彰化縣107學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：32001

組別：

□國小高年級組（四、五、六年級）

■國中組

■數學類

□自然與生活科技類

□人文社會類

作品名稱：利用兩圓相切探討多邊形內外循環之規律

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予評審並退件。

彰化縣107學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（內文）

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

獨立研究是資優教育具特色的一環，參與獨立研究作品甄選更是本校推動科學教育、語文教育中的一項活動。本校的獨立研究課程分成語文與數理兩類提供通過語文組、數理組及一般智能組學生修習；在老師引導下，透過獨立研究過程的學習，訓練學生蒐集資料、分析資料、統整與發表之能力；並培養學生對研究領域之專精化程度與深入研究之精神。

(一)抽離式資優班課程中設立獨立研究、專題研究等相關課程:

七年級時讓資優生找出小組或個人感興趣的主題，進行研究。八年級時將更加強調研究之完整性，檢視報告進行充實與修改，增進研究報告撰寫與發表之能力。近幾年更將新興科技的智能車創作融入於課程中，提升學生的創作力；此外，輔導室亦會於每年寒暑假皆會辦理資優生的增能營隊。

(二)對一般學生辦理研究性社團:

本校利用社團活動時間及週六上午時間成立研究性社團(科展、獨立研究、網界博覽會、機器人程式語言、…)，延聘校內外專業、有經驗的老師，以團隊方式共同規劃、開辦相關研習課程。本校師生近幾年亦相當踴躍投入縣內辦理之獨立研究競賽，數學、自然與生活科技及人文社會類均曾獲獎，得獎學生會利用社團時間進行經驗分享與傳承。

(三)教師增能研習:

邀請獨立研究、科展相關領域教授、專家蒞校進行獨立研究、科展的講座，期待透過指導老師的增能研習，能有更好的能力與方式帶領學生深入探究、分析每一個議題。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

資優資源班的課程透過系統化的設計，讓學生從瞭解主題方向的擬定、資料的收集、問題的設定、資料的分析技巧、內容編輯…等，以培養學生探究的能力。無論是資優資源班學生或是一般生，只要有興趣者，指導老師會透過密集的引導、時間規劃的安排、小組協調，讓參與的學生能夠自主性地完成相關研究內容。針對資源不足之處，則由老師對外尋求協助，待作品完成後，協助學生製作簡報、訓練發表的技巧，讓學生從整個歷程中學到不少解決問題的能力。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

在暑假資優營的課程中，老師教導我們如何利用 Geogebra 軟體快速、正確地繪製幾何圖形，取代繁瑣的尺規作圖。而在兩圓位置關係單元中，課本一道題目:「(如圖 1-1)在ΔABC 中，已知圓 A、圓 B、圓 C 兩兩外切，且連心線$\overline{AB}=15$、$\overline{BC}=14$、$\overline{AC}=11$，請問圓 A、B、C 的半徑為何?」。我很好奇的是，如果給定任意一個三角形是不是皆能夠以三頂點為圓心畫出兩兩外切的圓呢?可以畫出幾組呢?四邊形是否也可以?有趣的是，如果相鄰兩圓彼此外切，則我們可以發現在三角形的邊上以 P 點當起始點，沿著三個圓外切所留下的軌跡(弧)繞行，在繞完三個邊後必能再次回到起始點 P($\overset{\frown}{PQ} \rightarrow \overset{\frown}{QR} \rightarrow \overset{\frown}{RP}$)。在上述的情況，都以外切進行思考方向，但我們知道圓的相切情形包括外切及內切兩種。若加入內切是否也能產生繞回原起始點的結果呢?於是我們就展開了一場圓與簡單幾何圖形的研究之旅。

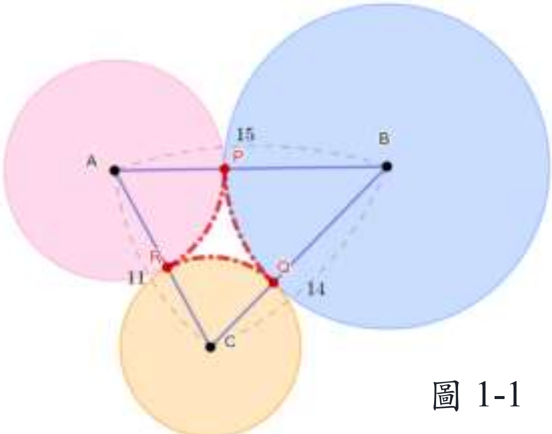

圖 1-1

二、擬定正式計畫、研究問題

及工作進度表

(一)擬定正式計畫與研究問題

1. 利用圓的內、外切關係找出三角形繞回原起始點方法。

2. 利用圓的內、外切關係找出四、五、六邊形繞回原起始點方法。

(二)工作進度表

預定進度甘梯圖	8/15 8/31	9/1 9/15	9/16 9/31	10/1 10/15	10/16 10/30	11/1 11/7	11/8 11/15	11/16 11/23
擬定研究問題								
尋找資源								
文獻整理與討論								
討論初步研究發現								
深入探討研究問題								
提出研究結果								
歸納研究結果								
進度累計（%）	10	20	35	50	70	80	90	100

三、彙整相關文獻

針對本研究想探討的主題進行了相關的文獻與書籍搜尋，其中在第 50 屆中小學科展《圓舞曲》一文中利用多邊形的頂點為圓心，按順(逆)時針方向依序畫弧，探討在 N 邊形中產生的回歸現象及規則，但此篇研究探討的回歸現象僅利用到了兩圓外切的軌跡來分析，而第 1070331 梯次小論文《被困住的「圓」桌武士》提出了將畫弧的軌跡延伸至邊的延長線上亦會出現回歸現象；從兩篇文獻得到的靈感，我們試想如果以兩圓位置關係中的外切與內切為基礎來探討此一現象，雖然變化的路徑數會增加許多，但可以得到更完整的結果。

四、資料分析

(一)名詞與符號釋義

1. **輪:**「第一輪」代表起始點沿圓弧繞，於各邊產生第一個交點

之軌跡；「第二輪」代表於各邊產生第二個交點之軌跡；「第 n 輪」代表於各邊產生第 n 個交點之軌跡。

2. **循環:**「一次循環」代表起始點沿圓弧軌跡沿同順(逆)時針方向繞經多邊形各邊一次後回到原起始點；「二次循環」則為起始點沿圓弧軌跡繞經多邊形各邊兩次後回到原起始點。
3. r_j:指以多邊形第 j 個頂點為圓心所取的半徑長度。例如: r_1代表多邊形第 1 個頂點所取的半徑長度。
4. r_{ij}:指在多邊形第 i 輪繞行軌跡中，以第 j 個頂點為圓心所取的半徑長度。例如: r_{21}代表在多邊形第 2 輪繞行軌跡中，以第 1 個頂點為圓心所取的半徑長度。
5. Geogebra 幾何圖形符號說明(如圖 4-1)
   (1) ▲:繞行軌跡之起始點。
   (2) ↖:繞行方向。
   (3) ●、●、●:第一輪、第二輪和第三輪繞行軌跡中，於多邊形各邊的交點。
   (4) 紅色、藍色、橘色粗體線:第一輪、第二輪和第三輪的繞行軌跡。

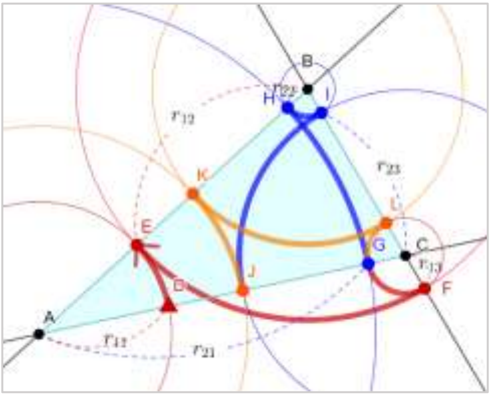

圖 4-1

(二)三角形中，利用圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法。

1. 相鄰兩圓內切與外切關係

C_A代表以 A 點為圓心，適當長為半徑所畫的圓。

情況 \ 相鄰兩圓	$C_A \to C_B$	$C_B \to C_C$	$C_C \to C_A$	是否能繞回
零個內切(皆外切)	外切	外切	外切	V
一個內切	外切	內切	外切	x
二個內切	內切	內切	外切	V
	內切	外切	內切	V
	外切	內切	內切	V
三個內切	內切	內切	內切	x

2. 路徑軌跡與說明

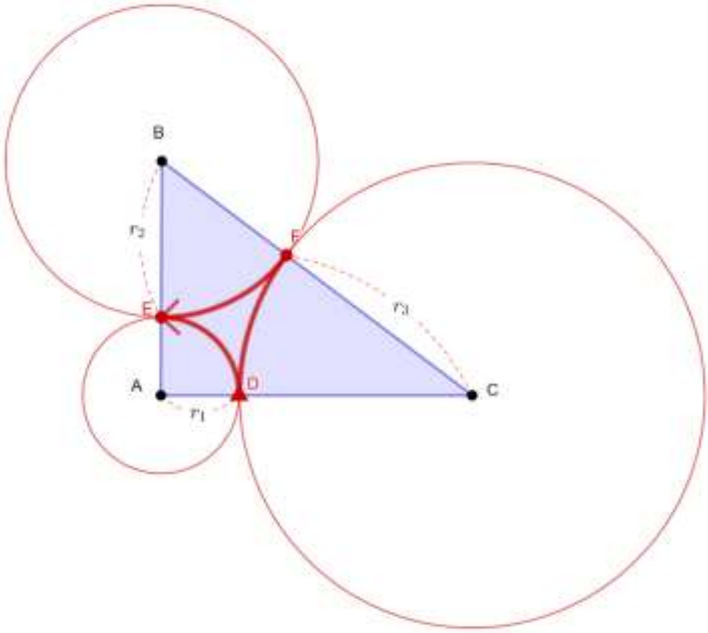

圖 4-2 零個內切(皆外切，一次循環)

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CA}=\mathrm{c}$

$$\text{則}\begin{cases} r_1+r_2=a-\text{①} \\ r_2+r_3=b-\text{②} \\ r_1+r_3=c-\text{③} \end{cases}$$

$$\text{①}+\text{②}+\text{③}:2(r_1+r_2+r_3)=a+b+c$$

$$r_1+r_2+r_3=\frac{a+b+c}{2}-\text{④}$$

$$\text{④}-\text{②}:r_1=\frac{a-b+c}{2}$$

$$\text{④}-\text{③}:r_2=\frac{a+b-c}{2}$$

$$\text{④}-\text{①}:r_3=\frac{-a+b+c}{2}$$

所以任意以 D、E、F 為起點，在三角形內部以逆(順)時針繞圓弧，則必能一次循環回到原起始點，軌跡如圖 4-2。

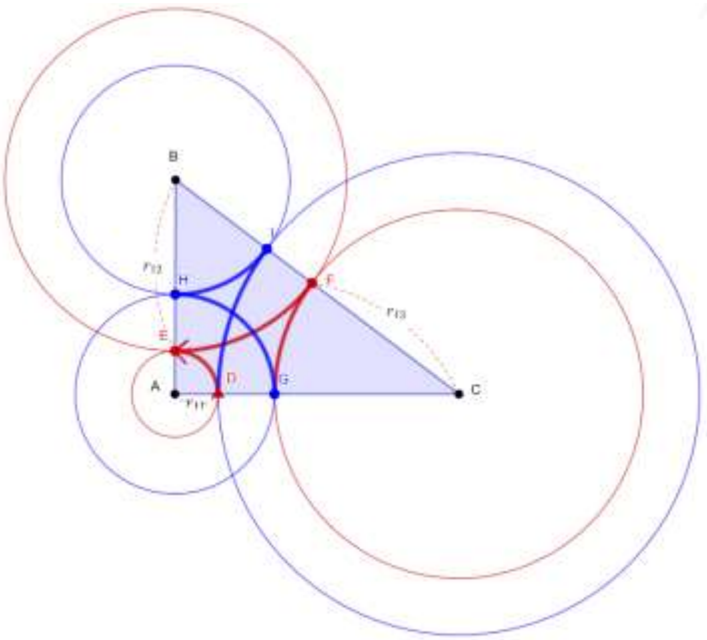

圖 4-3 零個內切(皆外切，二次循環)

$$\begin{cases} r_{11}+r_{12}=a-\text{①} \\ r_{12}+r_{13}=b-\text{②} \\ r_{13}+r_{21}=c-\text{③} \\ r_{21}+r_{22}=a-\text{④} \\ r_{22}+r_{23}=b-\text{⑤} \\ r_{23}+r_{11}=c-\text{⑥} \end{cases}$$

$\text{①}+\text{②}+\text{③}+\text{④}+\text{⑤}+\text{⑥}$:

$r_{11}+r_{12}+r_{13}+r_{21}+r_{22}+r_{23}=a+b+c$

由上可以得到恆等關係式$\begin{cases} r_{11}+r_{12}=a \\ r_{12}+r_{13}=b \\ r_{13}+r_{21}=c \end{cases}$

所以當$r_{11}\neq\frac{a-b+c}{2}$(一次循環)時，則必能二次循環回到原起始點，軌跡如圖 4-3。結合圖 4-2、圖 4-3 可以發現$r_1=\frac{r_{11}+r_{12}}{2}$，即二次循環之中點軌跡為一次循環軌跡。

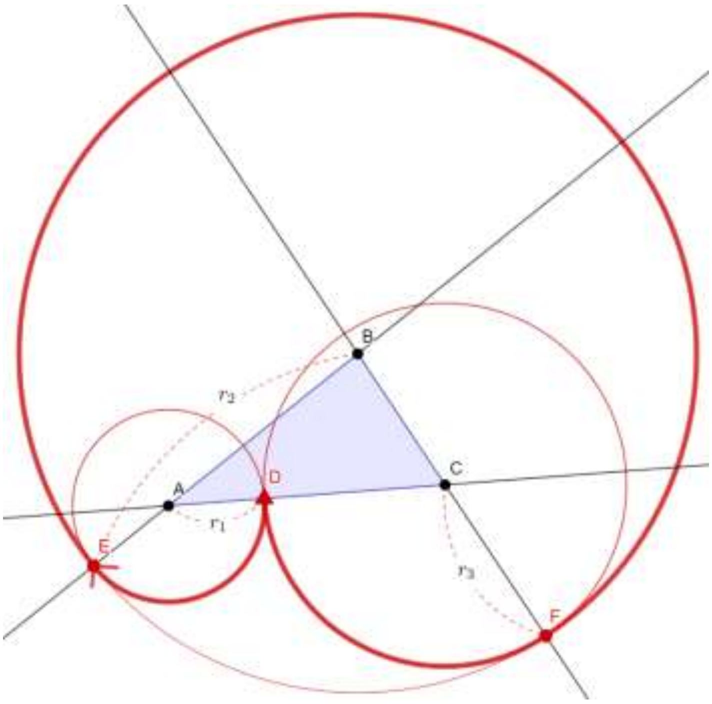

圖 4-4 二個內切(內→內→外，一次循環)

假設$\overline{AB} = a$，$\overline{BC} = \mathrm{b}$，$\overline{CA} = \mathrm{c}$

$$\text{則}\begin{cases} r_2 - r_1 = a - ① \\ r_2 - r_3 = b - ② \\ r_1 + r_3 = c - ③ \end{cases}$$

① + ② + ③:$2r_2 = a + b + c$

$$r_2 = \frac{a+b+c}{2} - ④$$

④代入①:$\dfrac{a+b+c}{2} - r_1 = a$，$r_1 = \dfrac{-a+b+c}{2}$

④代入②:$\dfrac{a+b+c}{2} - r_3 = b$，$r_3 = \dfrac{a-b+c}{2}$

此一次循環繞行軌跡如圖 4-4。

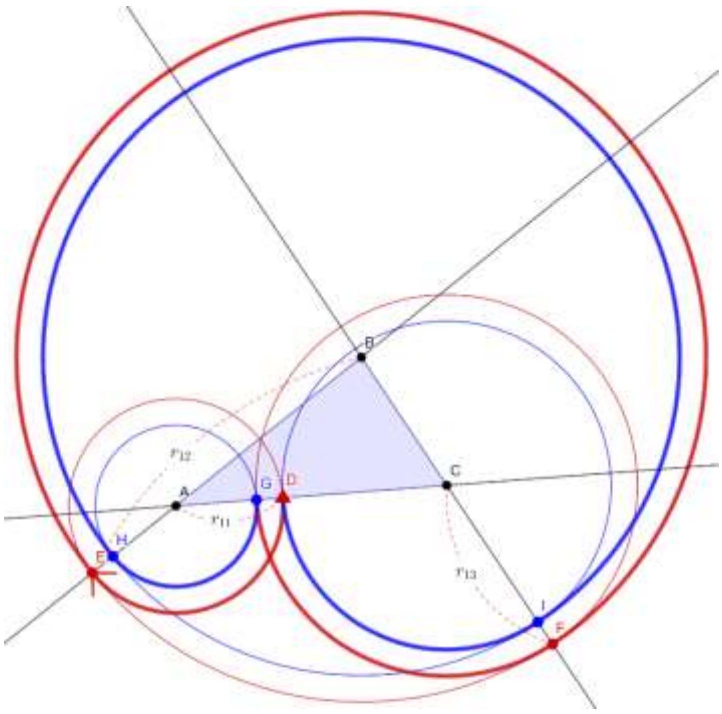

圖 4-5 二個內切(內→內→外，二次循環)

假設$\overline{AB} = a$，$\overline{BC} = \mathrm{b}$，$\overline{CA} = \mathrm{c}$

$$\text{則}\begin{cases} r_{12} - r_{11} = a - ① \\ r_{12} - r_{13} = b - ② \\ r_{13} + r_{21} = c - ③ \\ r_{22} - r_{21} = a - ④ \\ r_{22} - r_{23} = b - ⑤ \\ r_{23} + r_{11} = c - ⑥ \end{cases}$$

①+②+③+④+⑤+⑥:

$$2(r_{12} + r_{22}) = 2(a + b + c)$$

$$r_{12} + r_{22} = a + b + c(\text{恆等關係式})$$

假設$r_{12} = k$，

則依序可得各輪半徑長度，由圖 4-5 與下表可發現

$r_{31} = r_{11}$(第三輪半徑即為第一輪半徑)

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11} = -a + k$	$r_{21} = \mathrm{c} + b - k$	$r_{31} = -a + k$
	$r_{12} = k$	$r_{22} = a + b + c - k$	$r_{32} = k$
	$r_{13} = -b + k$	$r_{23} = a + \mathrm{c} - k$	$r_{33} = -b + k$

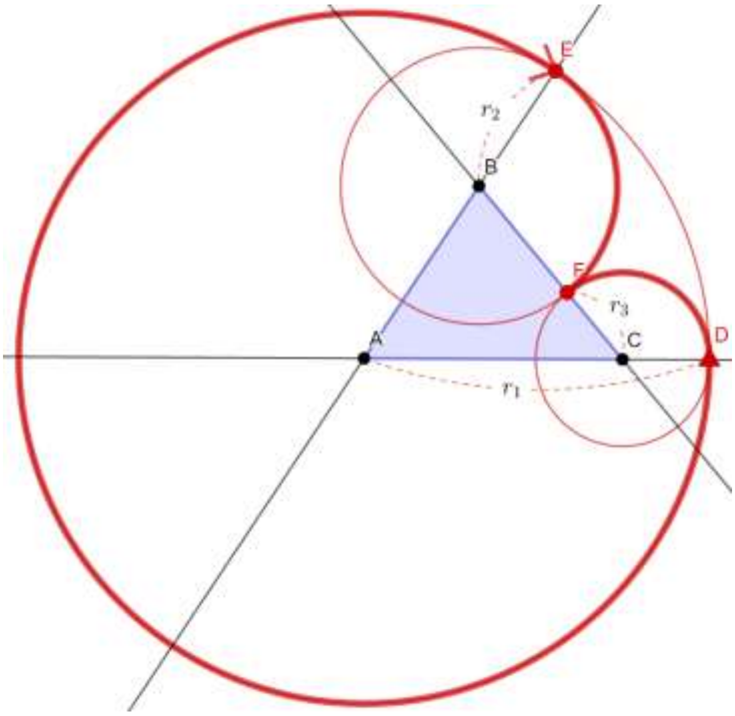

圖 4-6 二個內切(內→外→內，一次循環)

假設$\overline{AB} = a$，$\overline{BC} = b$，$\overline{CA} = c$

$$\text{則}\begin{cases} r_1 - r_2 = a - ① \\ r_2 + r_3 = b - ② \\ r_1 - r_3 = c - ③ \end{cases}$$

$① + ② + ③ : 2r_1 = a + b + c$

$\Rightarrow r_1 = \dfrac{a+b+c}{2} - ④$

④代入①:$\dfrac{a+b+c}{2} - r_2 = a$，$r_2 = \dfrac{-a+b+c}{2}$

④代入③:$\dfrac{a+b+c}{2} - r_3 = c$，$r_3 = \dfrac{a+b-c}{2}$

此一次循環繞行軌跡如圖 4-6。

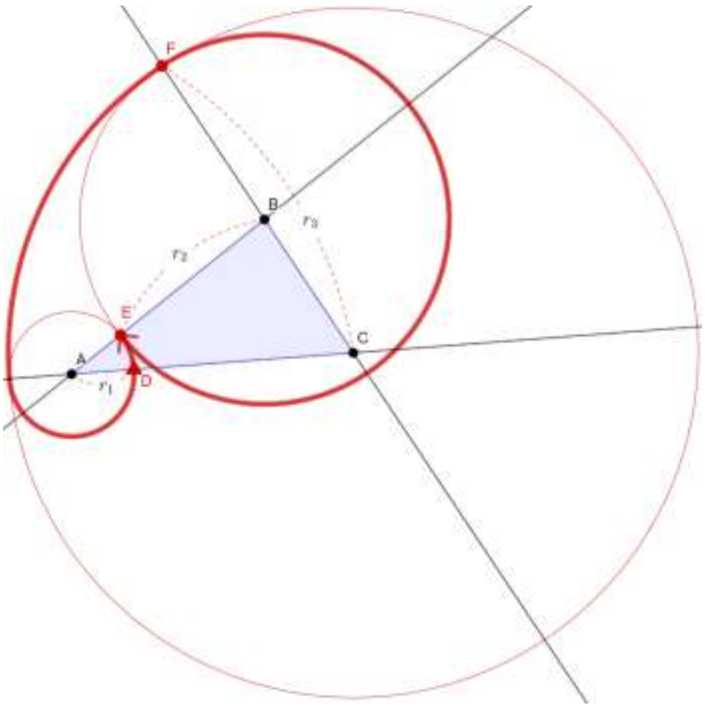

圖 4-7 二個內切(外→內→內，一次循環)

假設$\overline{AB} = a$，$\overline{BC} = b$，$\overline{CA} = c$

$$\text{則}\begin{cases} r_1 + r_2 = a - ① \\ r_3 - r_2 = b - ② \\ r_3 - r_1 = c - ③ \end{cases}$$

$① + ② + ③ : 2r_3 = a + b + c$

$$r_3 = \frac{a+b+c}{2} - ④$$

④代入②:$\dfrac{a+b+c}{2} - r_2 = b$，$r_2 = \dfrac{a-b+c}{2}$

④代入③:$\dfrac{a+b+c}{2} - r_1 = c$，$r_1 = \dfrac{a+b-c}{2}$

此一次循環繞行軌跡如圖 4-7。

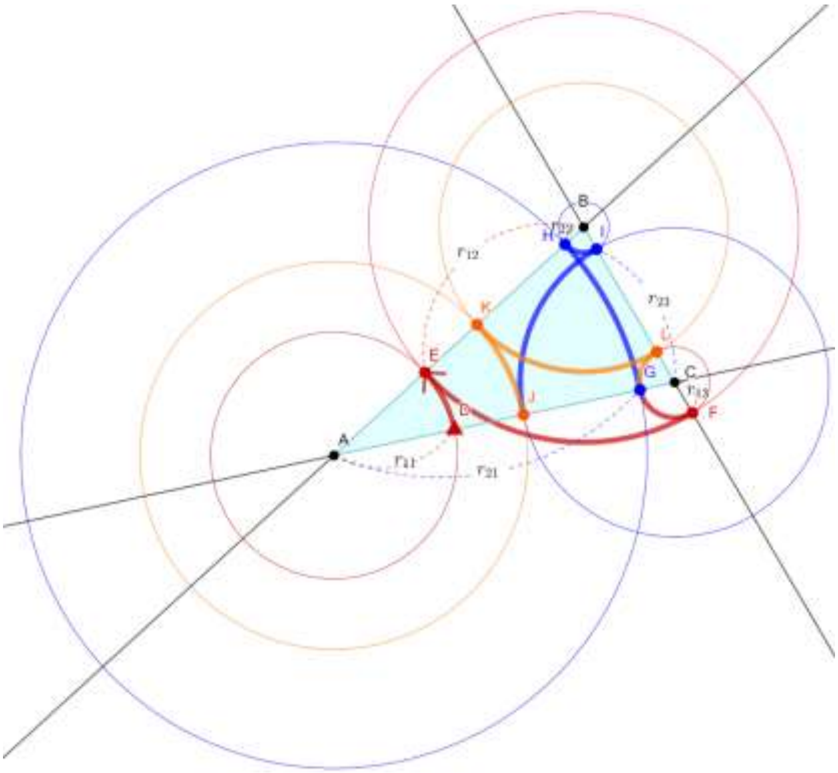

圖 4-8 一個內切
（外→內→外，無法循環）

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CA}=\mathrm{c}$ 且起始半徑$r_{11}=x$，由圖 4-8 推得各輪半徑長為:

(1)第一輪

$r_{11}=x$

$r_{12}=-x+a$

$r_{13}=-x+a-\mathrm{b}$

(2)第二輪，承上可以得知

$r_{21}=\mathrm{c}-(-x+a-\mathrm{b})=x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}$

$r_{22}=\mathrm{a}-(x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c})=-x+2a-b-c$

$r_{23}=\mathrm{b}-(-x+2a-\mathrm{b}-\mathrm{c})=x-2a+2b+c$

(3)第三輪，承上可以得知

$r_{31}=\mathrm{c}-(x-2a+2\mathrm{b}+\mathrm{c})=-x+2a-2b$

$r_{32}=\mathrm{a}-(-x+2a-2\mathrm{b})=x-a+2b$

$r_{33}=\mathrm{b}-(x-a+2\mathrm{b})=-x+a-b$

(4)第四輪，承上可以得知

$r_{41}=\mathrm{c}-(-x+a-\mathrm{b})=x-a+b+c=r_{21}$

$r_{42}=\mathrm{a}-(x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c})=-x+2a-b-c=r_{22}$

$r_{43}=\mathrm{b}-(-x+2a-\mathrm{b}-\mathrm{c})=x-2a+2b+c=r_{23}$

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{31}=-x+2a-2\mathrm{b}$	$r_{41}=x-a+b+c=r_{21}$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=-x+2a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$	$r_{32}=x-a+2b$	$r_{42}=-x+2a-\mathrm{b}-\mathrm{c}=r_{22}$
	$r_{13}=-x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x-2a+2b+c$	$r_{33}=-x+a-b$	$r_{43}=x-2a+2b+c=r_{23}$

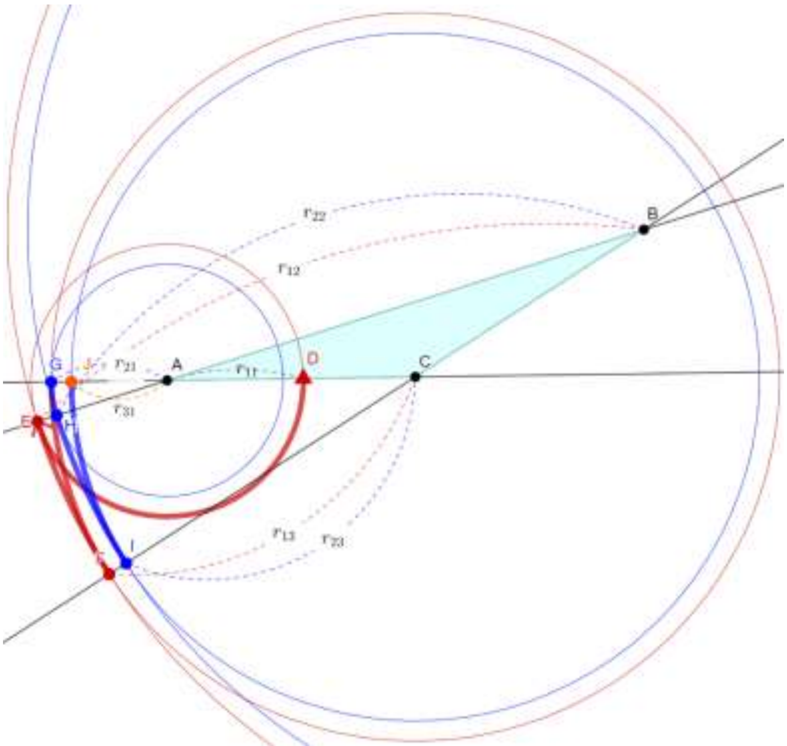

圖 4-9 三個內切(無法循環)

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CA}=\mathrm{c}$ 且起始半徑$r_{11}=x$，由圖 4-9 推得各輪半徑長為:

(1)第一輪

$r_{11}=x$

$r_{12}=x+a$

$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$

(2)第二輪，承上可以得知

$r_{21}=(x+a-\mathrm{b})-\mathrm{c}=x+(\mathrm{a}-\mathrm{b}-\mathrm{c})$

$r_{22}=(x+a-\mathrm{b}-\mathrm{c})+a=x+2a-b-c$

$r_{23}=(x+2a-\mathrm{b}-\mathrm{c})-b=x+2a-2b-c$

(3)第三輪，承上可以得知

$r_{31}=(x+2a-2\mathrm{b}-\mathrm{c})-c=x+2(a-b-c)$

$r_{32}=(x+2a-2\mathrm{b}-2\mathrm{c})+a=x+3a-2b-2c$

$r_{33}=(x+3a-2\mathrm{b}-2\mathrm{c})-b=x+3a-3b-2c$

(4)第四輪，承上可以得知

$r_{41}=(x+3a-3b-2c)-c=x+3(a-b-c)$

$r_{42}=(x+3a-3b-3c)+a=x+4a-3b-3c$

$r_{43}=(x+4a-3\mathrm{b}-3\mathrm{c})-b=x+4a-4b-3c$

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+(\mathrm{a}-\mathrm{b}-\mathrm{c})$	$r_{31}=x+2(a-b-c)$	$r_{41}=x+3(a-b-c)$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b-c$	$r_{32}=x+3a-2b-2c$	$r_{42}=x+4a-3b-3c$
	$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x+2a-2b-c$	$r_{33}=x+3a-3b-2c$	$r_{43}=x+4a-3b-3c$

公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$　　公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$　　公差$=a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$

◆ 小結論

為突破文獻所探討回歸現象的不完整，故我們決定透過自己的想法，即利用兩圓位置關係中的兩種相切情形(外切、內切)來探討三角形內外的循環現象。藉由 GeoGebra 繪製圖形，將 **0 內切**、**1 內切 2 外切**、**2 內切 1 外切**，以及 **3 內切**，四種情形逐一討論後，將結果整理如下:

1. 可以一次或二次循環回到原起始點

   (1) 0 內切(3 外切)

   在 3 個圓皆為外切情形下，必能完成一次或二次循環回到原起始點；此時循環軌跡必為全在三角形內部或全在外部。

   (2) 2 內切 1 外切

   內切→外切→內切、內切→內切→外切、外切→內切→內切皆可完成；此時循環軌跡會有部分在三角形內部及外部。

2. 無法回到原起始點

   (1) 1 內切 2 外切

   $r_{41} = x - a + b + c = r_{21}$，第四輪的第一個半徑恰與第二輪的第一個半徑等長，接下來點繞的路徑會與第二輪及第三輪產生重合，故無法繞回原起始點。

   (2) 3 內切

   各輪的起始半徑長度等值變短(成等差)，距離原起始點越來越近，但無法與原起始點重合，即無法產生循環。

發現

探討三角形內外循環現象時，我們實際繪圖時難以第一次就找到一次循環回原點的情況，但只要能完成二次循環，則必能找尋軌跡中點完成一次循環。同樣的，能完成一次循環，也必存在二次循環的現象。

（三）四邊形中，利用圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

1. 相鄰兩圓內切與外切關係

情況　　相鄰兩圓	$C_A \to C_B$	$C_B \to C_C$	$C_C \to C_D$	$C_D \to C_A$	是否能繞回
零個內切(皆外切)	外切	外切	外切	外切	不一定
一個內切	內切	外切	外切	外切	V
	外切	內切	外切	外切	V
	外切	外切	內切	外切	V
	外切	外切	外切	內切	V
二個內切	內切	內切	外切	外切	不一定
三個內切	外切	內切	內切	內切	V
	內切	外切	內切	內切	V
	內切	內切	外切	內切	V
	內切	內切	內切	外切	V
四個內切	內切	內切	內切	內切	不一定

2. 路徑軌跡與說明

◆ 兩組對邊長度相加等值

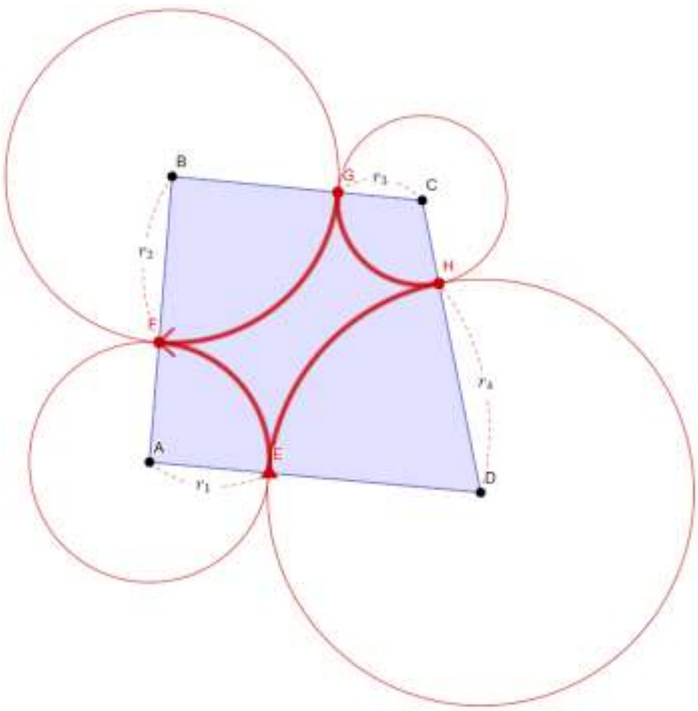

圖 4-10 零個內切(皆外切，一次循環)

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DA}=d$

$$\text{則}\begin{cases} r_1+r_2=a - ① \\ r_2+r_3=b - ② \\ r_3+r_4=c - ③ \\ r_1+r_4=d - ④ \end{cases}$$

① + ② + ③ + ④:

$$2(r_1+r_2+r_3+r_4)=a+b+c+d$$

$$r_1+r_2+r_3+r_4=\frac{a+b+c+d}{2} - ⑤$$

⑤ − ①:$r_3+r_4=\frac{-a+b+c+d}{2}$

$$\Rightarrow c=\frac{-a+b+c+d}{2}$$

$\Rightarrow a+c=b+d$

也就是說$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}$。由此可知，若四邊形兩組對邊長度相加等值，則能完成一次循環，軌跡如圖 4-10。

◆ 兩組對邊長度相加不等值

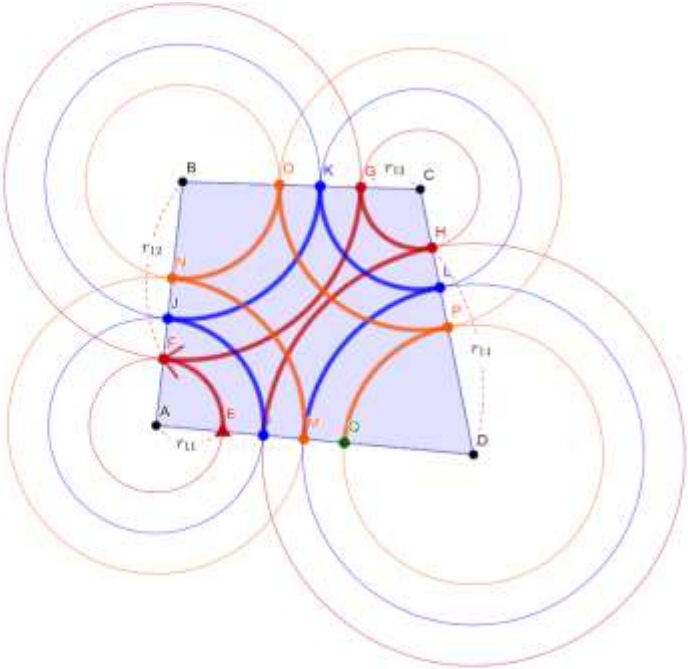

圖 4-11 零個內切(皆外切，無法循環)

接續上述證明，且觀察圖 4-11 我們可以得下列關係式

$$r_{11}+r_{12}+r_{13}+r_{14}$$
$$=r_{21}+r_{22}+r_{23}+r_{24}$$
$$=\cdots$$
$$=r_{n1}+r_{n2}+r_{n3}+r_{n4}\neq\frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

換句話說，若$a+c\neq b+d$則永遠無法完成循環回到原起始點，軌跡如圖 4-11。

◆ 兩組對邊長度相加不等值

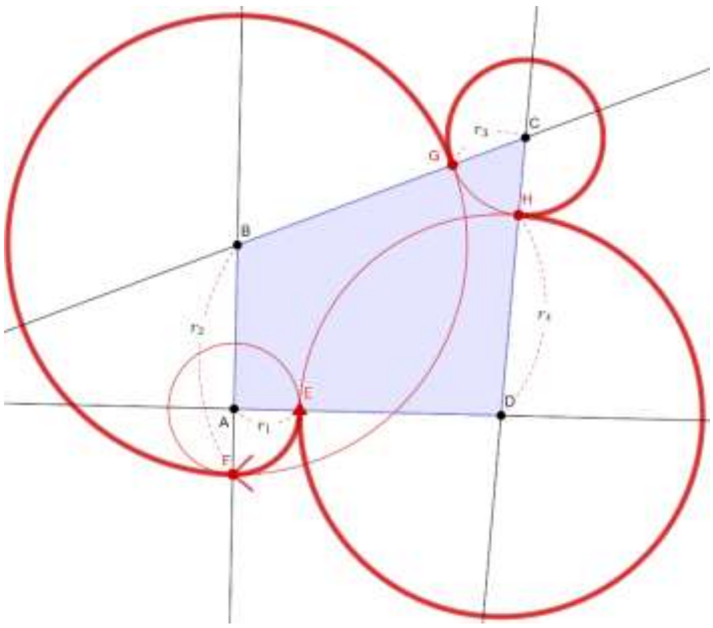

圖 4-12 一個內切

(內→外→外→外，一次循環)

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CD}=\mathrm{c}$，$\overline{DA}=\mathrm{d}$

$$\text{則}\begin{cases}r_2-r_1=a-①\\ r_2+r_3=b-②\\ r_3+r_4=c-③\\ r_1+r_4=d-④\end{cases}$$

①＋②＋③＋④:

$$2(r_2+r_3+r_4)=a+b+c+d$$

$$r_2+r_3+r_4=\frac{a+b+c+d}{2}-⑤$$

$$⑤-②:r_4=\frac{a-b+c+d}{2}-⑥$$

$$⑤-③:r_2=\frac{a+b-c+d}{2}-⑦$$

$$③-⑥:r_3=c-\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)=\frac{-a+b+c-d}{2}$$

$$⑦\text{代入}①:r_1=\frac{-a+b-c+d}{2}$$

此一次循環繞行軌跡如圖 4-12。

◆ 兩組對邊長度相加不等值

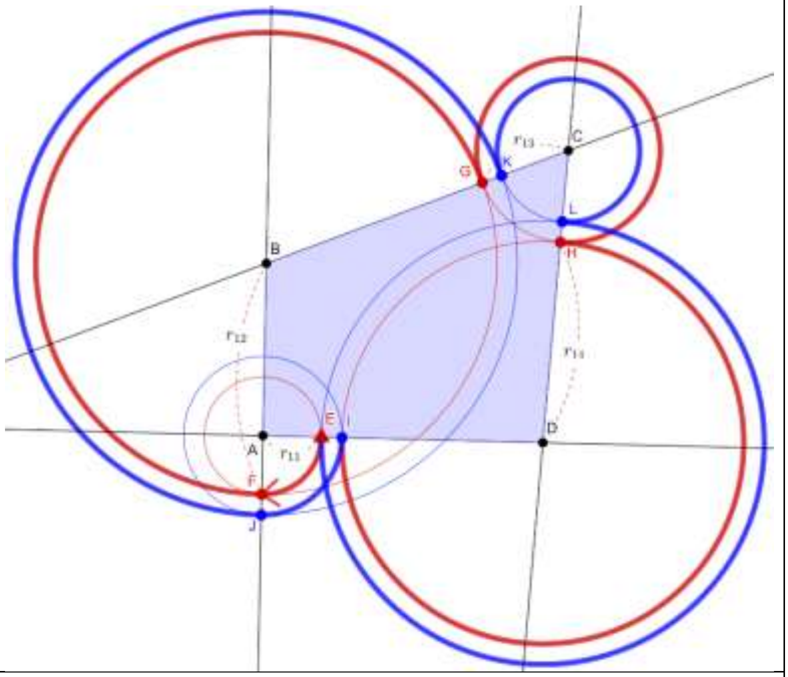

圖 4-13 一個內切

(內→外→外→外， 二次循環)

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CD}=\mathrm{c}$，$\overline{DA}=\mathrm{d}$ 且起始半徑$r_{11}=x$，由圖 4-13 推得各輪半徑長如下表:

		第一輪	第二輪	第三輪
半徑		$r_{11}=x$	$r_{21}=-x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$	$r_{31}=x$
		$r_{12}=x+a$	$r_{22}=-x+\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$	$r_{32}=x+a$
		$r_{13}=-x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=x+c-d$	$r_{33}=-x-a+\mathrm{b}$
		$r_{14}=x+a-b+c$	$r_{24}=-x+d$	$r_{34}=x+a-b+c$

同理可證，兩組對邊長度相加不等值下，下列含一個內切與三個內切之情況必能完成一次循環繞回原起始點，點繞的軌跡圖形呈現如圖 4-14 至圖 4-20:

➢ 一個內切

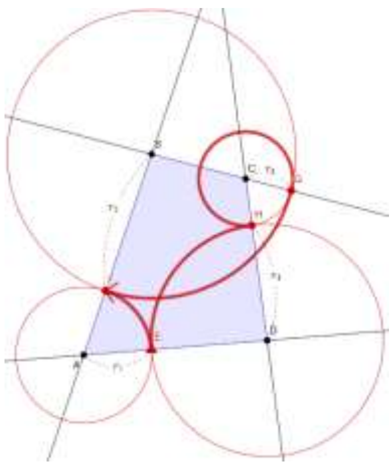

圖 4-14

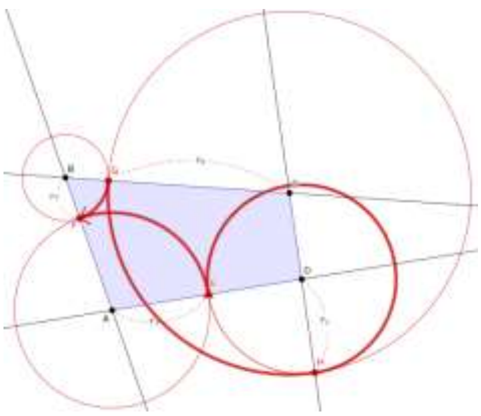

圖 4-15

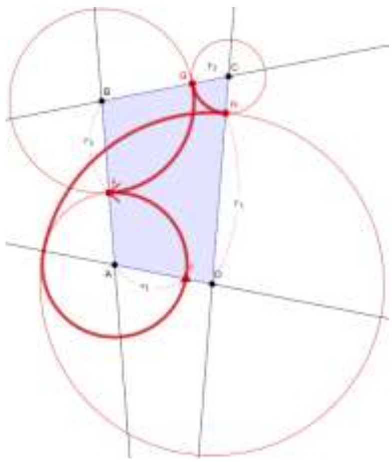

圖 4-16

➢ 三個內切

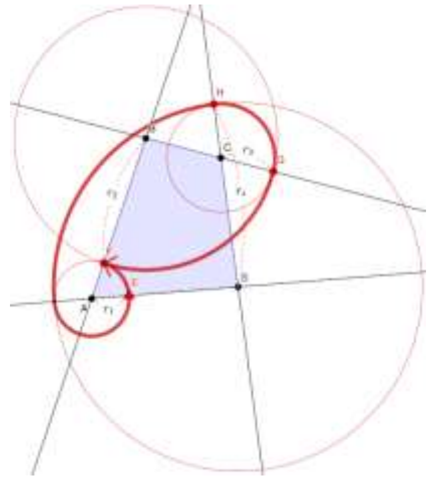

圖 4-17

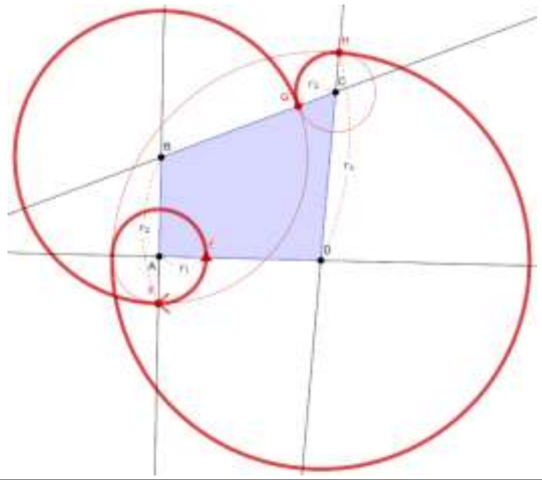

圖 4-18

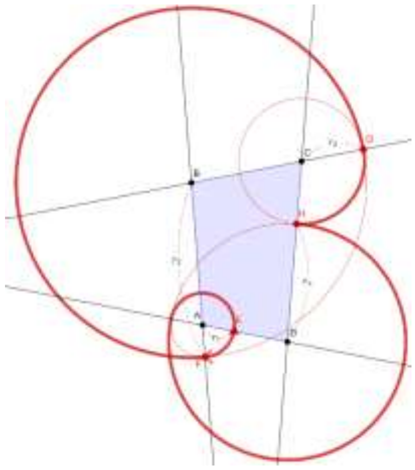

圖 4-19

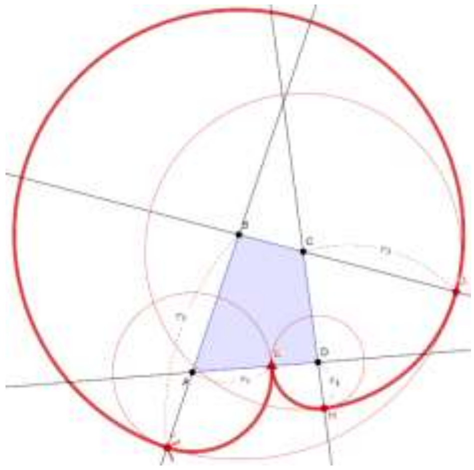

圖 4-20

◆ 兩組對邊長度相加不等值

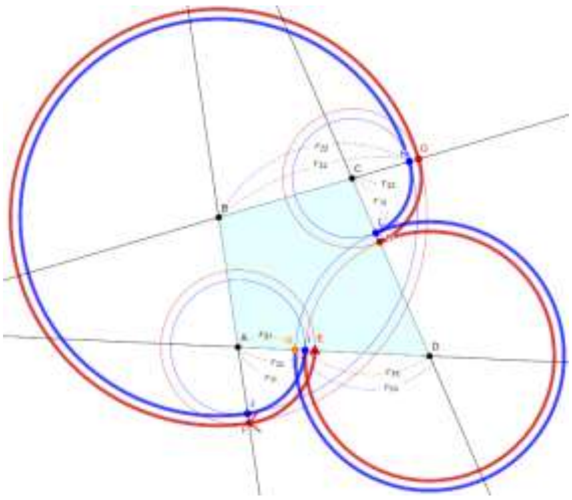

圖 4-21 二個內切 (內→內→外→外，無法循環)

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CD}=\mathrm{c}$，$\overline{DA}=\mathrm{d}$ 且起始半徑$r_{11}=x$，則由圖 4-21 可以推得各輪半徑長如下表:

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪
半	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+(a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d})$	$r_{31}=x+2(a-b-c+d)$	$r_{41}=x+3(a-b-c+d)$
徑	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b-c+d$	$r_{32}=x+3a-2b-2c+2d$	$r_{42}=x+4a-3b-3c+3d$

	$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x+2a-2b-c+d$	$r_{33}=x+3a-3b-2c+2d$	$r_{43}=x+4a-4b-3c+3d$
	$r_{14}=-x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=-x-2a+2b+2c-d$	$r_{34}=-x-3a+3b+3c-2d$	$r_{44}=-x-4a+4b+4c-3d$

◆ 兩組對

公差=$a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d}$

公差=$a-$

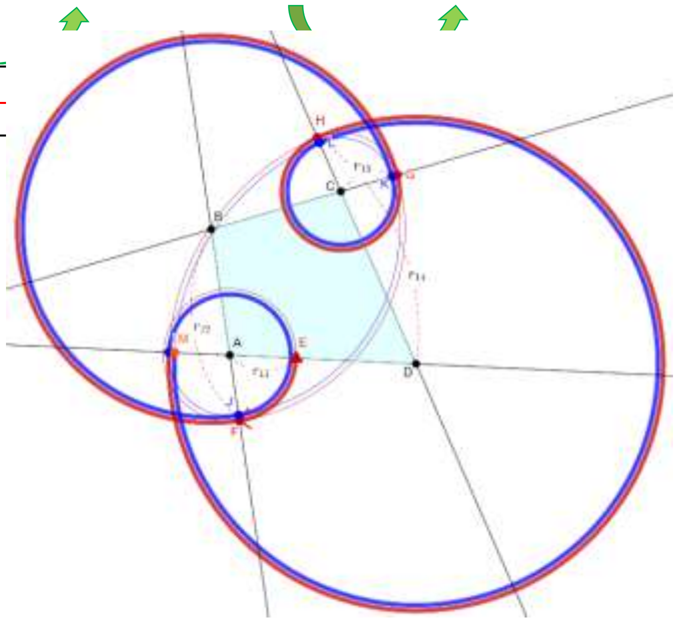

圖 4-22 四個內切(無法循環)

假設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CD}=\mathrm{c}$，$\overline{DA}=\mathrm{d}$且起始半徑$r_{11}=x$，則由圖 4-22 可以推得各輪半徑長如下表:

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+(a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d})$	$r_{31}=x+2(a-b+c-d)$	$r_{41}=x+3(a-b+c-d)$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b+c-d$	$r_{32}=x+3a-2b+2c-2d$	$r_{42}=x+4a-3b+3c-3d$
	$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x+2a-2b+c-d$	$r_{33}=x+3a-3b+2c-2d$	$r_{43}=x+4a-4b+3c-3d$
	$r_{14}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=x+2a-2b+2c-d$	$r_{34}=x+3a-3b+3c-2d$	$r_{44}=x+4a-4b+4c-3d$

公差=$a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d}$　　公差=$a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d}$　　公差=$a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d}$

◆ 小結論:

在四邊形中我們從 0 內切(4 外切)、1 內切 3 外切、2 內切 2 外切、3 內切 1 外切，以及 4 內切等五種狀況探究中，整理得到下列的結果:

一、 兩組對邊長度相加等值

不受內、外切情形之影響，皆能完成一次或兩次循環回到原起始點。

二、 兩組對邊長度相加不等值

1. 一次或二次循環回到原起始點:

(1)1 內切 3 外切(2)3 內切 1 外切

皆能從二次循環回到原點的結果中，找到能完成一次循環回到原

起始點的位置，且內、外切的順序不會影響繞回原起始點的結果。

2. 無法回到原起始點:

(1) 0 內切 4 外切(2)2 內切 2 外切(3) 4 內切 0 外切

各輪的起始半徑長度等值變短或變長(成等差)，距離原起始點越來越遠或越近，故無法與原起始點相交。

藉由觀察三角形與四邊形以頂點畫圓的內、外切不同情形，由兩點小結論，得到必能完成一次或二次循環回到原起始點的情況如下:

1. 三角形

0 個內切、2 個內切

2. 四邊形

(1) 兩組對邊長度相加等值:皆能完成

(2) 兩組對邊長度相加不等值:1 個內切、3 個內切

(四)五、六邊形可完成一次或二次循環的情況

1. 五邊形

依內、外切個數各舉一例，軌跡如圖 4-23 至圖 4-26

情況　相鄰兩圓	$C_A \to C_B$	$C_B \to C_C$	$C_C \to C_D$	$C_D \to C_E$	$C_E \to C_A$
零個內切(皆外切)	外切	外切	外切	外切	外切
二個內切	內切	內切	外切	外切	外切
四個內切	內切	內切	內切	內切	外切

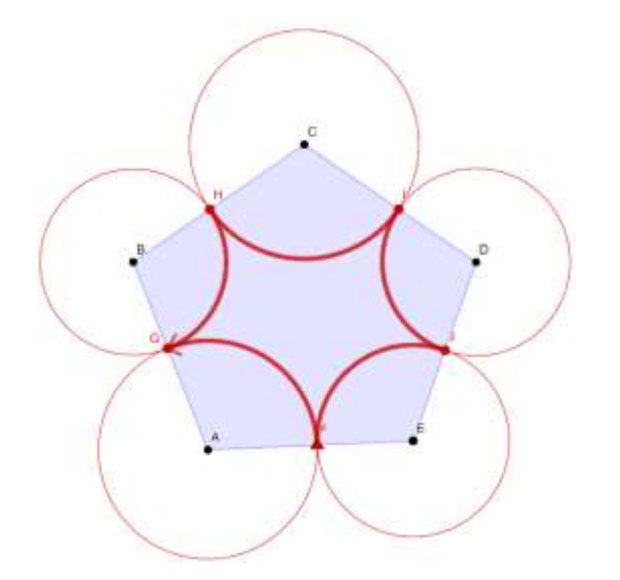

圖 4-23 零個內切(一次循環)

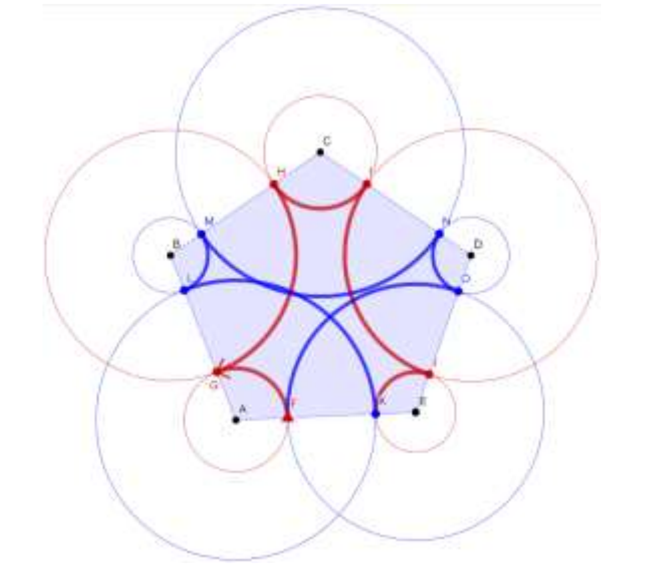

圖 4-24 零個內切(二次循環)

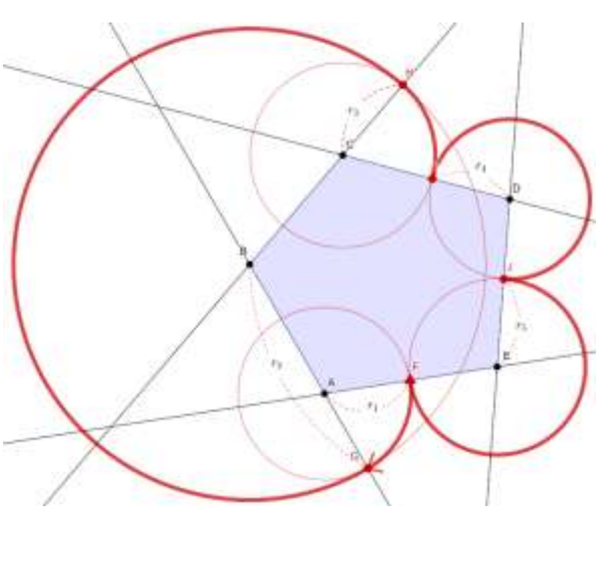

圖 4-25 二個內切(一次循環)

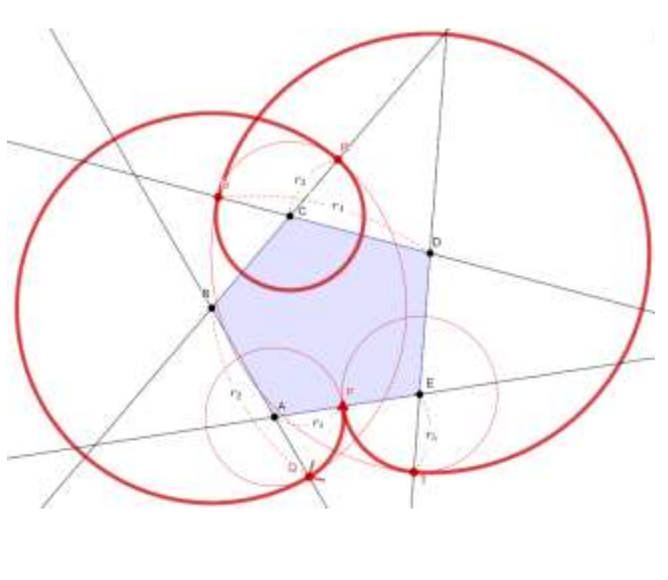

圖 4-26 四個內切(一次循環)

2.六邊形

(1)奇數邊長之和=偶數邊長之和($a+c+e=b+d+f$)

依偶數個內切個數各舉一例，軌跡如圖 4-27 至圖 4-30

情況 相鄰兩圓	$C_A \to C_B$	$C_B \to C_C$	$C_C \to C_D$	$C_D \to C_E$	$C_E \to C_F$	$C_F \to C_A$
零個內切(皆外切)	外切	外切	外切	外切	外切	外切
二個內切	內切	內切	外切	外切	外切	外切
四個內切	內切	內切	外切	內切	內切	外切
六個內切	內切	內切	內切	內切	內切	內切

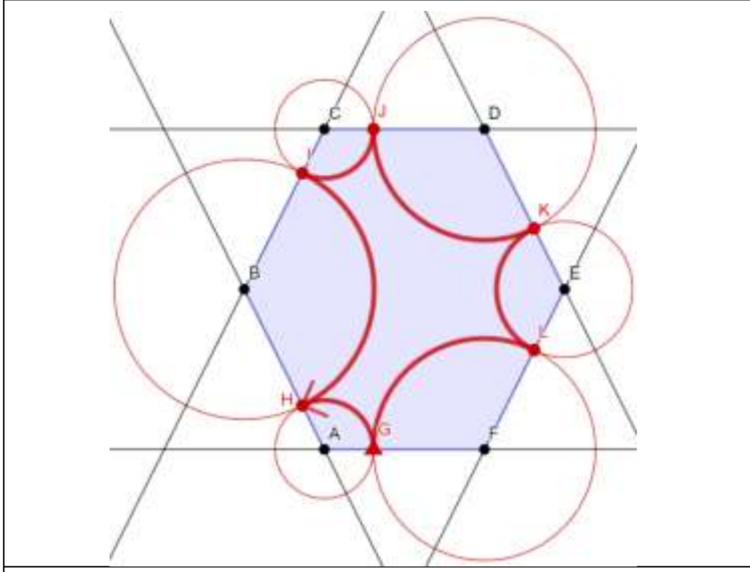

圖 4-27 零個內切(皆外切)

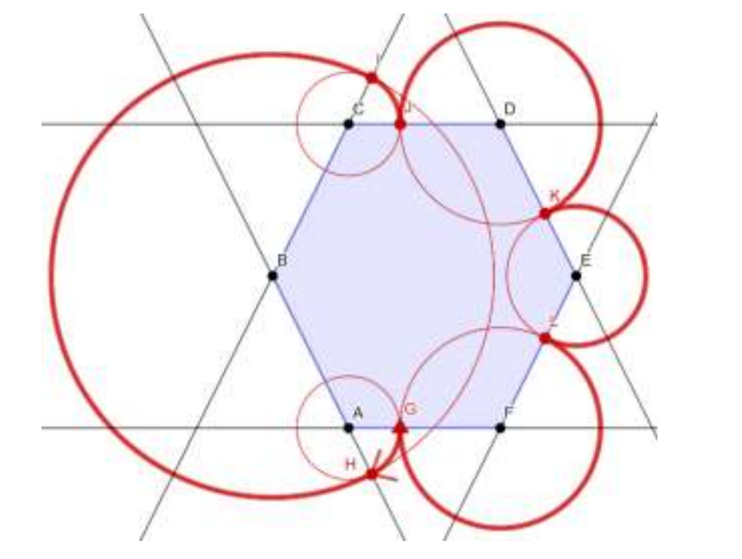

圖 4-28 二個內切

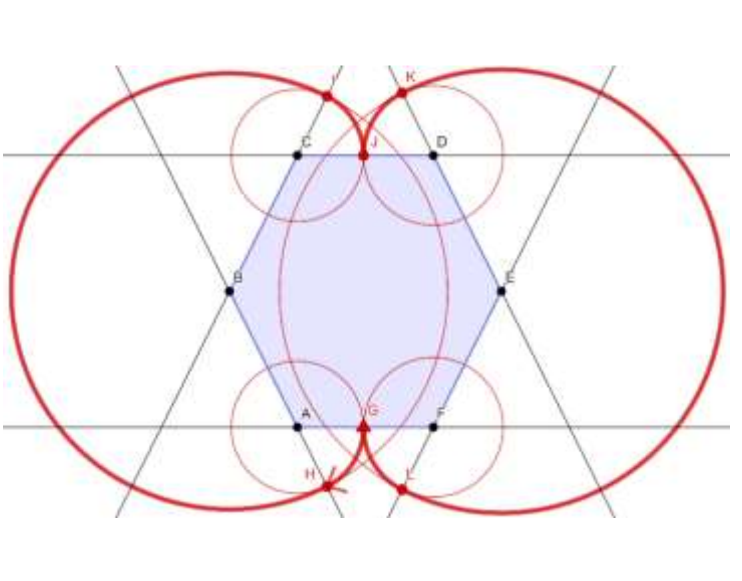

圖 4-29 四個內切

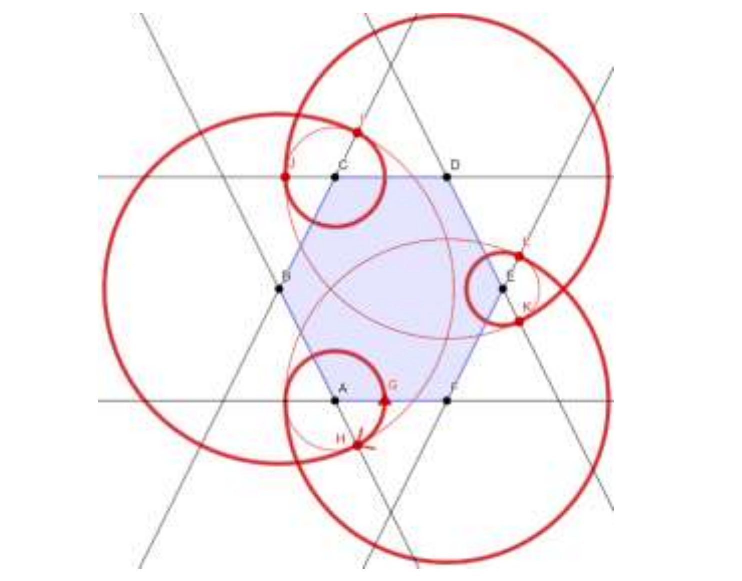

圖 4-30 六個內切

(2)奇數邊長之和≠偶數邊長之和$(a+c+e\neq b+d+f)$

依奇數個內切個數各舉一例，軌跡如圖 4-31 至圖 4-33

情況 \ 相鄰兩圓	$C_A \to C_B$	$C_B \to C_C$	$C_C \to C_D$	$C_D \to C_E$	$C_E \to C_F$	$C_F \to C_A$
一個內切	內切	外切	外切	外切	外切	外切
三個內切	內切	內切	內切	外切	外切	外切
五個內切	內切	內切	內切	內切	內切	外切

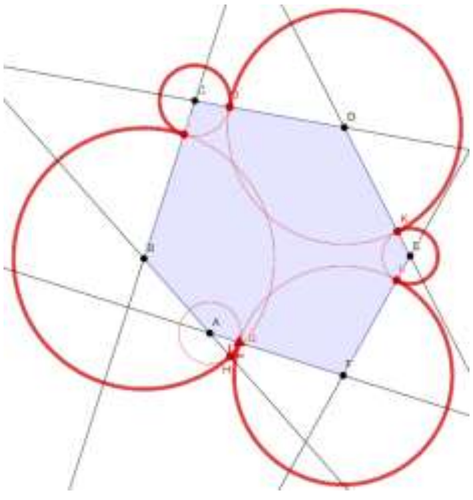	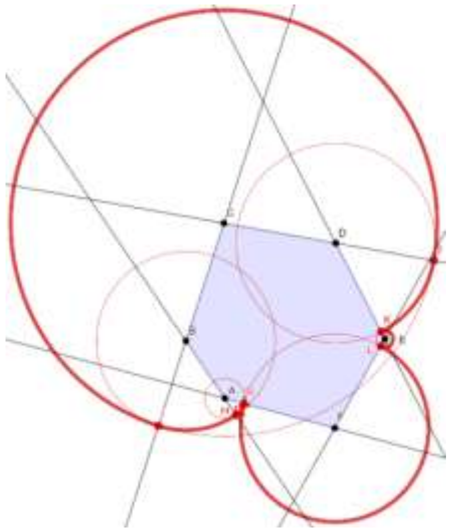	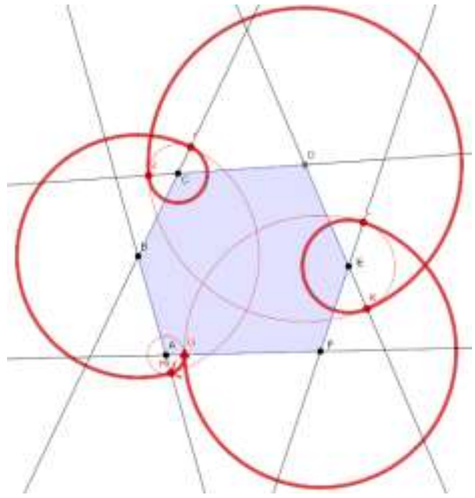
圖 4-31 一個內切	圖 4-32 三個內切	圖 4-33 五個內切

五、研究結果與討論

(一)在奇數(三、五)邊形下，相鄰兩圓之相切關係只要符合 0 個或 2N 個內切，則能完成一次或二次循環回原起始點。

(二)在偶數(四、六)邊形下

1. 奇數邊長之和=偶數邊長之和

   相鄰兩圓之相切關係不受內、外切情形之影響，皆能完成一次或二次循環回原起始點。

2. 奇數邊長之和≠偶數邊長之和

   相鄰兩圓之相切關係只要符合 2N-1 個內切，則能完成一次或二次循環回原起始點。

(三)多邊形內、外切循環現象

1. 能完成二次循環者，則必能完成一次循環，反之亦同。
2. 無法完成循環回到原起始點者，必存在以下其中一種現象:

   ①某輪循環中，與第二輪以上各邊之交點重合。

   ②各輪的半徑成等差，向原起始點遠離或靠近，且不會重合。

六、評鑑與檢討

(一)研究動機的部分:

起初本組想嘗試以圓的內、外切作為探討多邊形甚至多面體的循環現象看看是否會有不一樣的發現，藉由 Geogebra 軟體精準繪製出了各種不同路徑圖形軌跡，我們再加以分類找規律和證明，最後也確實找出了一些結果。

(二) 擬定正式計畫、研究問題及工作進度表的部分：

當我們確定要參與專題研究活動後，老師便要求我們做有效的時間管理(預計探討項目、組員的工作分配、小組討論時間)；也因此，我們才能在時間規劃下減少延誤，如期完成本次專題。起初本組有數個疑惑?先有多邊形還是先有圓?先內切還是先外切?為什麼有些圖形繞不回去?凹多邊形有影響嗎?老師提到太多研究問題容易失焦或做不來，建議我們從基本幾何圖形做起，深入探討並完整說明每一種情況。確實這樣的建議讓後來本組研究能聚焦三、四、五、六邊形上的循環做完整論述。

(三) 彙整相關文獻的部分:

經由本次研究我們學會了一些查詢資料的方式和技巧，並學習如何在別人已經研究過的基礎上，推廣、延伸或重新詮釋來發展出一些新概念或新方法。而本組覺得文獻所探討回歸現象並不完整，故我們決定透過自己的想法，即利用兩圓位置關係中的兩種相切情形(外切、內切)來探討多邊形內外的循環規律。

(四) 資料分析的部分:

內切、外切的組合變化太多，以致有些重複畫了，有些反而沒畫到；我們先利用代數式來推導證明每一輪半徑並觀察其變化的規律，做成表格分類統整，慢慢地才發現奇、偶數邊形的各種循環狀況與受到的限制，再加上 Geogebra 軟體有拖曳的功能，更讓我們發現可二次循環的圖形必會有一次循環的重要發現。

(五) 研究結果與討論部分:

在經過有效的資料分析後，我們利用表格整理出三、四、五、

六邊形各種內、外切數產生循環的結果，並配合繪圖說明路徑及明確的代數式證明。經由此次研究我們也從中體會到團隊合作與腦力激盪的重要性，從一個無法預知結果的研究中，一步一步解決遇到的困難，並歸納證明出此規律，是我們本次最大的收穫。

七、參考資料

(一)林志賢、吳禮揚、楊璿縉、李易哲(2010)。**圓舞曲**。中華民國第五十屆中小學科學展覽會高中組數學科。

(二)曹博源、盧偉丞、劉詠筑(2018)。**被困住的「圓」桌武士。**全國高級中等學校小論文數學類第1070331梯次。