

# 彰化縣 109 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選 作品說明書

## 第一階段 研究訓練階段（教師撰寫）

### 一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校自三年級起提供資優學生相關課程服務，主要切分為兩大部分：研究技能訓練與獨立研究實踐。

課程目標：（一）能體驗發現及解決問題的過程。

（二）能熟練某領域的知識。

（三）能學會研究所需技能。

（四）能依個人興趣拓展相關知識。

（五）能培養正確與積極的研究態度。

（六）能學會與人分工合作的正確態度。

課程大綱如下圖：



## 二、學校如何提供該生獨立研究訓練

學校在安排獨立研究課程時，按照學生年級切分為三年級、四年級，以及高年級三層次，說明如下：

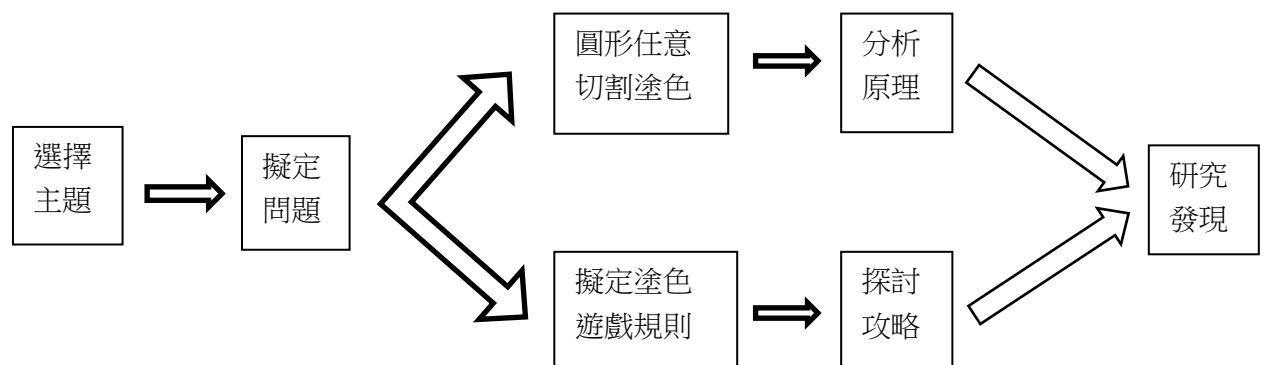
- (一) 三年級：針對三年級的資優生，會設計與學科相關的課程以拓展其知識基礎，每週安排兩節主題探索課程，主要在研究技巧的訓練方面，讓學生學習文書處理、資料蒐集與整理方法、圖書館運用、觀察與做筆記的能力、晤談方法。在資源教室的充實活動中，提供一般探索機會，搭配如數位相機、顯微鏡、簡單科學實驗技術等的操作練習。每年安排參訪多場展覽，讓學生能找出研究興趣與觀摩優秀作品，並隨時記錄有興趣的主題。
- (二) 四年級：在學科加深加廣方面與三年級相同，但進入此階段，學生已開始針對有興趣的主題進行研究，而非單純只蒐集資料。每週兩節課的獨立研究課程，四年級資優生主要擔任研究協助者，配合學長姐的引導，協助研究觀察與記錄工作，對於了解實際研究歷程與重點事項，是很重要的訓練。
- (三) 高年級：每週進行兩節課的獨立研究課程，實際進行研究，在教師協助下，完成「訂定主題」、「擬定工作進度與分配」、「擬定研究問題」、「蒐集資料與整理」、「尋求資源」、「實際研究與記錄」、「研究討論與發現」、「撰寫書面報告與分享」之流程。在此階段，教師的角色會依據學生能力，慢慢減少干預，擔任引導討論與技術指導工作，掌握學生計畫安排與實際進度是否得宜，並在學生完成報告時協助修改。

## 一、研究動機

在四年級的時候，為了參加學校的自然科學班要先考試，考試題目中，有一個項目是「圓圈塗色」，我覺得很有趣！印象十分深刻，所以我便決定用這個當主題。這個题目的原理就是把一個圓用直線分成很多塊，然後塗上顏色，邊緣有碰到的區塊就不能塗上同一個顏色。

## 二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

### (一)擬定正式計畫



### (二)研究問題

1. 探討圓形切成 2~8 塊任意塗色的方法
2. 分析塗色原理
3. 訂定圓形塗色的遊戲規則
4. 探討 2~4 線圓形切塊塗色的致勝方式

### (三)工作進度表

月份 項目	9	10	11	12~2	3	4	5	6
選擇 主題	V							
問題 擬定		V						

初步 分析			V	V				
資料 分析					V	V		
歸納 結論						V	V	
撰寫 報告							V	V

### 三、彙整相關文獻

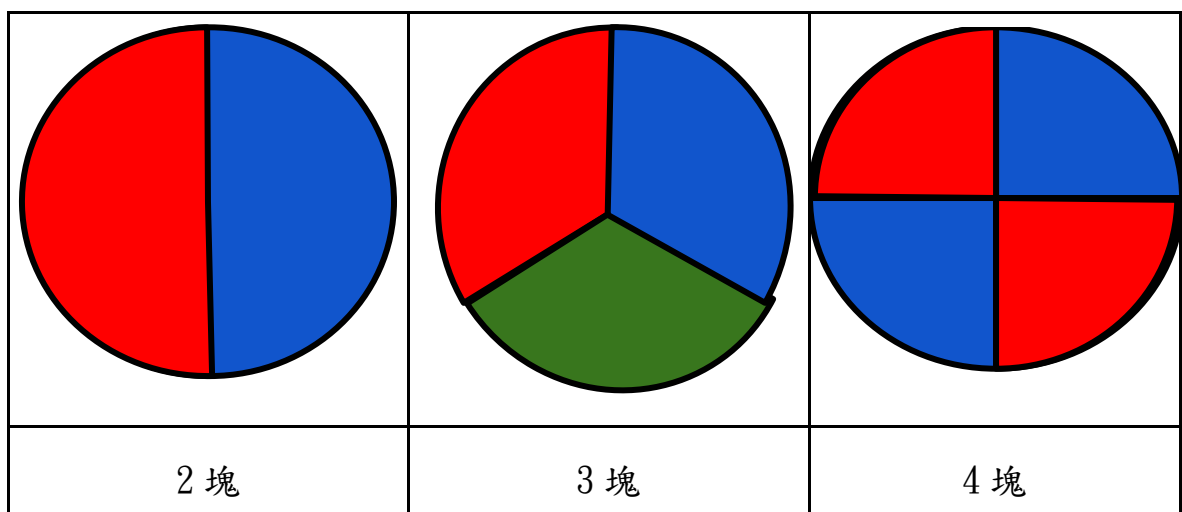
(一) 世茂出版社(2012)。東大生為小學生設計的 23 堂數學課——3 步驟教孩子學數學需要的六種能力。

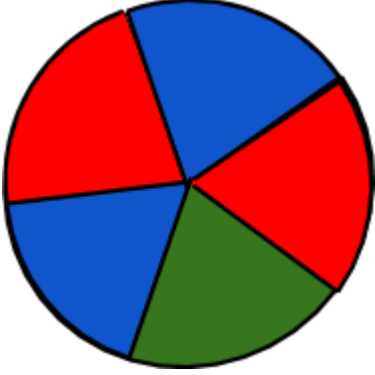
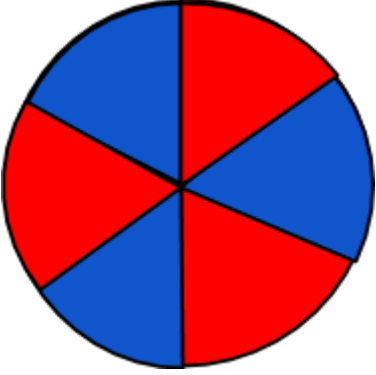
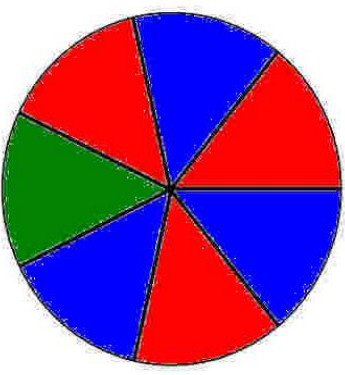
(二) 第 49 屆全國中小學科展數學科：圓與規-塗色終極版。

### 四、資料分析

(一) 圓形任意切割塗色

#### 1. 等分切割

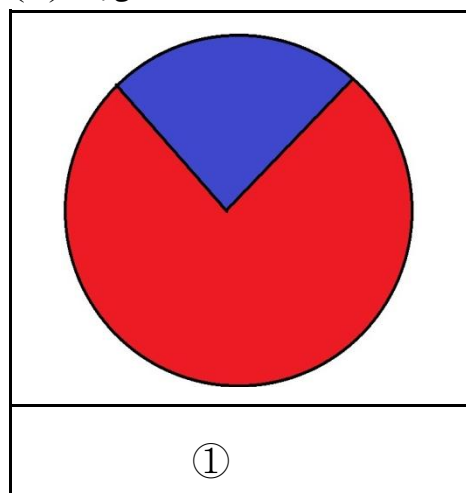


		
5 塊	6 塊	7 塊

觀察與發現：偶數塊只需使用 2 種顏色，奇數塊需使用 3 種顏色。

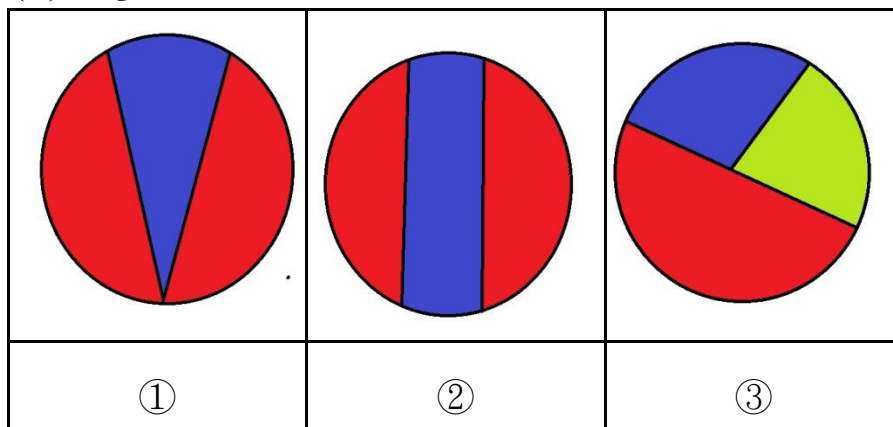
## 2. 不等分切割

### (1) 2 塊



觀察與發現：一定是 2 種顏色。

### (2) 3 塊


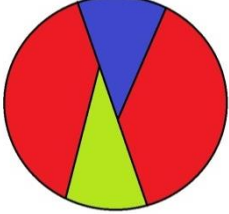
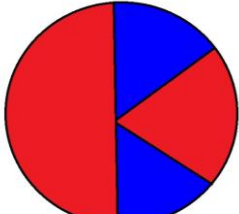
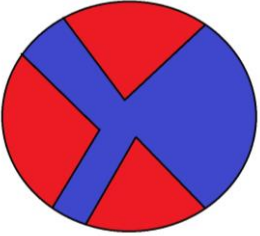
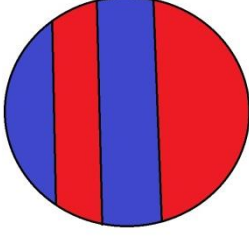
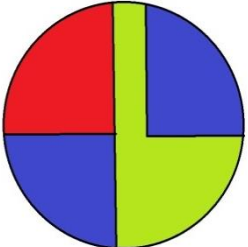
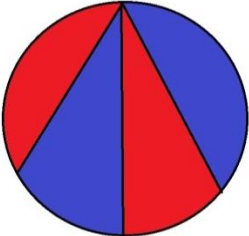
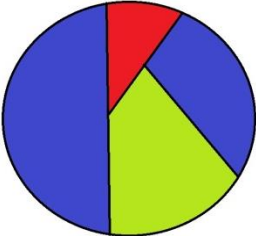
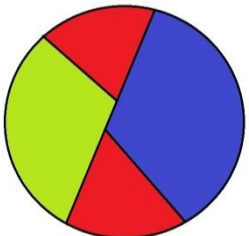


塗色原理分析

原理	圓形編號	顏色種類
2 個 1:2, 1 個 1:1	①②	2 種
全部 1:2	③	3 種

觀察與發現：依據塗色原理，我發現最少只需要 2 種顏色，最多則需要 3 種顏色。

(3)4 塊

		
①	②	③
		
④	⑤	⑥
		
⑦	⑧	⑨

塗色原理分析

原理	圓形編號	顏色種類
2 個 1 : 2 , 2 個 1 : 1	⑤⑦	2 種
1 個 1 : 3 , 3 個 1 : 1	①④	2 種
全部 1 : 2	③	2 種
2 個 1 : 3 , 2 個 1 : 2	②⑥⑧⑨	3 種

觀察與發現：依據塗色原理，我發現最少只需要 2 種顏色，最多則需要 4 種顏色。

(4)5 塊

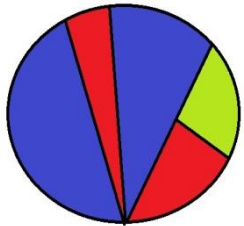
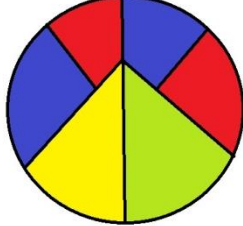
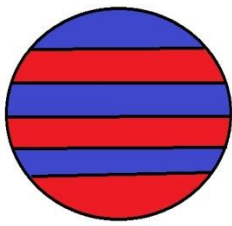
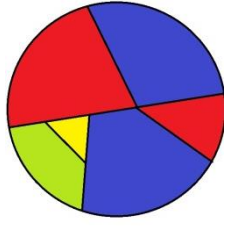
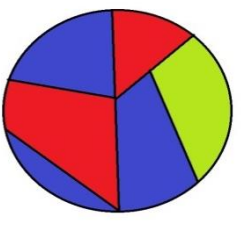
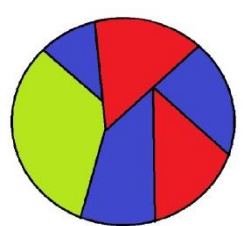
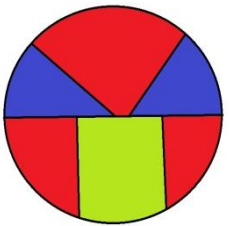
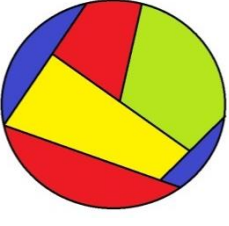
①	②	③	④
⑤	⑥	⑦	⑧
⑨	⑩	⑪	⑫

塗色原理分析

原理	圓形編號	顏色種類
夾心餅乾(一定有 2 個 1:1)	①⑪	2 種
全部 1:2	②	3 種
3 個 1:2, 2 個 1:3	③④⑧	3 種
2 個 1:2, 2 個 1:3, 1 個 1:4	⑤⑥	3 種
1 個 1:1, 1 個 1:2, 3 個 1:3	⑦	3 種
4 個 1:3, 1 個 1:4	⑨	3 種
1 個 1:1, 2 個 1:2, 2 個 1:3	⑫	3 種
4 個 1:1, 1 個 1:4	⑩	2 種

觀察與發現：依據塗色原理，我發現最少只需要 2 種顏色，最多則需要 3 種顏色。

(5)6 塊

			
①	②	③	④
			
⑤	⑥	⑦	⑧

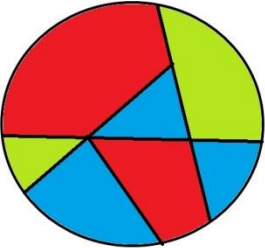
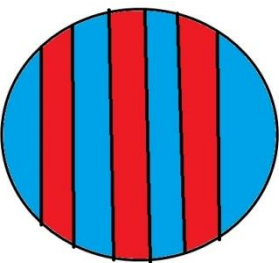
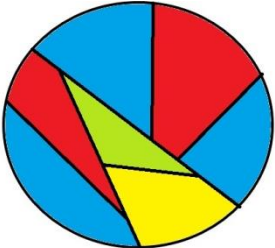
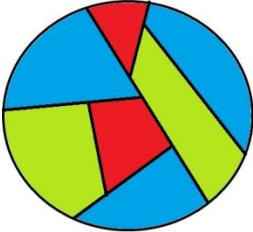
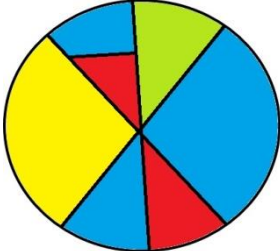
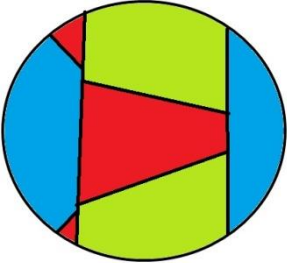


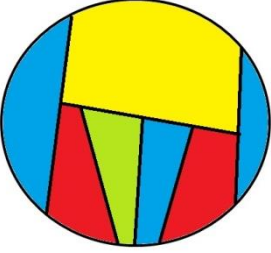
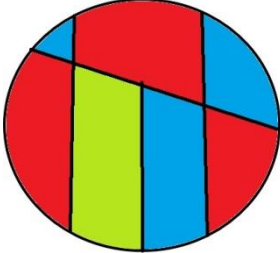
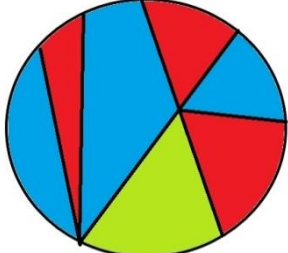
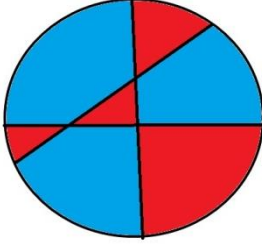
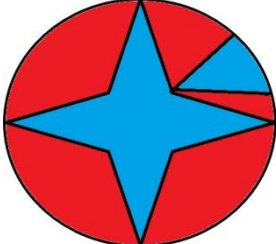
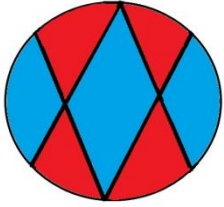
塗色原理分析

原理	圓形編號	顏色種類
1 個 1:1, 3 個 1:2, 1 個 1:3	①	3 種
2 個 1:1, 4 個 1:2	③	2 種
1 個 1:1, 2 個 1:3, 個 1:3	⑤	3 種
3 個 1:2, 2 個 1:3, 1 個 1:4	⑥⑧	3 種
2 個 1:2, 4 個 1:3	②	3 種
2 個 1:2, 2 個 1:3, 2 個 1:4	④	4 種
2 個 1:2, 3 個 1:3, 1 個 1:5	⑦	3 種

觀察與發現：依據塗色原理，我發現最少只需要 2 種顏色，最多則需要 4 種顏色。

(6)7 塊

		
①	②	③
		
④	⑤	⑥

		
⑦	⑧	⑨
		
⑩	⑪	⑫

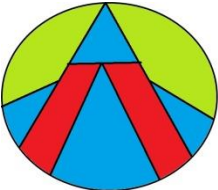
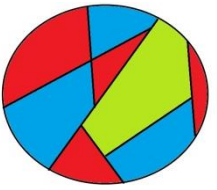
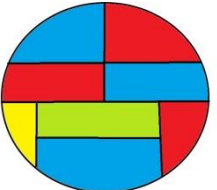
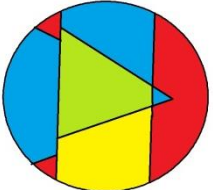
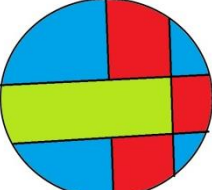
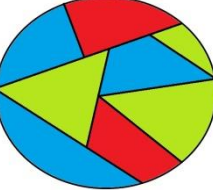
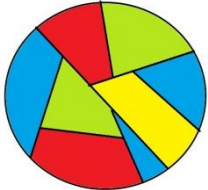
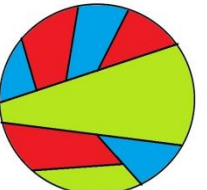
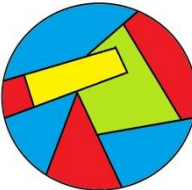
塗色原理分析：

原理	圓形編號	顏色種類
夾心餅乾(一定有 2 個 1:1)	②	2 種
1 個 1:2; 4 個 1:3; 1 個 1:4	④	3 種
4 個 1:2; 2 個 1:3; 1 個 1:4	⑧	3 種
3 個 1:1; 3 個 1:2; 1 個 1:5	⑪	2 種
3 個 1:2; 2 個 1:3	⑩	2 種
1 個 1:1; 5 個 1:2; 1 個 1:3	⑨	3 種
2 個 1:2; 4 個 1:3; 1 個 1:6	⑦	4 種
2 個 1:2; 2 個 1:3; 3 個 1:4	⑥	3 種

3 個 1 : 2 ; 4 個 1 : 3	①	3 種
3 個 1 : 2 ; 4 個 1 : 3	⑤	4 種
1 個 1 : 2 ; 4 個 1 : 3 ; 1 個 1 : 4 1 個 1 : 5	③	4 種
6 個 1 : 2 , 1 個 1 : 4	⑫	2 種

觀察與發現：依據塗色原理，我發現最少只需要 2 種顏色，最多則需要 4 種顏色。

(7)8 塊

		
①	②	③
		
④	⑤	⑥
		
⑦	⑧	⑨

塗色原理分析：

原理	圓形編號	顏色種類
----	------	------

3 個 1 : 2 , 2 個 1 : 3 , 3 個 1 : 4	①	3 種
2 個 1 : 2 , 3 個 1 : 3 , 2 個 1 : 4 1 個 1 : 5	③④	4 種
5 個 1 : 3 , 2 個 1 : 4 , 1 個 1 : 5	⑨	4 種
4 個 1 : 2 , 1 個 1 : 3 , 2 個 1 : 4 1 個 1 : 5	⑥	3 種
個 1 : 2 , 3 個 1 : 3 , 1 個 1 : 5	⑤	3 種
2 個 1 : 2 , 4 個 1 : 3 , 1 個 1 : 4 1 個 1 : 6	②	3 種
3 個 1 : 2 , 4 個 1 : 3 , 1 個 1 : 6	⑧	3 種
2 個 1 : 2 , 3 個 1 : 3 , 1 個 1 : 4 2 個 1 : 5	⑦	4 種

觀察與發現：依據塗色原理，我發現最少只需要 2 種顏色，最多則需要 4 種顏色。

## (二)訂定遊戲規則

1. 動機：因為我們覺得單單只有討論圓圈塗色好像有點太無聊了，所以我們就想到我們是兩個人一組，說不定可以把它變成一個遊戲，這就是我們發明這個遊戲的原因。

2. 遊戲規則：

(1) 兩人猜拳，贏家(先手)任意喊 1 個 1~4 的數字(代表幾條線)。

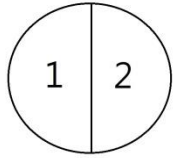
(2) 兩人輪流畫直線，且後手必須將未連接到圓周的直線連接到圓周上。

(3) 兩人輪流挑選任意區塊塗色，贏家先塗。

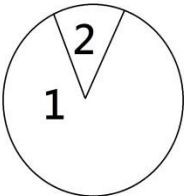
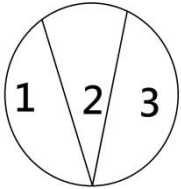
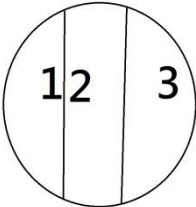
(4) 當其中一人有任意兩塊相鄰的區塊圖同一個顏色，他就輸了。

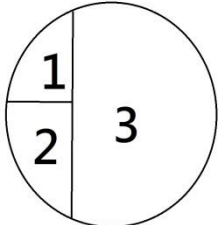
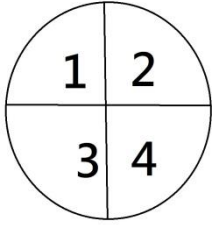
(三)遊戲攻略

1.1 線(2塊)：

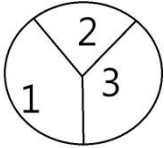
區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
2塊	010201 	1. 1→2, 2→1。 (2種)	1. 平手	因為是兩塊，所以一定會平手。

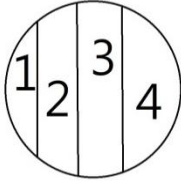
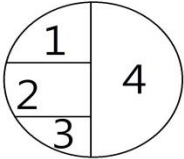
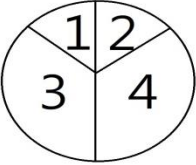
2.2 線(2~4塊)

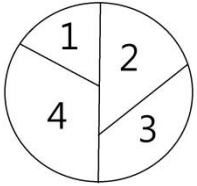
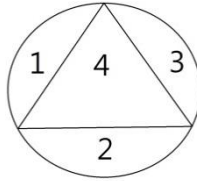
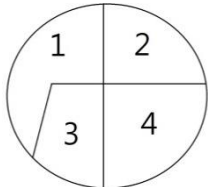
區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
2塊	020201 	1. 1→2, 2→1。 (2種)	1. 平手	因為是兩塊，所以一定會平手。
3塊	020301 	1. 1→2→3, 3→2→1。 (2種) 2. 1→3, 3→1 2→1, 2→3 (1+2+1=4種)	1. 平手 2. 先手輸	平手是先手塗兩側，且後手塗在先手的隔壁。先手塗兩側，且後手塗空一格，或是先手塗中間，則先手輸。
	020302 	1. 1→2→3, 3→2→1。 (2種) 2. 1→3, 3→1 2→1, 2→3 (1+2+1=4種)	1. 平手 2. 先手輸	平手是先手塗兩側，且後手塗先手的隔壁。先手輸有兩種情況，一是先手塗兩側，且後手塗空一格，二是先手塗中間。

	020303 	1. 1→2, 1→3 2→1, 2→3 3→1, 3→2 (2*3=6 種)	先手必輸	先手必輸。
4 塊	020401 	1. 1→4, 2→3 4→1, 3→2 (2*2=4 種) 2. 1→2→4→3, 1→3→4→2, 2→1→3→4, 2→4→3→1, 3→4→2→1, 3→1→2→4, 4→3→1→2, 4→1→2→3。 (4*2*1*1=8 種)	1. 先手輸 2. 平手	後手塗先手對角, 先手輸。 後手塗先手隔壁, 平手。

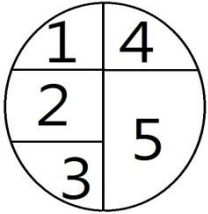
### 3.3 線(3~7 塊)

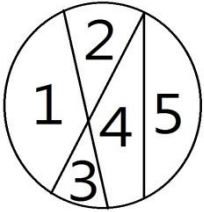
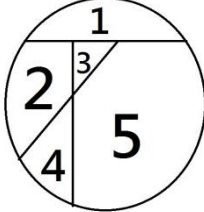
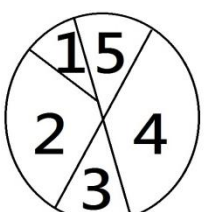
區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
3 塊	030301 	1. 1→2 (3*2=6 種)	1. 先手輸	先手必輸。

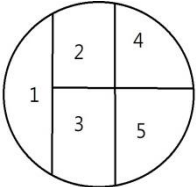
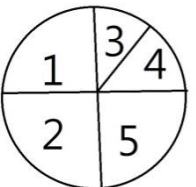
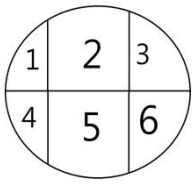
<p>4 塊</p>	<p>0300401</p> 	<p>1. 1→3→4， 4→2→1。 (2*2=4 種)</p> <p>2. 1→2→3→4 (4*2*1*1=8 種)</p> <p>3. 2→4，3→1。</p>	<p>1. 先手贏 2. 平手 3. 先手輸</p>	<p>先手塗兩側，後手塗空一格即先手贏。</p> <p>後手塗在先手的隔壁就會平手。</p> <p>先手輸是先手塗中間，後手塗在空一格。</p>
	<p>030402</p> 	<p>1. 1→2→3 3→2→1 1→4→3 3→4→1 (2*2*1=4 種)</p> <p>2. 1→3，3→1 2→1，2→3 2→4，4→1 4→3，4→2 (1+3+1+3=8 種)</p>	<p>1. 先手贏 2. 先手輸</p>	<p>先手贏是先手塗 1 或 3，後手塗 2 或 4。</p> <p>先手輸是先手塗 2 或 4 必輸，先手塗 1 或 3，後手塗先手唯一可以塗的地方也會輸。</p>
	<p>030403</p> 	<p>1. 1→4，2→3 3→2，4→1 (2*2=4 種)</p> <p>2. 1→2→4→3 1→3→4→2 2→1→3→4 2→4→3→1 3→4→2→1</p>	<p>1. 先手輸 2. 平手</p>	<p>後手塗先手對角，先手輸。</p> <p>後手塗先手隔壁，平手。</p>

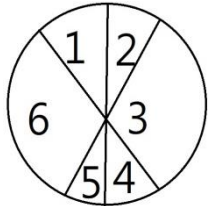
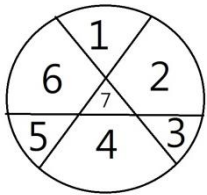
		$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (4*2=8 種)		
030404		1. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ (2*2=4 種) 2. $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4$ $2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3$ $4 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1$ $4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ (1+3+1+3=8 種)	1. 先手贏 2. 先手輸	後手塗先手旁邊， 先手贏。後手塗先 手對角，先手輸。
030405		1. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ， (3*4=12 種) 2. $4 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2$ ， $4 \rightarrow 1$ 。 (3 種)	1. 先手贏 2. 先手輸	不論先後手，塗 4 必輸。
030406		1. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ $4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$	1. 平手 2. 先手輸	後手塗先手旁邊， 平手。後手塗先手 對角，先手輸。



		<p>(4*2=8 種)</p> <p>2. 1→4, 2→3</p> <p>4→1, 3→2</p> <p>(2*2=4 種)</p>		
5 塊	<p>030501</p> 	<p>1. 1→2→3→4</p> <p>1→2→5→4</p> <p>1→3→5→4</p> <p>1→4→3→2</p> <p>1→4→5→2</p> <p>1→4→5→3</p> <p>2→1→4→3</p> <p>2→1→4→5</p> <p>3→1→4→5</p> <p>3→2→1→4</p> <p>4→1→2→5</p> <p>4→1→3→5</p> <p>[(6+2+2+2=12)* 2=24 種]</p> <p>2. 3→5→1,</p> <p>4→2→3,</p> <p>1→5→3,</p> <p>3→2→4。</p> <p>(2*2=4 種)</p> <p>3. 2→4, 5→1。</p> <p>(2 種)</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手贏</p> <p>3. 先手輸</p>	<p>先手塗 2 或 5 必輸。</p>

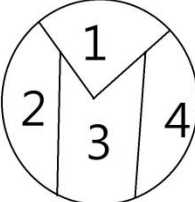
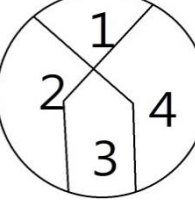
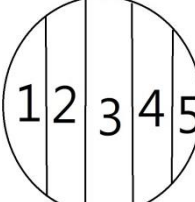
<p>030502</p> 	<p>1. <math>4 \rightarrow 1</math>。(1種)</p> <p>2. <math>1 \rightarrow 4 \rightarrow 5</math>，  <math>2 \rightarrow 3 \rightarrow 5</math>，  <math>3 \rightarrow 2 \rightarrow 5</math>，  <math>5 \rightarrow 2 \rightarrow 3</math>，  <math>5 \rightarrow 3 \rightarrow 2</math>，  <math>5 \rightarrow 4 \rightarrow 1</math>。  (1+1+1+3=6種)</p> <p>3. <math>1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3</math>  (8+2+2+6+2=20種)</p> <p>4. <math>2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5</math> (4*3=12種)</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手贏</p> <p>3. 先手輸</p> <p>4. 平手</p>	<p>後手塗先手對角，先手贏。 先手塗4必輸。</p>
<p>030503</p> 	<p>1. <math>1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5</math>  (8*2=16種)</p> <p>2. <math>1 \rightarrow 3 \rightarrow 4</math>，  <math>3 \rightarrow 1 \rightarrow 4</math>，  <math>4 \rightarrow 1 \rightarrow 3</math>，  <math>4 \rightarrow 3 \rightarrow 1</math>。  (2*2=4種)</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手贏</p>	<p>先手若塗1:3，後手佔據1:2，先手輸。</p>
<p>030504</p> 	<p>1. <math>1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4</math>  [(4+3+3+2)*2=24種]</p> <p>2. <math>2 \rightarrow 4</math>，<math>5 \rightarrow 3</math>。  (2種)</p> <p>3. <math>4 \rightarrow 2 \rightarrow 1</math>，</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手輸</p> <p>3. 先手贏</p>	<p>先手塗2(1:3)必輸。</p>

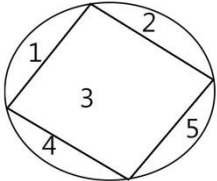
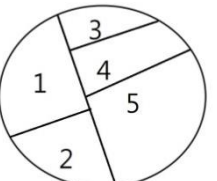
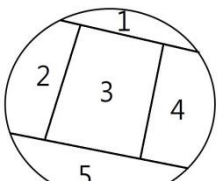
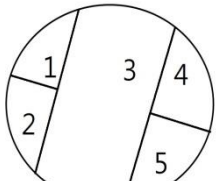
		<p>1→2→4， 1→5→3， 3→5→1。</p> <p>(2*2=4 種)</p>		
	<p>030505</p> 	<p>1. 1→4→5→3 (12*2=24 種)</p> <p>2. 2→5，3→4。 (2 種)</p> <p>3. 1→2→5， 1→3→4， 4→3→1， 5→2→1。 (2*2=4 種)</p>	<p>1. 先手輸 2. 先手輸 3. 先手贏</p>	<p>塗 2 或 3 輸的機率較高。</p>
	<p>030506</p> 	<p>1. 1→2→4→3 (8+8+7+7+8=38)</p>	<p>1. 先手輸</p>	<p>先手必輸。</p>
6 塊	<p>030601</p> 	<p>1. 1→2→3→4→5→6 (12*6=72 種)</p> <p>2. 4→2→6， 6→2→4， 1→5→3， 3→5→1。 [(1+1)*2=4]</p> <p>3. 2→4→6→3</p>	<p>1. 平手 2. 先手贏 3. 先手輸</p>	<p>後手塗 2 或 5 輸或平手。</p>

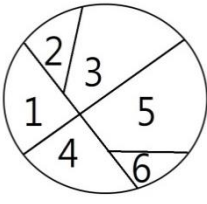
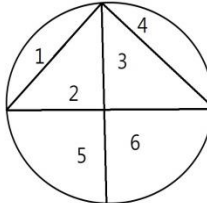
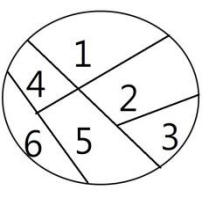
		$[(12+4+12)*2=56]$ 種]		
	030602 	1. 1→2→3→4→5→6(12*6=72種) 2. 1→3→5→6(12*6=72種)	1. 平手 2. 先手輸	先手塗奇數，後手塗偶數，平手。先塗三個奇數再塗一個偶數或先塗三個偶數再塗一個奇數，先手輸。
7塊	030701 	1. 1→2→4→5(14+16*5+6=100種) 2. 1→2→3→5→7(9*3+12=39種) 3. 2→1→4→3→6→5(48*3+1+1=146種) 4. 1→2→3→4→5→6→7(36*4=144種)	1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸 4. 平手	塗4或7輸的機率較高。

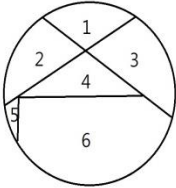
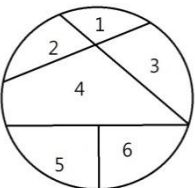
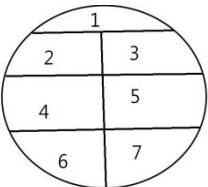
#### 4.4 線(4~11塊)

區塊	圖形	塗色順序	結果	分析
----	----	------	----	----

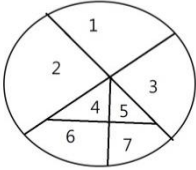
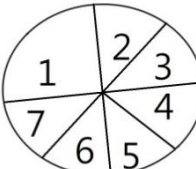
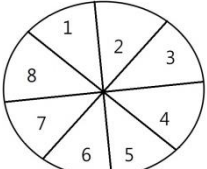
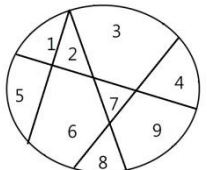
4 塊	040401 	1. 4→2, 1→3 (2*2=4 種) 2. 4→3→2→1 (2+2+2+2=8 種)	1. 先手輸 2. 平手	後手塗先手對角, 先手輸。 後手塗先手隔壁, 平手。
	040402 	1. 1→3 (1+3+1+3=8 種) 2. 2→1→4, 2→3→4。 (2*2=4 種)	1. 先手輸 2. 先手贏	不論先後手, 先塗 1 或 3 的人, 就會輸。
	040403 	1. 1→4, 2→3, 3→2, 4→1。 (2*2=4 種) 2. 1→2→4→3 (2+2+2+2=8 種)	1. 先手輸 2. 平手	後手塗先手對角, 先手輸。 後手塗先手隔壁, 平手。
5 塊	040501 	1. 1→3→5 5→3→1(2 種) 2. 1→2→3→5 (6+10+4+10+6=36 種) 3. 1→2→3→4→5 (4+4+4=12 種)	1. 先手贏 2. 先手輸 3. 平手	平手是後手塗在先手的隔壁。 先手贏是先手塗兩側, 後手塗在空一格。 先手輸是先手塗中間, 後手塗在空一格。

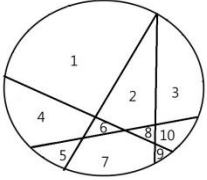
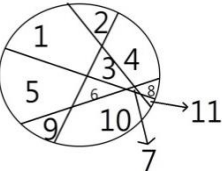
<p>040502</p> 	<p>1. 3→1, 3→2 3→4, 3→5 (4種)</p> <p>2. 1→3→2 (3*4=12種)</p> <p>3. 1→2→4→5 (6*4=24種)</p>	<p>1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸</p>	<p>絕對不要塗3。</p>
<p>040503</p> 	<p>1. 1→2, 1→3, 1→4, 1→5, 4→2, 5→3 (6種)</p> <p>2. 2→1→3 (4+4+1+1=10種)</p> <p>3. 2→3→4→5 (2+2+2+2=8種)</p>	<p>1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸</p>	<p>絕對不要塗1。</p>
<p>040504</p> 	<p>1. 1→5 (1+1+4+1+1=8種)</p> <p>2. 1→3→5, 2→3→4。 (2*2=4種)</p> <p>3. 1→2→5→4 (2+2+2+2=8種)</p>	<p>1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸</p>	<p>絕對不要塗3。</p>
<p>040505</p> 	<p>1. 3→1, 3→2, 3→4, 3→5 (4種)</p> <p>2. 1→3→4(8種)</p> <p>3. 1→2→4→5</p>	<p>1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸</p>	<p>只要塗3一定會輸。</p>

		(4+4+4+4=16 種)		
6 塊	040601 	1. 1→2→5→4(14+16+14+14+14+16=88 種)	1. 先手輸	先手必輸。
	040602 	1. 1→3→5， 4→2→6。 (2*2=4 種) 2. 4→1→5→6 (6+6+8+6+6+8=40 種) 3. 1→2→4→6→5 (7+1+4+7+1+4=24 種) 4. 5→6→3→2→1→4 (12*3*2=72 種)	1. 先手贏 2. 先手輸 3. 先手贏 4. 平手	塗 2 或 3 輸的機率比較高。
	040603 	1. 5→1(1 種) 2. 1→5→3 (2+2=4 種) 3. 1→2→3→6 (12+14+9+14+8+10=67 種) 4. 1→2→3→4→6 (4+4+4=12 種)	1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸 4. 先手贏	塗 5 必輸。

	<p>040604</p> 	<p>1. 5→4→1 (1*2=2 種)</p> <p>2. 1→2→6→3 (10+16+14+4+8+13=65 種)</p> <p>3. 1→2→4→3→5 (8+8+8=24 種)</p>	<p>1. 先手贏</p> <p>2. 先手輸</p> <p>3. 先手贏</p>	<p>塗 2 或 3 輸的機率較高。</p>
	<p>040605</p> 	<p>1. 4→1(1 種)</p> <p>2. 1→4→5 (2+1=3 種)</p> <p>3. 1→2→4→3 (22+4*2+9+10*2=59 種)</p> <p>4. 2→1→3→4→5 (16*2+8*2=48 種)</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手贏</p> <p>3. 先手輸</p> <p>4. 先手贏</p>	<p>塗 4 者必輸。</p>
7 塊	<p>040701</p> 	<p>1. 1→2→4→7 (12+18+18+8+8+16+16=96 種)</p> <p>2. 1→2→5→7→6 (8+0+0+4+4+4+4=24 種)</p> <p>3. 1→2→4→5→7→6 (24+24+23+36+37+36+36=216 種)</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手贏</p> <p>3. 先手輸</p>	<p>同時塗到 2 和 7 者，必輸。</p>



	<p>040702</p> 	<p>1. 1→2→4→7 (8+34*2+19*2+18*2=150 種)</p> <p>2. 1→2→4→3→7 (32+16*2+16*2=96 種)</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手贏</p>	<p>塗 2 或 3 輸的機率比較高。</p>
	<p>040703</p> 	<p>1. 1→3→5→6</p> <p>2. 1→2→3→4→5→6</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手輸</p>	<p>先手必輸。</p>
8 塊	<p>040801</p> 	<p>1. 1→3→5→7</p> <p>2. 1→2→3→4→5→6</p> <p>3. 1→2→3→4→5→6→7→8</p>	<p>1. 先手輸</p> <p>2. 先手輸</p> <p>3. 平手</p>	<p>若塗對手的空一格的地方先手輸，先手塗奇數，後手塗偶數，平手。</p> <p>先塗三個奇數再塗一個偶數或先塗三個偶數再塗一個奇數，先手輸。</p>
9 塊	<p>040901</p> 	<p>1. 2→5→7→4→8</p> <p>2. 4→7→8→2→1→5</p> <p>3. 1→2→7→5→8→9→4</p> <p>4. 1→2→3→4→6→</p>	<p>1. 先手贏</p> <p>2. 先手輸</p> <p>3. 先手贏</p> <p>4. 先手輸</p> <p>5. 平手</p>	<p>塗 6 輸的機率較高。</p>

		$5 \rightarrow 9 \rightarrow 7$ $5. 4 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow$ $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5$		
10 塊	041001 	1. $1 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow$ 9 2. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow$ $10 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8$	1. 先手輸 2. 先手贏	塗 7 和 2 輸的機 率較高。
11 塊	041101 	1. $8 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 10$ $\rightarrow 11$ 2. $2 \rightarrow 5 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow 3$ $\rightarrow 10 \rightarrow 9$ 3. $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow$ $9 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 7$	1. 先手輸 2. 先手贏 3. 先手輸	塗 10 和 3 輸的 機率較高。

## 五、研究結果與討論

### (一) 塗色的發現

1. 等分切割的發現：偶數塊只需使用 2 種顏色，奇數塊需使用 3 種顏色。

2. 不等分切割的發現：

(1) 最多只需 4 種顏色。

(2) 結構相同(分析每個區塊對應幾塊)，需要塗的顏色種類就會相同。

3. 切割的發現：

我們在做報告的時候發現：

(1) 1 線最多會有 2 塊， $a(1) = 2$ 。

(2) 2 線最多會有 4 塊， $a(2) = a(1) + 2 = 4$ 。

(3) 3 線最多會有 7 塊， $a(3) = a(2) + 3 = 7$ 。

(4) 4 線最多會有 11 塊， $a(4) = a(3) + 4 = 11$ 。

(5)5 線最多會有 16 塊， $a(5) = a(4) + 5 = 16$ 。

(6)6 線最多會有 22 塊， $a(6) = a(5) + 6 = 22$ 。

因此，我推論出他們的公式應該是： $a(n) = a(n-1) + n$ 。

## (二)攻略

1. 結構相同，遊戲的攻略相同。

(1)2 塊 1:1，平手。例：010201、020201。

(2)2 塊 1:1，1 塊 1:2，先手輸或平手。例：020301、020302。

(3)全部 1:2，先手輸。例：020303、030301。

(4)全部 1:2，先手輸或平手。例：020401、030403、030406、040401、040403。

(5)2 塊 1:2，2 塊 1:3，先手贏或先手輸。例：030402、030404、040402。

(6)3 塊 1:2，2 塊 1:3，先手贏或先手輸。例：030501、030504、030505。

2. 切蛋糕(由圓心向圓周切成不同數量的區塊)的結構，可分為偶數和奇數來推論：

(1)從 3 塊、5 塊的結果都是先手必輸，我們推論往後的奇數塊圖形也都是先手必輸。

(2)從 4 塊、6 塊的結果是先手輸或平手，我們推論往後的偶數塊圖形也是如此，先手無法獲勝，頂多平手。

3. 夾心餅乾(一定有 2 個 1:1 的區塊)的結構，我們發現：

(1)3 塊平手或先手輸。

(2)從 4 塊平手機率高，5 塊先手輸機率高，我們推論偶數塊平手機率高，奇數塊先手輸機率高。

4. 先手攻略：

(1)先手要避免畫成這些圖形：020303、030301、030506、040601、040703。

(2)若無法避免畫成(1)的圖形，則盡量畫成以下這些圖形(因為至少有平手的機會)：020301、020302、020401、030403、030406、030602、040401、040403、040801。

(3)這是一個先手輸的機率較高的遊戲，所以先手要盡量畫成以下這個圖形(030405)，因為這是唯一一個先手贏的機率高達 80%的圖形。

### (三)檢討與建議

1. 從 040703 開始以後的圖形，一方面是因為時間不夠，另一方面是因為太複雜了，所以我們就沒有繼續計算。
2. 因為時間不夠，不然我們建議可以把輸、贏和平手的機率都列出來，這樣會更一目瞭然。

### 六、評鑑與檢討

A 同學：

當初一開始我們會做這個「圓圈塗色」獨立研究的原因是因為那時候我們在課堂上討論了很久，都討論不出一個主題，所以老師就叫我和學妹一人回去想一個主題，下一次上課再一起討論。於是，我回家想了很久，終於想到了這個主題。做到一半的時候，突然覺得好後悔做這個題目，因為實在是太辛苦了，不過，都已經做到這裡了，也只好把它給做完了。

B 同學：

一開始，我和學長都不知道圓圈塗色的原理是「四色定理」，老師也故意不告訴我們，所以我們就訂了很多顏色的順序，但報告做到後面就發現最多只要四種顏色就能塗完，最後，老師才告訴我們這個原理，並詳細介紹，讓我們能更了解。在做到一半的時候，我和學長都有想要放棄的時候，但老師告訴我們，做事情要有始有終，不能放棄，於是我和學長就把報告完成了。

### 七、參考資料

1. 國小數學南一版一上 7~2 認識三角形、正方形、長方形和圓形
2. 國小數學南一版二上 8~5 乘法的應用

3. 國小數學南一版一上單元三分與合
4. 世茂出版社(2012)。東大生為小學生設計的 23 堂數學課——3 步驟教孩子學數學需要的六種能力。
5. 第 49 屆全國中小學科展數學科：圓與規-塗色終極版。