

彰化縣 107 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：31001

組別：
 國小組 數學類
 國中組 自然與生活科技類
 人文社會類

作品名稱：「莫」名其妙 環環相扣

彰化縣 107 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書

「莫」名其妙 環環相扣

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校資優生入班後，於中年級階段提供先備研究技能的訓練，包括：資料蒐集、研究方法介紹、做筆記、圖書館和網際網路的運用。並規劃各領域的充實課程、安排專題講座和校外教學，提供學生探索機會，引導其找出感興趣的研究領域。學生升上高年級階段後，藉由五年級專題研究和六年級獨立研究的課程安排，學生可以小組或個人的方式針對實際問題進行探究，每位學生至少可有兩次完整地參與研究歷程的學習經驗。以下說明高年級獨立研究課程規劃：

年級別	課程內容	備註
五年級	<ol style="list-style-type: none">1. 參考各領域研究競賽優秀作品，討論研究報告應具備的向度。2. 依各研究作品的研究架構、研究方法的使使用、資料圖表的傳達、實驗設計、問卷編擬等進行討論或嘗試調整、修改。3. 學生依興趣選擇研究領域，並自成小組依主題廣泛蒐集資料，進行研究主題的深究學習。4. 依學生研究主題需求，規劃研究方法論的深究課程。5. 小組執行專題研究，並撰寫研究報告。6. 辦理專題研究發表會。7. 尋找六年級獨立研究主題及搜尋相關資料，於「獨立研究審查研討會」進行報告	<p>◎視研究需要，規劃專題講座校外教學。</p> <p>◎視學生研究成果的完整性，參加研究相關競賽活動。</p>

	並由教師給予回饋。	
六年級	<ol style="list-style-type: none"> 1. 暑假期間，學生須進行前導研究或文獻整理，並由教師給予回饋。 2. 確認研究目的、研究範圍與研究架構。 3. 進行研究計畫之擬定。 4. 依研究計畫進行蒐集資料、研究問題調查、實驗紀錄等研究工作。 5. 編輯書面研究報告。 6. 辦理獨立研究發表會：編輯簡報和手冊、口頭發表技巧訓練。 	<p>◎視研究需要，規劃專題講座和專家諮詢。</p> <p>◎視學生研究成果的完整性，參加研究相關競賽活動。</p> <p>◎學生須定期撰寫研究日誌。</p>

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

- (一) 分享科學相關實用網站和值得學習、參考的研究報告。
- (二) 引導學生進行資料蒐集、文獻摘錄歸納、繪製圖表、實驗設計與各週研究討論等研究工作。
- (三) 檢核學生各研究階段中的進度，並適時給予協助。

「莫」名其妙 環環相扣

第二階段 獨立研究階段

摘要

本研究透過不同翻轉角度，製作變形後的莫氏環，並對所製作的莫氏環在不同寬度位置上進行裁剪，觀察實際的作品，進行整理與分析，找出莫氏環裁剪後，在改變的寬度、長度、翻轉角度等，產生的規律與共通性。

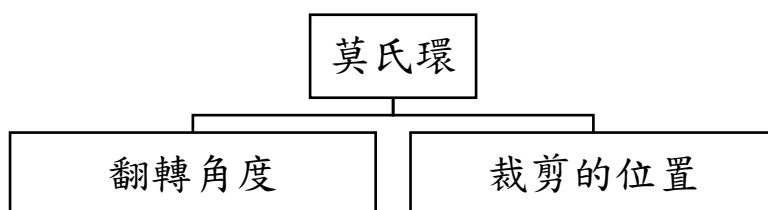
一、研究動機

因為之前曾看過艾雪的展覽，當時就注意到愛雪的作品中應用了很多莫氏環變化，老師在課程中講解後覺得很好玩，加上不同翻轉角度的變化對我來說非常新穎有趣，我對莫氏環改變不同變因後所製造出的新莫氏環狀態感到好奇，於是想進一步觀察與分析，並利用研究方法進行記錄。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一)研究架構

為了要進一步討論莫氏環，我決定將透過莫氏環的翻轉角度，以及剪開莫氏環的位置作為討論的變項。以下為我的研究架構。



(二)研究問題

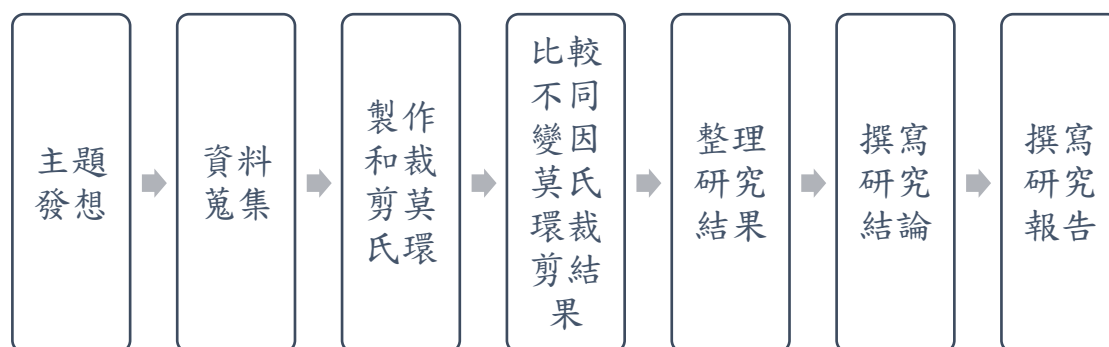
根據研究架構，我擬出以下的研究問題

1. 比較不同的莫氏環的翻轉角度相同的裁剪位置，裁剪後的翻轉情形。

2. 比較相同的莫氏環的翻轉角度不同的裁剪位置，裁剪後的翻轉情形。

(三)研究流程圖

1. 本研究的研究流程圖如下



2. 工作進度表

日期(時段)	工作進度
10/13~10/20	認識莫氏環 觀察莫氏環不同變因剪開結果
10/21~11/3	討論莫氏環裁剪結果 莫氏環表格整理及討論
11/4~12/8	討論裁剪結果規律 海報製作及整理方式討論
12/9~12/22/	整理不同翻轉次數莫氏環規律
12/23~1/5	分析結果討論及研究討論記錄 撰寫研究結論
1/22~1/30	整理莫氏環成品
2/1~3/2	遇到的問題及解決方法撰寫
3/2~3/14	完成研究報告
3/15~3/31	製作莫氏環研究海報並進行分享
9/3~12/19	進行獨立研究報告格式調整

三、彙整相關文獻

(一)莫氏環的介紹與歷史資料

莫比烏斯環（德語：Möbiusband），又譯梅比斯環或麥比烏斯帶，是德國數學家莫比烏斯在年近七十時的一項偶然發現。

在本研究中，莫比烏斯環以莫氏環稱之。莫氏環有以下幾個特點：

1. 可以一筆畫完每一面

如果沿著環狀紙條畫一整圈，不論是畫在紙條的外面或裡面，我們都只能畫在其中一個面上。

2. 只有一個面和一條邊

莫氏環因為可以用一筆畫完每一個面、用一根手指頭繞完整個邊線，在數學上呈現了一種狀態，是只有一個面和一條邊的立體圖形。

3. 沒有上、下、內、外之分

莫氏環是只有一個面、一條邊的立體幾何形狀。而因為莫氏環只有一個面、一條邊，這讓莫氏環看起來是立體的，但因為它只有一個面，沒有人能夠定義出哪一面是莫比烏斯環的「上面」，哪一面是「下面」，或哪一面是「外面」和「裡面」。

除了數學家對「莫氏環只有一個面」的性質感興趣之外，也吸引了不少藝術家的注意。著名的荷蘭藝術家艾雪就以莫氏環為題材，創作了作品。我國雕塑家楊英風，也有與莫氏環相關的作品創作。

(二)莫氏環的研究作品

在老師的建議下，我在科教館網站中，搜尋歷屆科展作品，發現了幾件與莫氏環相關的研究作品，其中有兩件作品與我的相關性比較高，分別是第 52 屆國中組數學科的[莫比烏斯環和相關紙環]與第 54 屆國中組數學科[小莫比的翻轉世界]，但是國中學長紀錄與整理的方式，對我而言不容易了解，加上我希望可以在研究後對

我的同學分享作品，因此我決定挑戰容易理解的紀錄方式，也希望做出清楚的比較表格，容易對照與查閱。


作品名稱	主要研究目的	研究特色
莫比烏斯環和相關紙環	討論莫比烏斯環的分割方法，旋轉角度、面的變化、纏繞的結構和交點個數作分析比較，並找出交點個數的計算公式。	歸納整理莫比烏斯環的延伸和變形狀況。
小莫比的翻轉世界	使莫比烏斯環最終結果呈現一「無翻轉、無打結」的情況。	使用錯位連接的方式，裁剪與連接莫氏環。
我的作品	比較莫氏環不同的翻轉角度及不同的裁剪位置，裁剪後的情形。	希望用小學生也能理解的方式呈現研究作品。

四、研究過程紀錄

(一)製作莫氏環的過程



以製作 180 度的莫氏環為例，製作步驟如下：

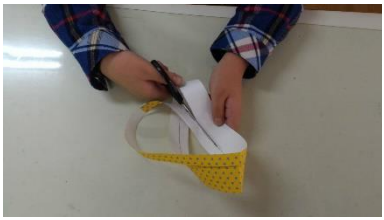

步驟	說明	圖說
步驟 1	準備一張長約 13cm，寬約 5cm 的紙條	

步驟 2	將紙條彎曲並用一隻手固定住一端	
步驟 3	將另一邊翻轉成預定度數	
步驟 4	黏合兩端，重疊處大約 1cm	
步驟 5	稍微拉開並整理使其平整，完成	

(二) 裁剪莫氏環

以製作 180 度的莫氏環，裁剪位置為三分之一為例

步驟	說明	圖說
步驟 1	拿出完成的莫氏環並用尺標記出寬度三分之一的位置	
步驟 2	沿著標記的位置，畫出莫氏環三分之一位置的裁剪線	

<p>步驟 3</p>	<p>沿著畫出來的線裁剪莫氏環</p>	
<p>步驟 4</p>	<p>整理裁剪後的莫氏環，完成</p>	

三、計算翻轉圈與打結情形








根據研究問題，我製造了 0 度、180 度、360 度、540 度、900 度、1080 度到 1260 度等不同翻轉度數的變化莫氏環，並對每一種規格的變化莫氏環進行不同寬度的裁剪。









並進一步整理對照後，經過仔細的觀察與比較，我發現可以將不同翻轉度數的莫氏環，利用翻轉度數 180 度的奇數倍度數與偶數倍度數分類再整理，會出現兩種不同的規律變化與特徵。我將觀察到的結果整理為兩個表格，[180 度奇數倍莫氏環的裁剪結果]與[180 度偶數倍莫氏環的裁剪結果]。

180 度奇數倍莫氏環的裁剪結果

裁剪位置	180 度	540 度	900 度	1260 度
				
二分之一	1 個圈 寬 1/2 倍 長 2 倍 翻轉 720 度 沒有打結	1 個圈 寬 1/2 倍 長 2 倍 翻轉 1440 度 有打結，繞自圈 1 次。	1 個圈 寬 1/2 倍 長 2 倍 翻轉 2160 度 有打結，繞自圈 2 次。	1 個圈 寬 1/2 倍 長 2 倍 翻轉 2880 度 有打結，繞自圈 3 次。
				
三分之一	分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 720 度，小圈翻轉 180 度 寬度：大圈 1/3 倍，小圈 1/3 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 沒有打結	分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 1080 度，小圈翻轉 540 度 寬度：大圈 1/3 倍，小圈 1/3 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 大圈打 1 結，小圈沒有打結。	分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 1800 度，小圈翻轉 900 度 寬度：大圈 1/3 倍，小圈 1/3 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 大圈有打結，繞自己 2 次，小圈沒有打結	分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 2520 度，小圈翻轉 1260 度 寬度：大圈 1/3 倍，小圈 1/3 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 大圈有打結，繞自己 3 次，小圈沒有打結

				
四 分 之 一	<p>分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 720 度，小圈翻轉 180 度 寬度：大圈 1/4 倍，小圈 1/2 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 沒有打結</p>	<p>分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 1080 度，小圈翻轉 540 度 寬度：大圈 1/4 倍，小圈 1/2 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 大圈有打結，繞自己 1 次，小圈沒有打結。</p>	<p>分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 1800 度，小圈翻轉 900 度 寬度：大圈 1/4 倍，小圈 1/2 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 大圈有打結，繞自己 2 次，小圈沒有打結。</p>	<p>分離的兩個圈 翻轉：大圈翻轉 2520 度，小圈翻轉 1260 度 寬度：大圈 1/4 倍，小圈 1/2 倍 長度：大寬 2 倍，小寬 1 倍 大圈有打結，繞自己 3 次，小圈沒有打結。</p>

180 度偶數倍莫氏環的裁剪結果

裁剪位置	0 度	360 度	720 度	1080 度
二分之一				
	<p>分離的兩個圈 每個寬 1/2 倍 每個長不變 每個翻轉 0 度 兩個圈都沒有打結</p>	<p>相扣 2 個圈 每個寬 1/2 倍 每個長不變 每個翻轉 360 度 兩個圈都沒有打結</p>	<p>相扣 2 個圈 每個寬 1/2 倍 每個長不變 每個翻轉 720 度 兩個圈都沒有打結 兩圈互繞 1 次</p>	<p>相扣 2 個圈 每個寬 1/2 倍 每個長不變 翻轉 1080 度 兩個圈都沒有打結 兩圈互繞 2 次。</p>
三分之一				
	<p>分離的兩個圈 翻轉:寬圈 0 度,窄圈 0 度 寬度:寬圈 2/3 倍,窄圈 1/3 倍 長度:寬圈 1 倍,窄圈 1 倍</p>	<p>相扣 2 個圈 翻轉:寬圈 360 度,窄圈 360 度 寬度:寬圈 2/3 倍,窄圈 1/3 倍 長度:寬圈 1 倍,窄圈 1 倍</p>	<p>相扣 2 個圈 翻轉:寬圈 720 度,窄圈 720 度 寬度:寬圈 2/3 倍,窄圈 1/3 倍 長度:寬圈 1 倍,窄圈 1 倍 兩個圈都沒有打結 兩圈互繞 1 次</p>	<p>相扣 2 個圈 翻轉:寬圈 1080 度,窄圈 1080 度 寬度:寬圈 2/3 倍,窄圈 1/3 倍 長度:寬圈 1 倍,窄圈 1 倍 兩個圈都沒有打結 兩圈互繞 2 次。</p>

				
四 分 之 一	分離的兩個圈 翻轉:寬圈 0 度, 窄圈 0 度 寬度:寬圈 3/4 倍, 窄圈 1/4 倍 長度:寬圈 1 倍, 窄圈 1 倍	相扣 2 個圈 翻轉:寬圈 360 度, 窄圈 360 度 寬度:寬圈 3/4 倍, 窄圈 1/4 倍 長度:寬圈 1 倍, 窄圈 1 倍	相扣 2 個圈 翻轉:寬圈 720 度, 窄圈 720 度 寬度:寬圈 3/4 倍, 窄圈 1/4 倍 長度:寬圈 1 倍, 窄圈 1 倍 兩個圈都沒有打結 兩圈互繞 1 次	相扣 2 個圈 翻轉:寬圈 1080 度, 窄圈 1080 度 寬度:寬圈 3/4 倍, 窄圈 1/4 倍 長度:寬圈 1 倍, 窄圈 1 倍 兩個圈都沒有打結 兩圈互繞 2 次。

根據以上研究資料，可以發現在翻轉角度與裁剪位置的變化規律。

五、研究結果與討論

(一)研究發現

1. 翻 180 度的奇數倍從開始到回到原點共繞了兩次，偶數倍則只繞了一次。翻 180 度的奇數倍剪 1/2 後會成為一個長圈的原因是因為原本在左邊的部分被轉到了右邊，還要再轉一圈才會回到原本的左邊。
2. 翻奇數次的莫氏環和翻偶數次的莫氏環特性會有一定的規律。
3. 剪開後的兩個環，總長度和總寬度可能會改變。

4. 當裁剪二分之一位置時，有幾點發現：
- (1) 翻 180 度的奇數倍的會變成 1 個圈，180 度的偶數倍會變成 2 個圈。
 - (2) 2 個圈的總長度都會是原本的 2 倍，寬度則會是原本的 $1/2$ 。
5. 當裁剪三分之一位置時，有幾點發現：
- (1) 翻 180 度的奇數倍剪 $1/3$ ，小圈和大圈的寬會一樣，翻 180 度的偶數倍剪 $1/3$ ，小圈的寬會是大圈的 $1/2$ 。
 - (2) 一定會出現 2 個圈。
 - (3) 翻 180 度的偶數倍剪 $1/3$ ，小圈和大圈的長會一樣，翻 180 度的奇數倍剪 $1/3$ ，小圈的長會是大圈的 $1/2$ 。
6. 當裁剪四分之一位置時，有幾點發現：
- (1) 翻 180 度的奇數倍剪 $1/4$ ，小圈的寬會是大圈的 $1/2$ ，翻 180 度的偶數倍剪 $1/4$ ，小圈的寬會是大圈的 $1/3$ 。
 - (2) 一定會出現 2 個圈。
 - (3) 翻 180 度的偶數倍剪 $1/4$ ，小圈和大圈的長會一樣，翻 180 度的奇數倍剪 $1/4$ ，大圈的長會是小圈的 $1/2$ 。

注：以上的大小圈皆以寬度區分，若寬度相同，以長度區分。

(二) 研究問題與解決

在研究過程中，我遇到了一些研究問題，我將它們整理成以下的表格。

序次	遇到的問題	問題說明	困擾	解決方式	心得收穫
問題一	紙太軟	使用的紙質太軟	看不出翻轉度數	改用別的紙質	用普通 A3 紙比較好

問題二	分不清楚大小圈	兩個圈繞在一起	不知道哪個是大圈，哪個是小圈	把其中一個剪開	剪開後先不要丟，可以看度數
問題三	紙條太短	使用的紙條太短	環會卡住，很難看出資料	將紙條加長	將A4紙改成A3紙
問題四	圈數太多	翻轉度數太多，會打結	很難看出資料	將紙條剪開拉平	拉平之後把一端貼在桌上看
問題五	不知道打幾個結	看不出打結次數	看不出規律	將打結的部分全部集中再看	在做的時候要把翻轉的弄到另一邊

心得：做莫氏環的時候會遇到很多問題，從紙的材質到翻轉規律的問題都會出現，但是只要努力想，就能解決並得到很多收穫。

六、評鑑與檢討：上述每一階段的省思與收穫(請述寫獨立研究各階段的省思)。

(一)研究心得：

這次作莫氏環的獨立研究讓我學到了非常多有關於莫氏環的知識，例如像是莫氏環的翻轉角度，以及剪開的位置與剪開的結果的關係等等，雖然途中有遇到了非常多的問題，莫氏環的紙模型的製作，以及雙向細目分析表的相關資料整理也都很困難以及辛苦，數據以及規律也都會出現一些錯誤，但是只要努力思考或者是詢問過老師之後，也都能夠得到解答。這次能夠把我的作品展示給大家看到，也覺得很有成就感，很開心。

(二)研究各階段省思

階段別	省思與收穫
決定主題	以前就注意到有很多有趣美麗的藝術品，這些作品用上了莫氏環的元素，讓我在認識莫氏環之後，很自然地向前進一了解它的特性。
研究問題與研究設計	設定研究問題與假設是經過一段磨合的，因為一開始只是對莫氏環感興趣，希望解決甚麼問題其實並沒有明確的目的。
文獻整理	透過文獻探討，我知道了與莫氏環相關的數學史，對於莫氏環的命名者莫比烏斯是七十多歲時發表莫氏環感到意外與敬佩。
研究過程與紀錄	研究中學習了將資料利用表格轉換整理，並數據化觀察到的資料，表格可以幫助我發現更多的規律和規則。
研究結果與討論，研究報告撰寫	其實研究過程很辛苦，因為一個人反覆嘗試與測試，研究進度控制的不好，並不是希望完成的時候就順利完成了，花費了比想像中更多的時間，因此在真的完成之後，是無法言喻的成就感。
研究分享	透過教同學製作莫氏環和分享解說我製作的海報，我希望我的研究能讓更多人認識莫氏環。

七、參考資料(未附者不予審查)

1. 中華民國第 52 屆中小學科學博覽會 數學科 國中組 莫比烏斯環和相關紙環
2. 中華民國第 54 屆中小學科學博覽會 數學科 國中組 小莫比的翻轉世界
3. 維基百科：莫比烏斯帶

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%B8%A6>

附件：不同階段的莫氏環整理海報

初期整理海報



介紹發表使用的海報

