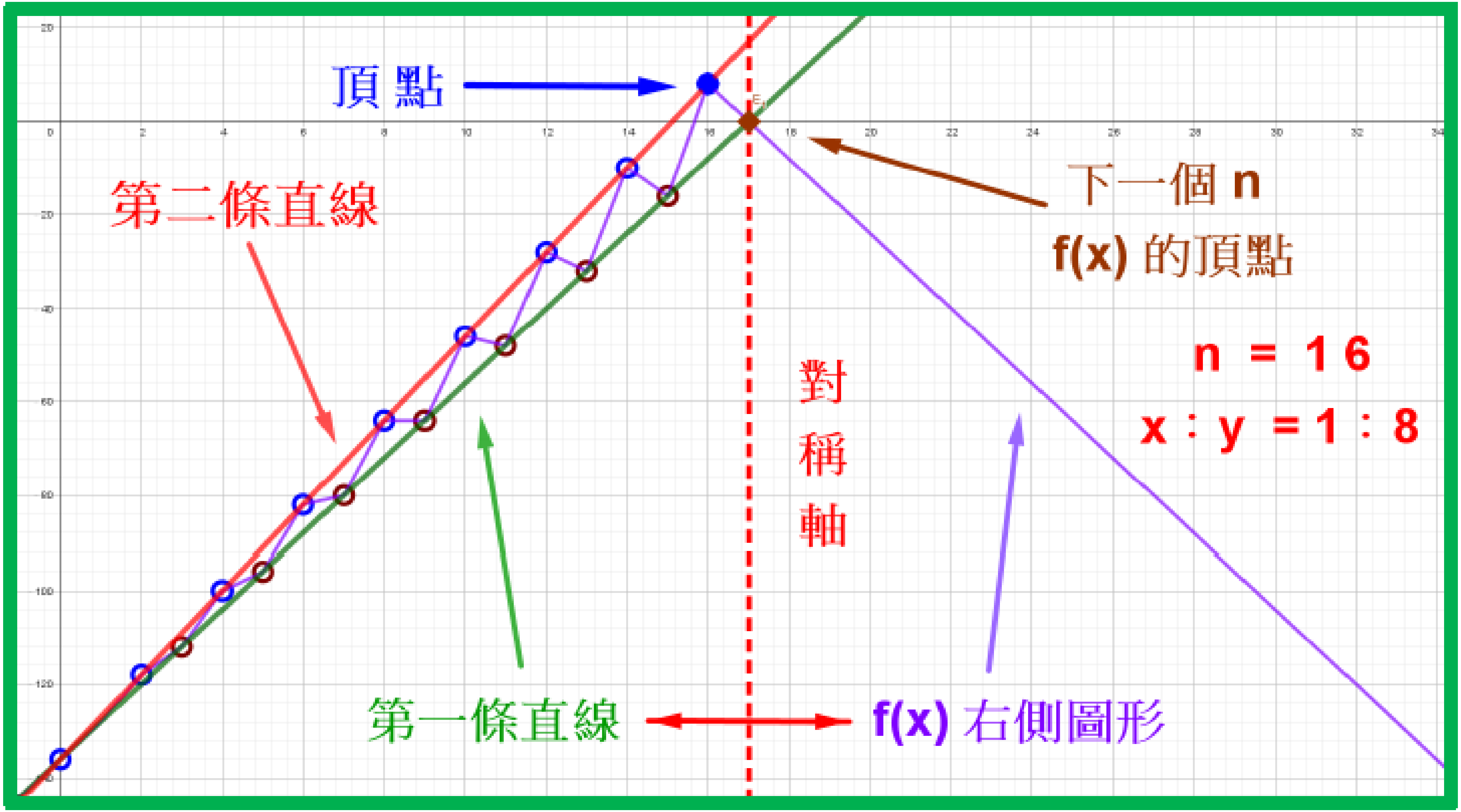
☼☼ 意外發現 1 ☼☼

本幾何圖形研究中，於計算「滑梯、鋸齒」數量時，意外發現

$f(x)$ 「滑梯、水平、鋸齒」之各項點

$\Rightarrow$ 會分別都落在兩條特殊的直線上面！


第二條直線
f(x) 右側圖形
對稱軸
n = 15
x : y = 1 : 8
第一條直線
下一個 n
f(x) 的頂點
頂 點



頂點
第二條直線
下一個 n
f(x) 的頂點
n = 16
x : y = 1 : 8
對稱軸
第一條直線
f(x) 右側圖形

n	頂點座標	極值	水平	滑梯(左邊)	鋸齒(右邊)	方向	第一條直線	第二條直線	兩直線交點	圖形另一半(對稱直線)	對稱圖形交點	軸
40	(40,20)	M	1	9	9	下	20x-y=820	21x-y=820	(0,-820)	20x+y=820	(41,0)	x=41
41	(41, 0)	m	0	10	10	上	20x+y=861	21x+y=861	(0,861)	21x-y=861	(41,0)	x=41
42	(42,21)	M	0	10	10	下	21x-y=903	22x-y=903	(0,-903)	21x+y=903	(43,0)	x=43
43	(43, 0)	m	1	10	10	上	21x+y=946	22x+y=946	(0,946)	22x-y=946	(43,0)	x=43
44	(44,22)	M	1	10	10	下	22x-y=990	23x-y=990	(0,-990)	22x+y=990	(45,0)	x=45
45	(45, 0)	m	0	11	11	上	22x+y=1035	23x+y=1035	(0,1035)	23x-y=1035	(45,0)	x=45
46	(46,23)	M	0	11	11	下	23x-y=1081	24x-y=1081	(0,-1081)	23x+y=1081	(47,0)	x=47
47	(47, 0)	m	1	11	11	上	23x+y=1128	24x+y=1128	(0,1128)	24x-y=1128	(47,0)	x=47
48	(48,24)	M	1	11	11	下	24x-y=1176	25x-y=1176	(0,-1176)	24x+y=1176	(49,0)	x=49
49	(49, 0)	m	0	12	12	上	24x+y=1225	25x+y=1225	(0,1225)	25x-y=1225	(49,0)	x=49
50	(50,25)	M	0	12	12	下	25x-y=1275	26x-y=1275	(0,-1275)	25x+y=1275	(51,0)	x=51
51	(51, 0)	m	1	12	12	上	25x+y=1326	26x+y=1326	(0,1326)	26x-y=1326	(51,0)	x=51
52	(52,26)	M	1	12	12	下	26x-y=1378	27x-y=1378	(0,-1378)	26x+y=1378	(53,0)	x=53
53	(53, 0)	m	0	13	13	上	26x+y=1431	27x+y=1431	(0,1431)	27x-y=1431	(53,0)	x=53

◆ 研究 8：求出 $f(x)$ 之幾何結構中，發現之三條特殊的直線方程式的一般化？及頂點之一般化？

➢ 代數分析：

① $n=2k \Rightarrow$ 推論 L_1（第一條直線）

Sol：

設 L_1： $y=mx+a$，過兩點

P $(2k-1, s)$、Q $(2k-3, t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} s=(2k-1)\cdot m+a \\ t=(2k-3)\cdot m+a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m=(s-t) \quad \Rightarrow m=\frac{(s-t)}{2}$$

$$\Rightarrow a=s-(2k-1)\cdot\frac{(s-t)}{2}$$

n	x			
2k	2k-3	2k-2	2k-1	2k
1	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
-2	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
3	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
-4	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
5	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
-6	2k-9	2k-8	2k-7	2k-6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	1	2	3	4
2k-3	0	1	2	3
-(2k-2)	1	0	1	2
2k-1	2	1	0	1
-2k	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{(s-t)}{2} = k \\ a = (-2k) - (2k-1) \times \dfrac{2k}{2} = -2k^2 - k \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_1 : kx - y = 2k^2 + k}$$

兩對稱直線之交點 $(2k+1,0) \Leftarrow \boxed{L_3(\text{對稱}) : kx + y = 2k^2 + k}$

➢ 代數分析：

② $n = 2k \Longrightarrow$ 推論 L_2（第二條直線）

Sol：

設 L_2： $y = mx + b$ ，過兩點

R（2k ,β）、S（$2k - 2$,α）

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = (2k)\cdot m + b \\ \alpha = (2k-2)\cdot m + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m = (\beta - \alpha) \Rightarrow m = \frac{(\beta-\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow b = \beta - (2k)\cdot\frac{(\beta-\alpha)}{2}$$

n	x			
2k	2k-3	2k-2	2k-1	2k
1	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
-2	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
3	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
-4	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
5	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
-6	2k-9	2k-8	2k-7	2k-6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	1	2	3	4
2k-3	0	1	2	3
-(2k-2)	1	0	1	2
2k-1	2	1	0	1
-2k	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{(\beta - \alpha)}{2} = k + 1 \\ b = k - (2k) \times \dfrac{2k+2}{2} = -2k^2 - k \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_2 : (k+1)x - y = 2k^2 + k}$$

➢ 代數分析：

③ $n=2k+1 \Rightarrow$ 推論 L_1（第一條直線）

Sol：

設 L_1： $y=mx+c$ ，過兩點

$P(2k-2, t)$、$Q(2k, s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} s=(2k)\cdot m+c \\ t=(2k-2)\cdot m+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m=(s-t) \Rightarrow m=\frac{(s-t)}{2}$$

$$\Rightarrow c=s-(2k)\cdot\frac{(s-t)}{2}$$

n	x			
2k+1	2k-2	2k-1	2k	2k+1
1	2k-3	2k-2	2k-1	2k
-2	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
3	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
-4	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
5	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
-6	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	2	3	4	5
2k-3	1	2	3	4
-(2k-2)	0	1	2	3
2k-1	1	0	1	2
-2k	2	1	0	1
2k+1	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{(s-t)}{2} = -k \\ c = (3k+1) - (2k) \times \dfrac{-2k}{2} = 2k^2 + 3k + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_1 : kx + y = 2k^2 + 3k + 1}$$

➤ 代數分析：

④ $n=2k+1 \Rightarrow$ 推論 L_2（第二條直線）

Sol：

設 L_2： $y=mx+c$，過兩點

$P(2k-1,\alpha)$、$Q(2k+1,\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=(2k+1)\cdot m+d \\ \alpha=(2k-1)\cdot m+d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m=(\beta-\alpha) \Rightarrow m=\frac{(\beta-\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow d=\beta-(2k+1)\cdot\frac{(\beta-\alpha)}{2}$$

n	x			
2k+1	2k-2	2k-1	2k	2k+1
1	2k-3	2k-2	2k-1	2k
-2	2k-4	2k-3	2k-2	2k-1
3	2k-5	2k-4	2k-3	2k-2
-4	2k-6	2k-5	2k-4	2k-3
5	2k-7	2k-6	2k-5	2k-4
-6	2k-8	2k-7	2k-6	2k-5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-(2k-4)	2	3	4	5
2k-3	1	2	3	4
-(2k-2)	0	1	2	3
2k-1	1	0	1	2
-2k	2	1	0	1
2k+1	3	2	1	0
y_n	t	α	s	β

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{(\beta - \alpha)}{2} = -k - 1 \\ d = 0 - (2k+1) \times \dfrac{-2k-2}{2} = 2k^2 + 3k + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{L_2 : (k+1)x + y = 2k^2 + 3k + 1}$$

兩對稱直線之交點 $(2k+1, 0) \Leftarrow \boxed{L_3(\text{對稱}) : (k+1)x - y = 2k^2 + 3k + 1}$

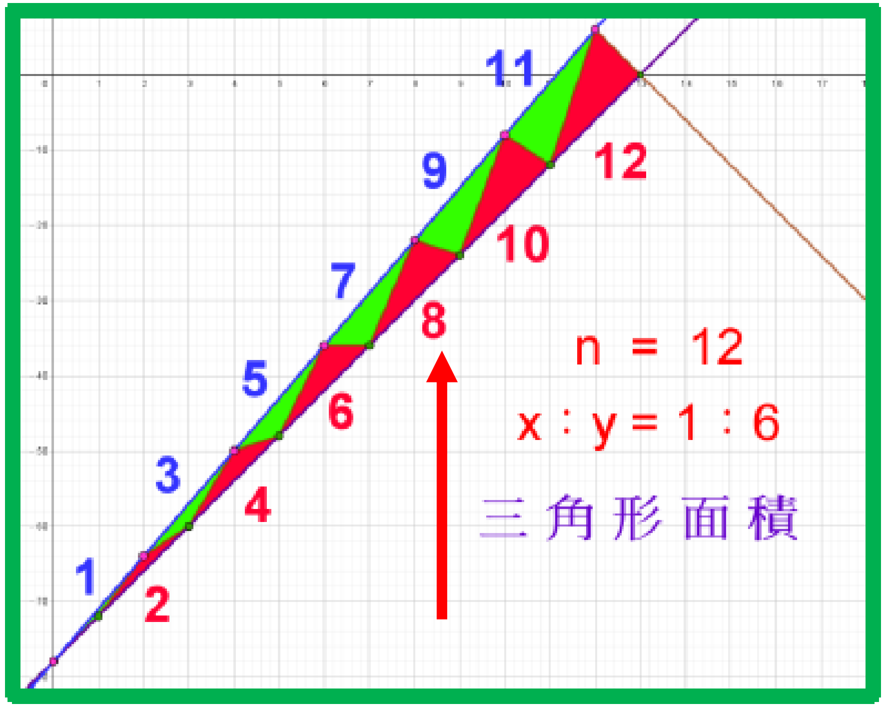
★推論5： 三條直線方程式 及 各頂點之「一般化」。

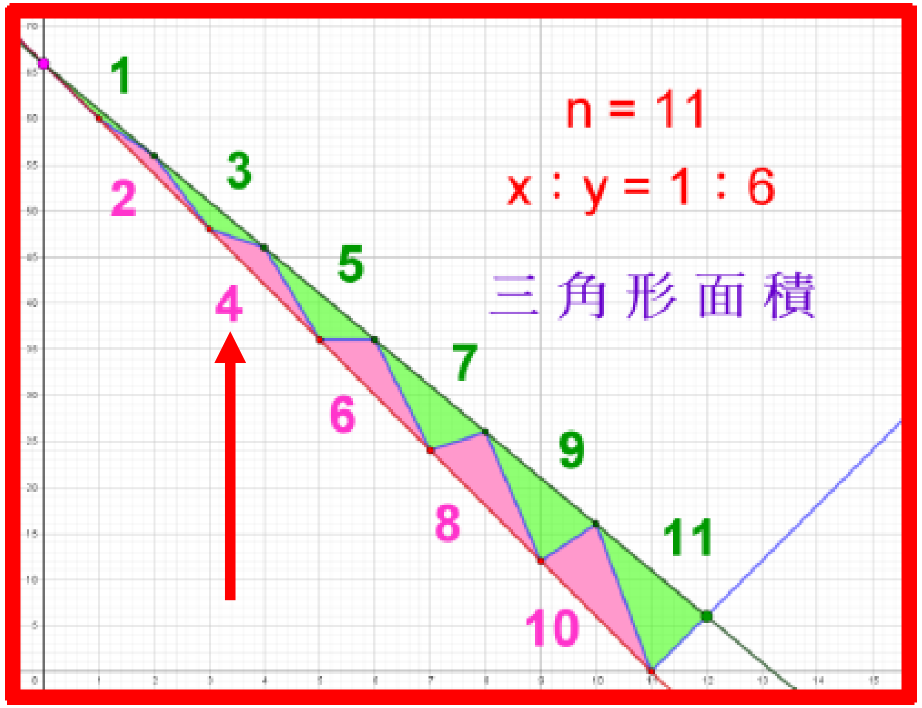
n	直線方程式	頂點	對稱	交點	軸
$2k$	$L_1: kx - y = 2k^2 + k$	$(2i-1, -2k^2 - k + (2i-1)k)$	★	$(0, -2k^2 - k)$	$x = 2k+1$
	$L_2: (k+1)x - y = 2k^2 + k$	$(2i, -2k^2 - k + (2i)(k+1))$			
	$L_3: kx + y = 2k^2 + k$		★	$(2k+1, 0)$ & L_1	
$2k+1$	$L_1: kx + y = 2k^2 + 3k + 1$	$(2i, 2k^2 + 3k + 1 - 2ki)$		$(0, 2k^2 + 3k + 1)$	
	$L_2: (k+1)x + y = 2k^2 + 3k + 1$	$(2i-1, 2k^2 + 3k + 1 - (2i-1)(k+1))$	★		
	$L_3: (k+1)x - y = 2k^2 + 3k + 1$		★	$(2k+1, 0)$ & L_2	

◆ 研究 9： $f(x)$ 之幾何圖形中，兩直線上各頂點依序之三角形面積有規律嗎？

☼☼ 意外發現 2 ☼☼

➢ 幾何分析：





利用 GGB 軟體繪製 $f(x)$ 之幾何圖形中，發現…

⟹ 兩直線上各頂點依序之「三角形面積」⟹ 為「連續整數」！

➤ 代數分析：$n=2k \Longrightarrow$ 論證 三角形面積 依序為「連續整數」！

L_1：$kx-y=2k^2+k$	L_2：$(k+1)x-y=2k^2+k$
$P_{2i+1}(\,2i+1\,,-2k^2-k+(2i+1)k\,)$ $P_{2i+3}(\,2i+3,-2k^2-k+(2i+3)k\,)$	$P_{2i}(\,2i\,,-2k^2-k+(2i)(k+1)\,)$ $P_{2i+2}(\,2i+2\,,-2k^2-k+(2i+2)(k+1)\,)$

✧ 「奇數」面積三角形：$\Delta\, P_{2i}\, P_{2i+1}\, P_{2i+2}$

$$\Delta_{P_{2i}P_{2i+1}P_{2i+2}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i}} \\ \overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i+2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -k+2i \\ 1 & k+2i+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-4i-2| = 2i+1$$

$$=\{1、3、5、7\cdots\}，i=0,1,2,3\cdots$$

✧ 「偶數」面積三角形：$\Delta\, P_{2i+1}\, P_{2i+2}\, P_{2i+3}$

$$\Delta_{P_{2i+1}\,P_{2i+2}\,P_{2i+3}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_{2i+2}\,P_{2i+1}} \\ \overrightarrow{P_{2i+2}\,P_{2i+3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -k-2i-2 \\ 1 & k-2i-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|4i+4| = 2i+2$$

$$=\{2、4、6、8\cdots\}，i=0,1,2,3\cdots$$

➢ 代數分析：$n = 2k + 1 \Longrightarrow$論證三角形面積依序為「連續整數」！

L_1：$kx + y = 2k^2 + 3k + 1$	L_2：$(k+1)x + y = 2k^2 + 3k + 1$
$Q_{2i}(2i, 2k^2 + 3k + 1 - 2ki)$ $Q_{2i+2}(2i+2, 2k^2 + 3k + 1 - (2i+2)k)$	$Q_{2i+1}(2i+1, 2k^2 + 3k + 1 - (2i+1)(k+1))$ $Q_{2i+3}(2i+3, 2k^2 + 3k + 1 - (2i+3)(k+1))$

✧ 「奇數」面積三角形：$\Delta_{Q_{2i}\,Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}}$

$$\Delta_{Q_{2i}\,Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i}} \\ \overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i+2}} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} -1 & k + 2i + 1 \\ 1 & -k + 2i + 1 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|-4i - 2| = 2i + 1$$

$$= \{1、3、5、7\cdots\}，i = 0, 1, 2, 3\cdots$$

✧ 「偶數」面積三角形：$\Delta_{Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}}$

$$\Delta_{Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+1}} \\ \overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} -1 & k - 2i - 1 \\ 1 & -k - 2i - 3 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|4i + 4| = 2i + 2$$

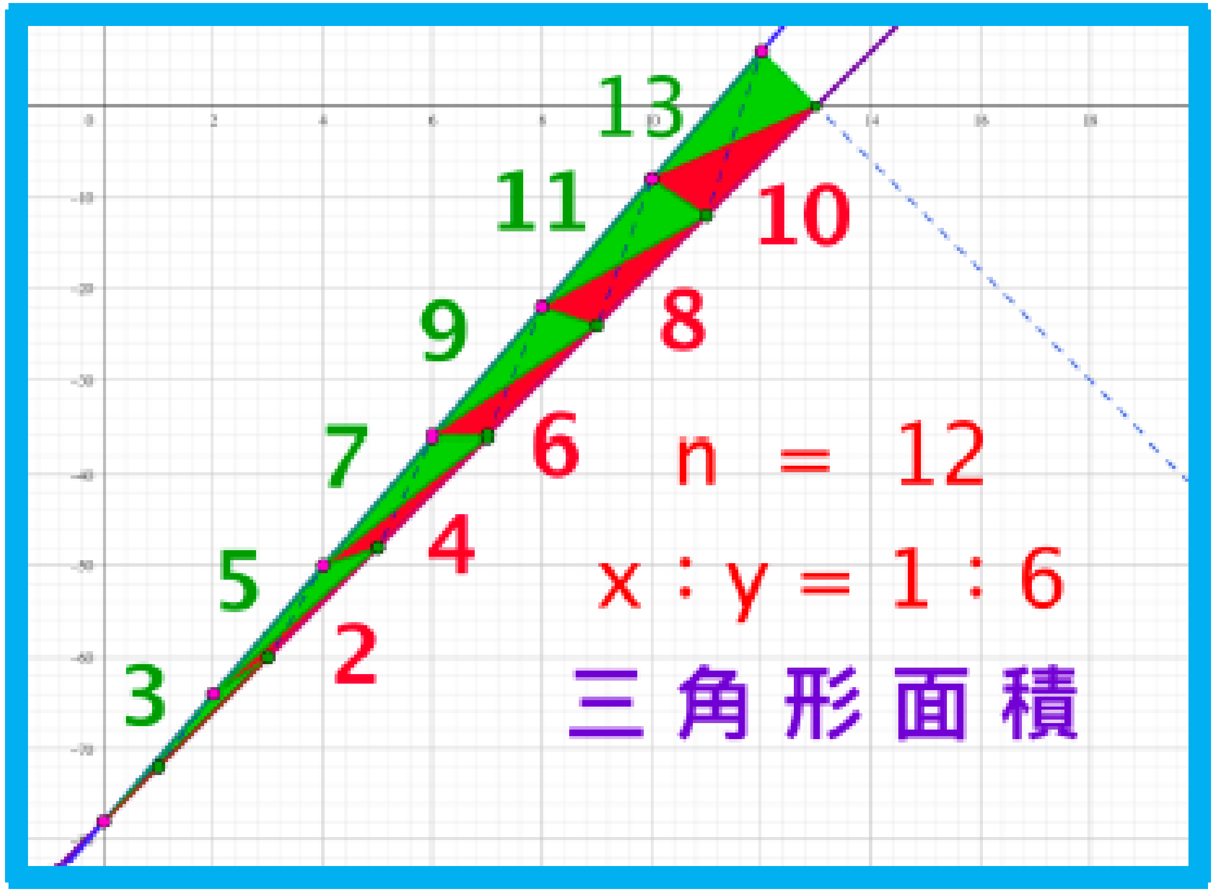
$$= \{2、4、6、8\cdots\}，i = 0, 1, 2, 3\cdots$$

☼☀意外發現3☀☼

不同的切割方向

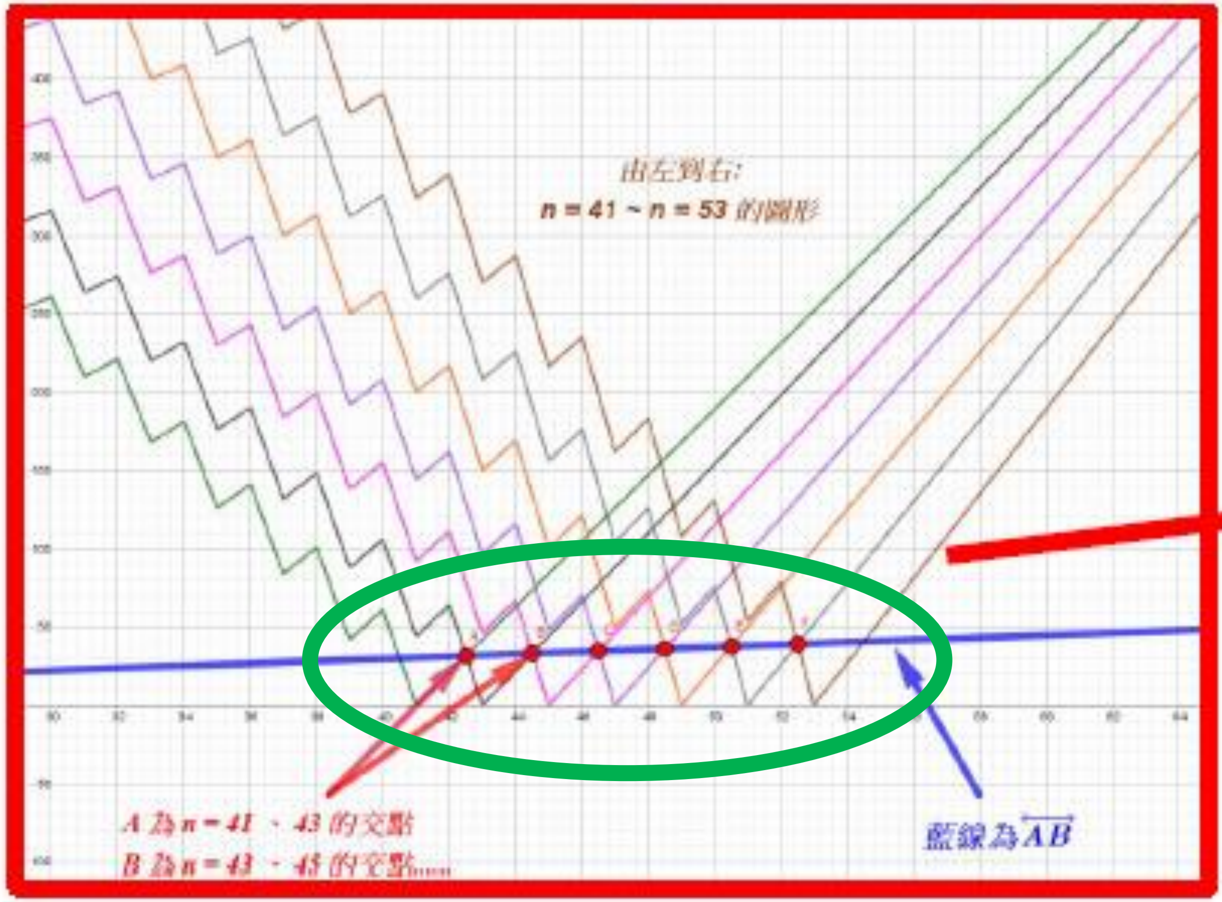
⟹ 三角形面積依然呈現

為「連續整數」！

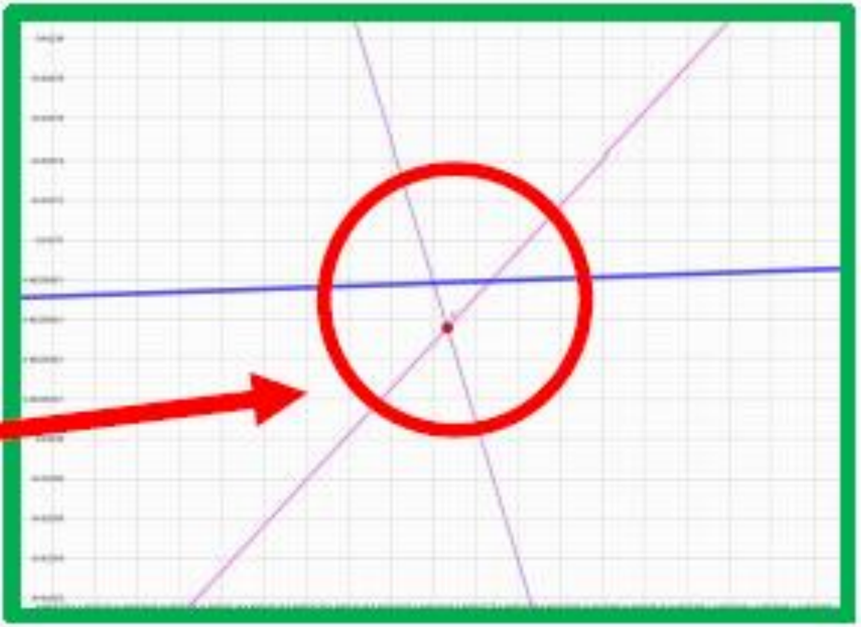


◆ 研究10：探討 n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形「交點」之幾何性質為何？

巨觀



微觀



交點 → 不在直線上！

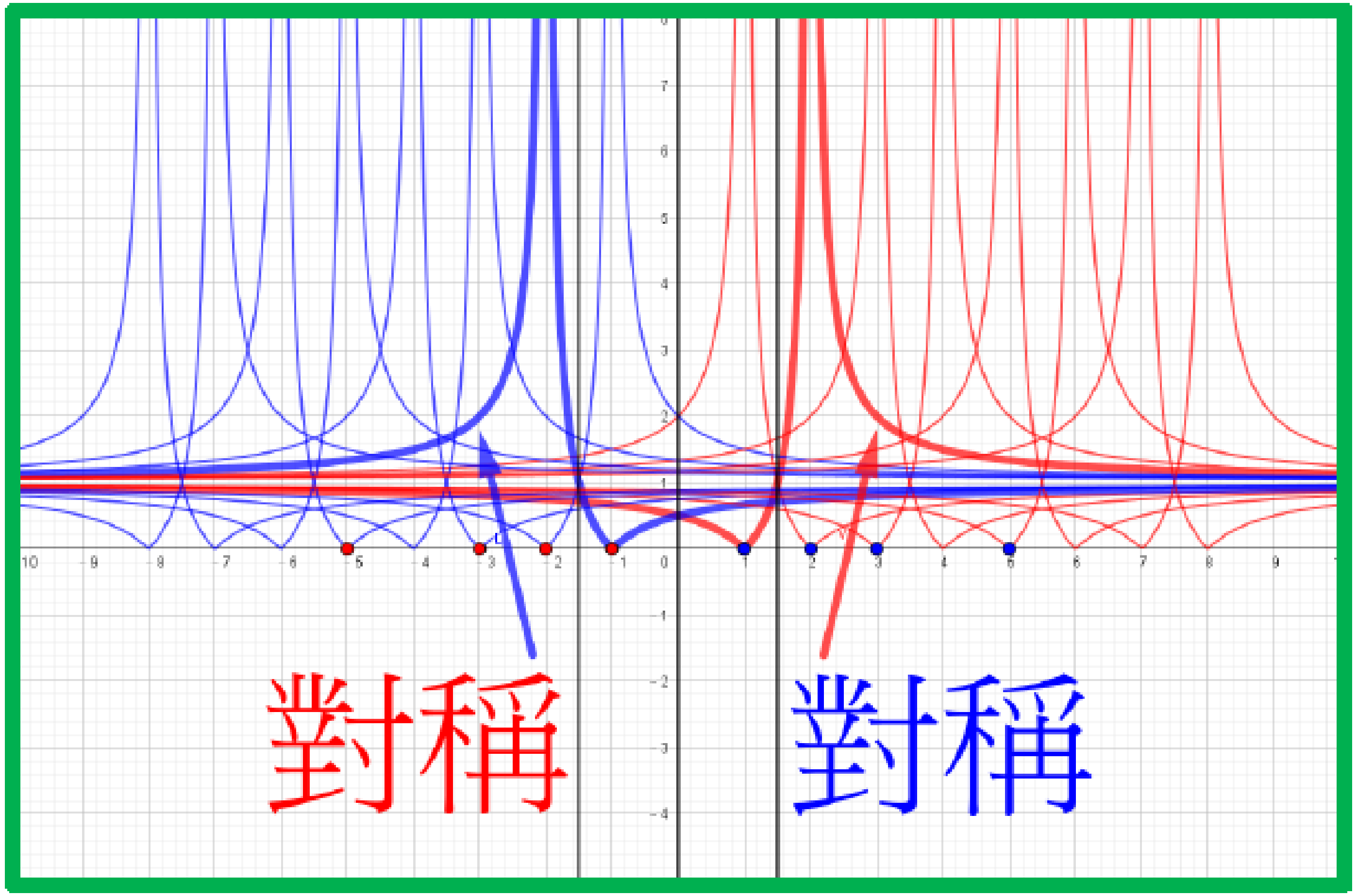
從幾何圖形中，發現 n 值為連續奇數之 $f(x)$ 幾何圖形的各「交點」$\Rightarrow$ 於巨觀看似皆在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上…實則經放大至微觀後，會發現各「交點」並不同在一條直線上。

猜測 $\Rightarrow$ n 值為連續奇數之 $f(x)$ 幾何圖形各「交點」，會在圓錐曲線上嗎？…研究後發現，<u>各點會很接近在圓錐曲線軌跡上</u>，但不在圓錐曲線上！

★ **發現規則！** ★

◆ 研究11：

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x-n|}{|x-(n+1)|} \text{ 與 } f(x)=\dfrac{|x+n|}{|x+(n+1)|} \text{ 之 對稱性。} \\ f(x)=\dfrac{|x-(n+1)|}{|x-n|} \text{ 與 } f(x)=\dfrac{|x+(n+1)|}{|x+n|} \text{ 之 對稱性。} \end{cases}$$



五、 研究結果與討論：

★定義：

$$f(x) = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| - 4|x-4| + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot |x-n|$$

1. 若 $n = 2k \Rightarrow$ 定義：

(i). $f(i+1) - f(i) > 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「滑梯」的幾何特徵！

(ii). $f(i+1) - f(i) = 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(iii). $f(i+1) - f(i) < 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「鋸齒」的幾何特徵！

$i < n$

2. 若 $n = 2k+1 \Rightarrow$ 定義：

(i). $f(i+1) - f(i) < 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「滑梯」的幾何特徵！

(ii). $f(i+1) - f(i) = 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(iii). $f(i+1) - f(i) > 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ 有「鋸齒」的幾何特徵！

$i < n$

★ 結論1：$x = n$ 值之「中位數」$\Rightarrow$ $f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(i). 若 $n = 4u + 3 \Rightarrow$ $y_2 - y_1 = f(2k+2) - f(2k+1) = -2u + 2k$

Then *if*「$k = u$」$\Rightarrow$ $y_2 - y_1 = 0$ $\Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

(ii). 若 $n = 4u + 4 \Rightarrow$ $y_2 - y_1 = f(2k+3) - f(2k+2) = 2u - 2k$

Then *if*「$k = u$」$\Rightarrow$ $y_2 - y_1 = 0$ $\Rightarrow f(x)$ 有「水平」的幾何特徵！

★ 結論2：$f(x)$ 幾何圖形之「水平」幾何特徵！

(i). $n = (4u+1) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！

(ii). $n = (4u+2) \Rightarrow f(x)$ 沒有「水平」的幾何特徵！

(iii). $n = (4u+3) \Rightarrow \underline{(2u+1) \le x \le (2u+2)}$時，$f(x)$有「水平」的幾何特徵！

(iv). $n = (4u+4) \Rightarrow \underline{(2u+2) \le x \le (2u+3)}$時，$f(x)$有「水平」的幾何特徵！

★ 結論3：$f(x)$ 幾何圖形之「滑梯、水平、鋸齒」統整表（一般化）

n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+1	−		−		−		···		−		−		+		+		···		+		+					
	$\frac{2u}{2}=u$ 個滑梯												$\frac{4u-2u}{2}=u$ 個鋸齒													

n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+2		+		+		+		···		+		+		−		−		···		−		−				
		$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個滑梯												$\frac{(4u+1)-(2u+1)}{2}=u$ 個鋸齒												

n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+3	−		−		−				−		−		水平		+		···		···		+		+			
	$\frac{2u}{2}=u$ 個滑梯														$\frac{(4u+2)-(2u+2)}{2}=u$ 個鋸齒											

n	1	2	3	4	5	6	...	...	2u-3	2u-2	2u-1	2u	2u+1	2u+2	2u+3	2u+4	...	...	4u-3	4u-2	4u-1	4u	4u+1	4u+2	4u+3	4u+4
4u+4		+		+		+		···		+		+		水平		−		−		···		−		−		
		$\frac{(2u+1)-1}{2}=u$ 個滑梯														$\frac{(4u+3)-(2u+3)}{2}=u$ 個鋸齒										

★ 結論 4：$f(x)$ 幾何圖形之「幾何特徵」結構表（一般化）

n	頂點座標	極值	滑梯（左邊）	水平	攀登（右邊）	方向	第一條直線	第二條直線	兩直線交點	圖形另一半（對稱直線）	對稱圖形交點	軸
4u+1	(4u+1, 0)	m	u	0	u	上	$2ux+y=8u^2+6u+1$	$(2u+1)x+y=8u^2+6u+1$	$(0,8u^2+6u+1)$	$(2u+1)x-y=8u^2+6u+1$	(4u+1,0)	X=4u+1
4u+2	(4u+2,2u+1)	M	u	0	u	下	$(2u+1)x-y=8u^2+10u+3$	$(2u+2)x-y=8u^2+10u+3$	$(0,-8u^2-10u-3)$	$(2u+1)x+y=8u^2+10u+3$	(4u+3,0)	x=4u+3
4u+3	(4u+3, 0)	m	u	1	u	上	$(2u+1)x+y=8u^2+14u+6$	$(2u+2)x+y=8u^2+14u+6$	$(0,8u^2+14u+6)$	$(2u+2)x-y=8u^2+14u+6$	(4u+3,0)	x=4u+3
4u+4	(4u+4,2u+2)	M	u	1	u	下	$(2u+2)x-y=8u^2+18u+10$	$(2u+3)x-y=8u^2+18u+10$	$(0,-8u^2-18u-10)$	$(2u+2)x+y=8u^2+18u+10$	(4u+5,0)	x=4u+5

★ 結論5：$f(x)$ 之兩直線上依序之「三角形面積」$\Rightarrow$ 為「連續整數」！

✧ $\boxed{n = 2k}$ $\Rightarrow$

$$\Delta_{P_{2i}P_{2i+1}P_{2i+2}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i}} \\ \boxed{} \\ \overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i+2}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & -k+2i \\ 1 & k+2i+2\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|-4i-2| = 2i+1(\text{奇})$$

$$\Delta_{P_{2i+1}P_{2i+2}P_{2i+3}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{P_{2i+2}P_{2i+1}} \\ \boxed{} \\ \overrightarrow{P_{2i+2}P_{2i+3}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & -k-2i-2 \\ 1 & k-2i-2\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|4i+4| = 2i+2(\text{偶})$$

✧ $\boxed{n = 2k+1} \quad \Rightarrow$

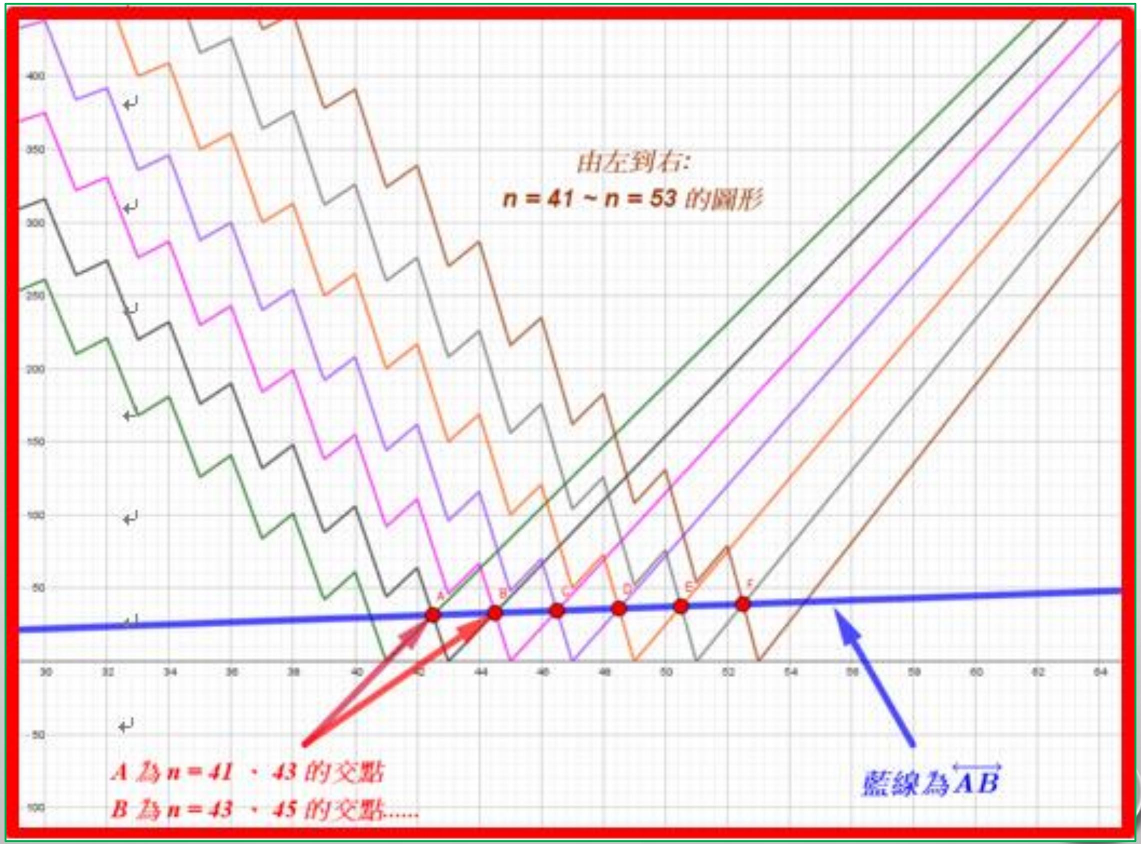
✧ $\Delta_{Q_{2i}\,Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i}} \\ \\ \overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i+2}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & k+2i+1 \\ 1 & -k+2i+1\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|-4i-2| = 2i+1(\text{奇})$

✧ $\Delta_{Q_{2i+1}\,Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+1}} \\ \\ \overrightarrow{Q_{2i+2}\,Q_{2i+3}}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & k-2i-1 \\ 1 & -k-2i-3\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|4i+4| = 2i+2(\text{偶})$

★ 結論 6：n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形之「交點」之幾何性質。

n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形之各個「交點」

$\Longrightarrow$ 發現這些交點的軌跡，會非常接近一條直線⋯



➤ 未來展望：

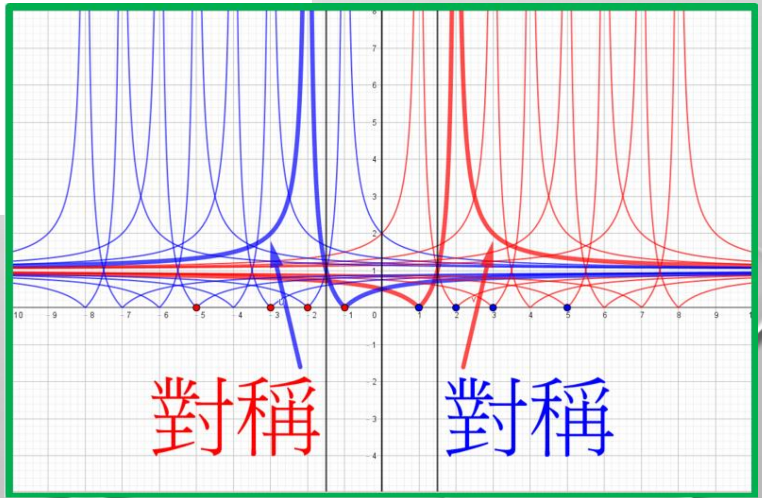
(I). $f(x)=|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-4|x-4|+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n\cdot|x-n|$

1. 進一步探討 n 值為連續奇數之各 $f(x)$ 幾何圖形「交點」之幾何性質與幾何特徵為何？

2. 若修改 $f(x)$ 方程式中的「部份幾項」，對 $f(x)$ 之幾何圖形會有什麼影響？進一步探討其中方程式與幾何圖形之間的關係⋯

(II). 研究
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x-n|}{|x-(n+1)|} \quad 與 \quad f(x)=\dfrac{|x+n|}{|x+(n+1)|} \quad 之 \quad 對稱性。\\ f(x)=\dfrac{|x-(n+1)|}{|x-n|} \quad 與 \quad f(x)=\dfrac{|x+(n+1)|}{|x+n|} \quad 之 \quad 對稱性。\end{cases}$$

研究此類方程式 $f(x)$ 之幾何性質與幾何特徵⋯



七、參考資料

1、109學年彰化縣獨立研究「數學類」得獎作品：

「 Mathmagic絕對值得一看－極值天堂雲蹤覓 」

https://www.rcse.chc.edu.tw/files.php?m=result2&file=0b7d57ac53d5ca9befc16a1549b278cc

2、科學Online： 數學之旅：三角形面積公式(III)

https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=66359


Anthony Liou
成功者永不放棄
放棄者永不成功
企圖心創造非凡
～謝謝評審聆聽
56