彰化縣109年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書

作品編號：

組別：

□國小組 ■國中組

■數學類

□自然與生活科技類

□人文社會類

作品名稱：「係」數你的美～探討方程式的完美係數

目　錄

第一階段　研究訓練階段

一、獨立研究課程近二年學校獨立研究課程之規劃

獨立研究課程，最早為學校設計提供給資優班的課程，初時以帶領學生進行科展研究為主，由教師指導學生從課本延伸，找尋研究題材，並設計相關實驗進行主題的探究，這些通常要花費相當長的時間投入，是以除正式課程檢視研究進度外，學生通常得利用假日時間返校進行研究。

近二年來，隨著彰化縣辦理獨立研究競賽，始了解獨立研究較科展而言，更強調與學習的連貫性，強調延伸所學以擬定想探究的主題，並擴大範圍至全面向，是以除數學、自然與生活科技外，更有人文科學均為其範疇，這充份給了想進行研究的學生一個好的機會。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

學生的研究及發表能力，將是十二年國教新政策下的一個受重視的環節。學校整合科展與近年之彰化縣獨立研究競賽紙本書面（成果冊、光碟）提供師生借閱，並在網站上闢有科學教育及獨立研究專區提供其他研究資訊（包含研究方法、如何擬定主題及研究計畫、歷年中章辦法、得獎作品等）。教師群中，亦會由有經驗的老師帶動小班群共同激勵，強化學生參賽的動機及給予正確的指導。感謝本校設備組長規畫實施多場的科展系列研習，讓學生也可將參加科展研習所習得的研究方法，套用在此獨立研究。硬體方面，學生無論是週六、日或暑假期間，均全面開放電腦教室、E 化教室等電腦設備，供學生使用，並有老師陪同現場指導。雖是漫漫時日，但也是另類學校的特色。

第二階段　獨立研究階段

摘要

本組研究利用一元二次方程式根的次方與係數關係(設一元二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 之兩根 α 、 β)，使用方程式替換法進而取代利用乘法公式解出 $\alpha^n+\beta^n$ 的方式，可快速的找到 $\alpha^n+\beta^n$ ，並以方程式係數 a、b 來表達，又可把 $\alpha^n+\beta^n$ 的係數找到規律及方法，導出下一個次方的係數。在驗證途中，發現推出了巴斯卡三角係形數及二項式定理，也更加證明了此係數安排是正確的，可稱為完美，所以本組稱它為「完美係數」。

一、研究動機

在數學班學習到「一元二次方程式」，後來常常遇到一道類似的題目：

$x^2+5x-2=0$ 之兩根為 α 、 β

試求出：(1) $\alpha\beta=?$　(2) $\alpha+\beta=?$　(3) $\alpha^2+\beta^2=?$

sol：　由 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

可得知 $\begin{cases}\alpha\beta=-2\\ \alpha+\beta-5\end{cases}$

接下來 $\alpha^2+\beta^2$ 我們利用乘法公式的完全平方式，自己創造等式來解決。

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$$
$$(-5)^2=\alpha^2+\beta^2+2(-2)$$
$$\therefore\alpha^2+\beta^2=29$$

接著我們在想若 $\alpha^3+\beta^3$ 是不是也可創造恆等式來解決

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$$
$$=\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$(-5)\times(29)=\alpha^3+\beta^3+(-2)(-5)$$
$$\therefore\alpha^3+\beta^3=-155$$

所以本組將研究依此類推可至 $\alpha^n+\beta^n$

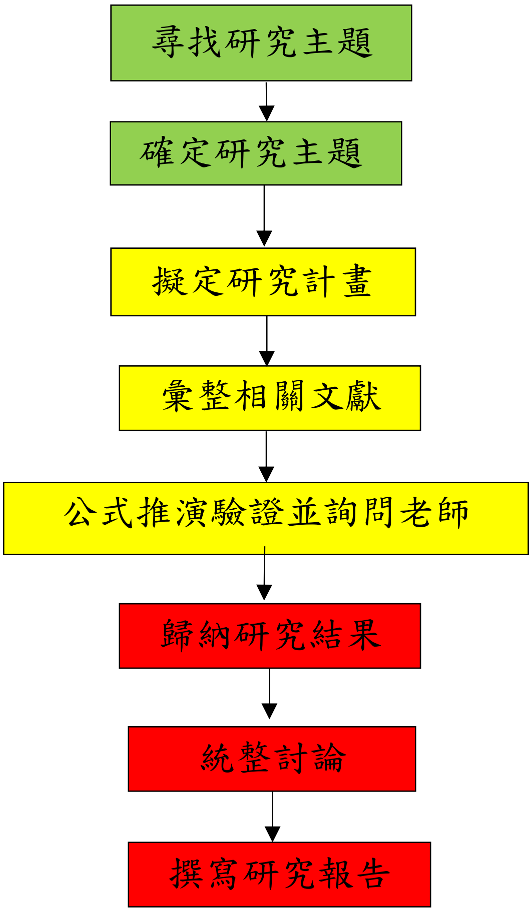
二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一)、研究問題

1、利用一元二次方程式$x^2+ax+b=0$之兩根α、β；以a、b係數表達$\alpha^n+\beta^n$，導出a、b安排的規則及完美係數。

2、利用移項推出巴斯卡三角係數及二項式定理，及驗證上述一的結果。

(二)、擬定正式計畫及工作進度表



▲圖(一)

▼表(一) 工作進度表

日期 / 進度	第一週 6/18 ~ 6/24	第二週 6/25 ~ 7/1	第三週 7/2 ~ 7/8	第四週 7/9 ~ 7/15	第五週 7/16 ~ 7/22	第六週 7/23 ~ 7/29	第七週 7/30 ~ 8/5	第八週 8/6 ~ 8/12	第九週 8/13 ~ 8/19	第十週 8/20 ~ 8/26	第十一週 8/27 ~ 9/2	第十二週 9/3 ~ 9/10
討論研究主題												
蒐集相關資訊												
擬定研究計畫												
彙整相關資料												
整理研究結果												
撰寫研究報告												
進度累積百分比	15%	20%	30%	35%	45%	60%	70%	80%	85%	90%	95%	100%

三、彙整相關文獻

針對老師所提供的翻轉數學講義多做題型練習，並上維基百科的網站研究巴斯卡三角形係數及二項式定理。

四、資料分析

計算時，本組發現要解出$\alpha^2+\beta^2$必須需要先知道$\alpha+\beta$，要解出$\alpha^3+\beta^3$也必須需要先知道$\alpha^2+\beta^2$，所以都是承上求來解決下一式的問題，而且隨著次方越高 要利用的恆等式也越來越複雜，所以在這本組試著想解決的問題:

(一)、不利用恆等式來推出$\alpha^n+\beta^n$

本組想到利用原方程式，用換的方式來試試

$x^2+5x-2=0$之兩根為α、β

由前可知 $\begin{cases}\alpha\beta=-2\\ \alpha+\beta-5\end{cases}$

把原式改造一下⇒$x^2=-5x+2$

$$
\begin{array}{rl}
\text{兩根代入} & \alpha^2=-5\alpha+2 \\
+ & \beta^2=-5\beta+2 \\
\hline
& \alpha^2+\beta^2=-5(\alpha+\beta)+4 \\
& \quad =(-5)\times(-5)+4=29
\end{array}
$$

那$\alpha^3+\beta^3$該怎麼辦呢?因為原式最高只有到 2 次，經本組思考後把式再同乘一次x

得 $x^3+5x^2-2x=0$ ⇒ $x^3=-5x^2+2x$

$$
\begin{array}{rl}
\text{兩根代入} & \alpha^3=-5\alpha^2+2\alpha \\
+ & \beta^3=-5\beta^2+2\beta \\
\hline
& \alpha^3+\beta^3=-5(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta) \\
& \quad =(-5)\times(29)+2\times(-5) \\
& \quad =-155
\end{array}
$$

為了更仔細知道這結果是正確的，本組再以兩種方式來驗證$\alpha^4+\beta^4$是否也有相同的結果

承上面的結果 $\begin{cases}\alpha\beta=-2\\ \alpha+\beta-5\\ \alpha^2+\beta^2=29\\ \alpha^3+\beta^3=-155\end{cases}$

再次利用乘法公式的解法創造式子

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)&=\alpha^4+\beta^4+\alpha\beta^3+\alpha^3\beta \\
&=\alpha^4+\beta^4+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) \\
(-5)\times(-155)&=\alpha^4+\beta^4+(-2)\times29 \\
775&=\alpha^4+\beta^4-58 \\
\therefore \alpha^4+\beta^4&=833
\end{aligned}
$$

驗證方式:

$$x^2+5x-2=0 \quad \text{同乘 } x^2$$

$$x^4+5x^2-2x^2=0$$

$$x^4=-5x^3+2x^2$$

兩根代入

$$\begin{array}{rl} & \alpha^4=-5\alpha^3+2\alpha^2 \\ + & \beta^4=-5\beta^3+2\beta^2 \\ \hline & \alpha^4+\beta^4=-5\left(\alpha^3+\beta^3\right)+2\left(\alpha^2+\beta^2\right) \end{array}$$

$$=(-5)\times(-155)+2\times 29$$

$$=755+58=833$$

經驗證後，本組確定這個方式可以來取代創造恆等式，這樣更快更簡單，想想為什麼這樣也行，後來發現同乘x以後的方程式還是有α、β兩根，所以利用原方程式，換掉的方式來解決創造恆等式。

(二)、不利用承上一式的次方，而完成$\alpha^n+\beta^n$，並找到一個完美係數

先假設方程式$x^2+ax+b=0$，兩根為α、β，本組陸續用上述的方式接連找到了$\alpha+\beta$、$\alpha^2+\beta^2$、$\alpha^3+\beta^3$...等多組的結果來觀察是否有一套規則，進而找到完美係數的規則。

1、 $\alpha+\beta$

$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$x^2+ax+b=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$$\text{得知} \quad \begin{cases}\alpha+\beta=-a \\ \alpha\beta=b\end{cases}$$

$$\therefore \alpha+\beta=-a$$

2、 $\alpha^2+\beta^2$

$$x^2=-ax-b$$

α、β代入 $\alpha^2=-a\alpha-b$

$$+\quad \beta^2=-a\beta-b$$

$$\alpha^2+\beta^2=-a(\alpha+\beta)-2b$$

$$=-a(-a)-2b$$

利用 1結果: $\alpha+\beta=-a$ 代換

$$=a^2-2b$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=a^2-2b$$

3、 $\alpha^3+\beta^3$

$x^2=-ax-b$ 同乘x

$$x^3=-ax^2-bx$$

α、β代入 $\alpha^3=-a\alpha^2-b\alpha$

$$+\quad \beta^3=-a\beta^2-b\beta$$

$$\alpha^3+\beta^3=-a(\alpha^2+\beta^2)-b(\alpha+\beta)$$

$$=-a(a^2-2b)-b(-a)$$

利用 1及 2的結果代換

$$=-a^3+3ab$$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=-a^3+3ab$$

4、 $\alpha^4+\beta^4$

$x^3=-ax^2-bx$ 同乘x

$$x^4=-ax^3-bx^2$$

α、β代入 $\alpha^4=-a\alpha^3-b\alpha^2$

$$+\quad \beta^4=-a\beta^3-b\beta^2$$

$$\alpha^4+\beta^4=-a(\alpha^3+\beta^3)-b(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=-a(-a^3+3ab)-b(a^2-2b)$$

利用 2及 3的結果代換

$$=a^4-3a^2b-a^2b+2b^2$$

$$=a^4-4a^2b+2b^2$$

$$\therefore \alpha^4+\beta^4=a^4-4a^2b+2b^2$$

5、 $\alpha^5+\beta^5$

$$x^4=-ax^3-bx^2 \qquad \text{同乘}x$$

$$x^5=-ax^4-bx^3$$

α、β代入 $\alpha^5=-a\alpha^4-b\alpha^3$

$+\qquad \beta^5=-a\beta^4-b\beta^3$

$$\alpha^5+\beta^5=-a(\alpha^4+\beta^4)-b(\alpha^3+\beta^3)$$

$$=-a(a^4-4a^2b+2b^2)-b(-a^3+3ab)$$

利用 3及 4的結果代換

$$=-a^5+4a^3b-2ab^2+a^3b-3ab^2$$

$$=-a^5+5a^3b-5ab^2$$

$$\therefore \alpha^5+\beta^5=-a^5+5a^3b-5ab^2$$

6、 $\alpha^6+\beta^6$

$$x^6=-ax^5-bx^4 \qquad \text{同乘}x$$

$$x^7=-ax^6-bx^5$$

α、β代入 $\alpha^6=-a\alpha^5-b\alpha^4$

$+\qquad \beta^6=-a\beta^5-b\beta^4$

$$\alpha^6+\beta^6=-a(\alpha^5+\beta^5)-b(\alpha^4+\beta^4)$$

$$=-a(-a^5+5a^3b-5ab^2)-b(a^4-4a^2b+2b^2)$$

利用 4及 5結果代換

$$=a^6-5a^4b+5a^2b^2-a^4b+4a^2b^2-2b^3$$

$$=a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3$$

$$\therefore \alpha^6+\beta^6=a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3$$

7、 $\alpha^7+\beta^7$

$$x^6=-ax^5-bx^4 \quad \text{同乘}x$$

$$x^7=-ax^6-bx^5$$

α、β代入 $\alpha^7=-a\alpha^6-b\alpha^5$

$$+\quad \beta^7=-a\beta^6-b\beta^5$$

$$\alpha^7+\beta^7=-a\left(\alpha^6+\beta^6\right)-b\left(\alpha^5+\beta^5\right)$$

$$=-a\left(a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3\right)-b\left(-a^5+5a^3b-5ab^2\right)$$

$$=-a^7+6a^5b-9a^3b^2+2ab^3+a^5b-5a^3b^2+5ab^3$$

$$=-a^7+7a^5b-14a^3b^2+7ab^3$$

$$\therefore \alpha^7+\beta^7=-a^7+7a^5b-14a^3b^2+7ab^3$$

五、研究結果與討論

(一)、資料統整與觀察

1、

$$\alpha+\beta=-a$$

$$\alpha^2+\beta^2=a^2-2b$$

$$\alpha^3+\beta^3=-a^3+3ab$$

$$\alpha^4+\beta^4=a^4-4a^2b+2b^2$$

$$\alpha^5+\beta^5=-a^5+5a^3b-5ab^2$$

$$\alpha^6+\beta^6=a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3$$

$$\alpha^7+\beta^7=-a^7+7a^5b-14a^3b^2+7ab^3$$

觀察:

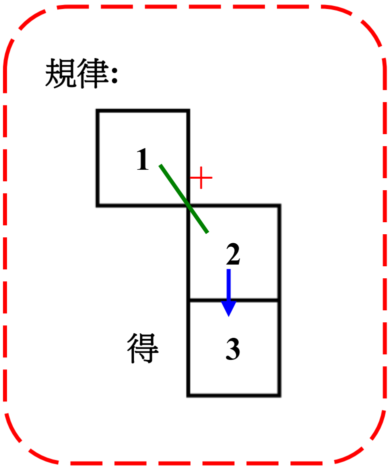
a的次方⇒7→5→3→1 (遞減二次方)

b的次方⇒0→1→2→3 (遞增一次方)

2、 首先取下係數中的數字由高次至低次排列來觀察規則:(如表二)用前兩組作為依據來找尋規則

▼表(二)

$\alpha+\beta$	1	0	0	0			
$\alpha^2+\beta^2$	1	2	0	0			
$\alpha^3+\beta^3$	1	3	0	0			
$\alpha^4+\beta^4$	1	4	2	0			
$\alpha^5+\beta^5$	1	5	5	0			
$\alpha^6+\beta^6$	1	6	9	2			
$\alpha^7+\beta^7$	1	7	14	7	0		
預測 $\alpha^8+\beta^8$	1	8	20	16	2		



▲圖(二)

試著驗證$\alpha^8+\beta^8$是否為相對應的規律

$x^7=-ax^6-bx^5$　　同乘x

$x^8=-ax^7-bx^6$

α、β代入　$\alpha^8=-a\alpha^7-b\alpha^6$

$$+\quad \beta^8=-a\beta^7-b\beta^6$$

$$\alpha^8+\beta^8=-a\left(\alpha^7+\beta^7\right)-b\left(\alpha^6+\beta^6\right)$$

$$=-a\left(-a^7+7a^5b-14a^3b^2+7ab^3\right)-b\left(a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3\right)$$

$$=a^8-7a^6b+14a^4b^2-7a^2b^3-a^6b+6a^4b^2-9a^2b^3+2b^4$$

$$=a^8-8a^6b+20a^4b^2-16a^2b^3+2b^4$$

$$\therefore\alpha^8+\beta^8=a^8-8a^6b+20a^4b^2-16a^2b^3+2b^4$$

數字為1、8、20、16、2，完全相符

3、接下來要解決的是a、b的關係及正負號如何安排由以上數據可觀察：

（1）a、b的安排：a^nb^0，$a^{n-2}b^1$，$a^{n-4}b^2$，......

* a每次的指數都遞減2次，從a^n開始遞減到a^0或a^1就結束。
* b則b^0指數每次遞增1次，直到有a^0或a^1的出現就結束。
* a、b的次方和從n，$n-1$，$n-2$，.....有規律的每次差1次。

（2）正負號的安排：

第一項前加$(-1)^n$

第二項前加$(-1)^{n-1}$

第三項前加$(-1)^{n-2}$

......依此類推

由$\alpha^8+\beta^8$來驗證一下：1、8、20、16、2

$$(-1)^8a^8b^0+(-1)^7\times8a^6b^1+(-1)^6\times20a^4b^2+(-1)^5\times16a^2b^3+(-1)^4\times2a^0b^4$$

$$=a^8-8a^6b+20a^4b^2-16a^2b^3+2b^4$$

a^0出現

4、綜合上述觀察:

$$\alpha^n+\beta^n=(-1)^n\times A\times a^n b^0+(-1)^{n-1}\times B\times a^{n-2}b^1+(-1)^{n-2}\times C\times a^{n-4}b......$$

其中 A、B、C、...為所推出的完美係數

(二)、設 $x^2+ax+b=0$ 之兩根為 α 、 β

以 a 、 b 係數表達 $\alpha^n+\beta^n$,導出 a 、 b 安排的規則及完美係數

利用本組所發現的公式堆導出 $\alpha^9+\beta^9$:

▼表(三) 由高次至低次排列

$\alpha+\beta$	1	0	0	0			
$\alpha^2+\beta^2$	1	2	0	0			
$\alpha^3+\beta^3$	1	3	0	0			
$\alpha^4+\beta^4$	1	4	2	0			
$\alpha^5+\beta^5$	1	5	5	0			
$\alpha^6+\beta^6$	1	6	9	2			
$\alpha^7+\beta^7$	1	7	14	7	0		
$\alpha^8+\beta^8$	1	8	20	16	2	0	
推出 $\alpha^9+\beta^9$	1	9	27	30	9	0	

$$\alpha^9+\beta^9=(-1)^9\times1\times a^9b^0+(-1)^{9-1}\times9\times a^{9-2}b^1+(-1)^{9-2}\times27\times a^{9-4}b^2$$
$$+(-1)^{9-3}\times30\times a^{9-6}b^3+(-1)^{9-4}\times9\times a^{9-8}b^4$$

a^1出

$$=-a^9+9a^7b-27a^5b^2+30a^3b^3-9ab^4$$

至此表示可推至$\alpha^n+\beta^n$，但次方越來越大，很難利用乘法公式再慢慢驗證，因此規劃下述二來驗證上述一的結果是否正確。

(三)、利用移項推出巴斯卡三角形係數及二項式定理，及驗證上述一的結果。

設$x^2+ax+b=0$之兩根為α、β

$$x^2+ax+b$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$
$$\therefore\begin{cases}a=-(\alpha+\beta)\\ b=\alpha\beta\end{cases}$$

1、 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ ......公式

$\boxed{\text{驗算：}\ \alpha^2+\beta^2=a^2-2b}$

$$\Rightarrow a^2=\alpha^2+\beta^2+2b$$
$$\Rightarrow[-(\alpha+\beta)]^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$$
$$\Rightarrow(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$$

2、 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ ......公式

$\boxed{\text{驗算：}\ \alpha^3+\beta^3=-a^3+3ab}$

$$\Rightarrow -a^3=\alpha^3+\beta^3-3ab$$
$$\Rightarrow -[-(\alpha+\beta)]^3=\alpha^3+\beta^3-3[-(\alpha+\beta)]\alpha\beta$$
$$\Rightarrow(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$$
$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

3、 $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$ ......公式

$\boxed{\text{驗算：}\ \alpha^4+\beta^4=a^4-4a^2b+2b^2}$

$$\Rightarrow a^4=\alpha^4+\beta^4+4a^2b-2b^2$$

$$\Rightarrow[-(\alpha+\beta)]^4=\alpha^4+\beta^4+4[-(\alpha+\beta)]^2\alpha\beta-2(\alpha\beta)^2$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+\beta^4+4\left[\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right]\alpha\beta-2\alpha^2\beta^2$$

$$=\alpha^4+\beta^4+4\alpha^3\beta+8\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3-2\alpha^2\beta^2$$

$$=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$$

4、 $(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$ ......公式

$\boxed{\text{驗算：}\ \alpha^5+\beta^5=-a^5+5a^3b-5ab^2}$

$$\Rightarrow -a^5=\alpha^5+\beta^5-5a^3b+5ab^2$$

$$\Rightarrow -[-(\alpha+\beta)]^5=\alpha^5+\beta^5-5[-(\alpha+\beta)]^3\alpha\beta+5[-(\alpha+\beta)](\alpha\beta)^2$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+\beta^5+5\left[\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\right]\alpha\beta-5\left[\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3\right]$$

$$=\alpha^5+\beta^5+5\alpha^4\beta+15\alpha^3\beta^2+15\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4-5\alpha^3\beta^2-5\alpha^2\beta^3$$

$$=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$$

由移項反推結果:

$$\alpha+\beta=\alpha+\beta$$

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$$

$$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$$

取出係數:(如圖三)

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

1　5　10　10　5　1

▲圖(三)

正好是著名的巴斯卡三角形係數，再配合二項式定理來驗證未知數

$$(\alpha+\beta)^1 = C_0^1\alpha^1\beta^0 + C_0^1\alpha^0\beta^1$$
$$= \alpha+\beta$$

$$(\alpha+\beta)^2 = C_0^2\alpha^2\beta^0 + C_1^2\alpha^1\beta^1 + C_2^2\alpha^0\beta^2$$
$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha+\beta)^3 = C_0^3\alpha^3\beta^0 + C_1^3\alpha^2\beta^1 + C_2^3\alpha^1\beta^2 + C_3^3\alpha^0\beta^3$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha+\beta)^4 = C_0^4\alpha^4\beta^0 + C_1^4\alpha^3\beta^1 + C_2^4\alpha^2\beta^2 + C_3^4\alpha^1\beta^3 + C_4^4\alpha^0\beta^4$$
$$= \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$(\alpha+\beta)^5 = C_0^5\alpha^5\beta^0 + C_1^5\alpha^4\beta^1 + C_2^5\alpha^3\beta^2 + C_3^5\alpha^2\beta^3 + C_4^5\alpha^1\beta^4 + C_5^5\alpha^0\beta^5$$
$$= \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$$

以上利用巴斯卡三角形係數及二項式定理的檢查表示都是對的，接下來的驗證是上述一公式所代出來的$\alpha^9+\beta^9$，是否也正確，若也成立，則可表示此係數是正確的安排。

(四)驗證$\alpha^9+\beta^9$:由表(二)規率推導出

$$\alpha^9+\beta^9=-a^9+9a^7b-27a^5b^2+30a^3b^3-9ab^4$$

接下來要驗證是否也符合巴斯卡三角形係數及二項式定理首先先用二項式定理推出$(\alpha+\beta)^7$:

$$(\alpha+\beta)^7=C_0^7\alpha^7\beta^0+C_1^7\alpha^6\beta^1+C_2^7\alpha^5\beta^2+C_3^7\alpha^4\beta^3+C_4^7\alpha^3\beta^4+C_5^7\alpha^2\beta^5+C_6^7\alpha^1\beta^6+C_7^7\alpha^0\beta^7$$

$$=\alpha^7+7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2+35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4+21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6+\beta^7$$

作為驗證工具

$$-a^9=\alpha^9+\beta^9-9a^7b+27a^5b^2-30a^3b^3+9ab^4$$

代入$\begin{cases}a=-(\alpha+\beta)\\ b=\alpha\beta\end{cases}$

$$\Rightarrow -[-(\alpha+\beta)]^9=\alpha^9+\beta^9-9[-(\alpha+\beta)]^7\alpha\beta+27[-(\alpha+\beta)]^5(\alpha\beta)^2-30[-(\alpha+\beta)]^3(\alpha\beta)^3$$

$$+9[-(\alpha+\beta)](\alpha\beta)^4$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta)^9=\alpha^9+\beta^9-9[-(7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2+35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4+21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6+\beta^7)]\alpha\beta$$

$$+27[-(\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5)](\alpha\beta)^2$$
$$-30[-(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)](\alpha\beta)^3+9[-(\alpha+\beta)](\alpha\beta)^4$$

$$=\alpha^9+\beta^9+9\alpha^8\beta+63\alpha^7\beta^2+189\alpha^6\beta^3+315\alpha^5\beta^4+189\alpha^3\beta^6+63\alpha^2\beta^7+9\alpha\beta^8$$
$$-27\alpha^7\beta^2-135\alpha^6\beta^3-270\alpha^5\beta^4-270\alpha^4\beta^5-135\alpha^3\beta^6-27\alpha^2\beta^7$$
$$+30\alpha^6\beta^3+90\alpha^5\beta^4+90\alpha^4\beta^5+30\alpha^3\beta^6-9\alpha^5\beta^4-9\alpha^4\beta^5$$

$$=\alpha^9+9\alpha^8\beta+36\alpha^7\beta^2+84\alpha^6\beta^3+126\alpha^5\beta^4+126\alpha^4\beta^5+84\alpha^3\beta^6+36\alpha^2\beta^7+9\alpha\beta^8+\beta^9$$

而二項式定理$(\alpha+\beta)^9$展開則是:

$$(\alpha+\beta)^9=C_0^9\alpha^9\beta^0+C_1^9\alpha^8\beta^1+C_2^9\alpha^7\beta^2+C_3^9\alpha^6\beta^3+C_4^9\alpha^5\beta^4+C_5^9\alpha^4\beta^5+C_6^9\alpha^3\beta^6+C_7^9\alpha^2\beta^7$$

$$+C_8^9\alpha^1\beta^8++C_9^9\alpha^0\beta^9$$

$$=\alpha^9+9\alpha^8\beta+36\alpha^7\beta^2+84\alpha^6\beta^3+126\alpha^5\beta^4+126\alpha^4\beta^5+84\alpha^3\beta^6+36\alpha^2\beta^7+9\alpha\beta^8+\beta^9$$

結果完全一致

(五)、利用一元二次方程式根的次方與係數關係，使用方程式替換法進而取代利用乘法公式解出$\alpha^n+\beta^n$的方式，可快速的找到$\alpha^n+\beta^n$，並以方程式係數a、b來表達，又可把$\alpha^n+\beta^n$的係數找到規律及方法，導出下一個次方的係數。

(六)、在$\alpha^n+\beta^n$未知數a、b的安排也找到了固定的規律，所已可推至$\alpha^n+\beta^n$與方程式係數a、b的關係。

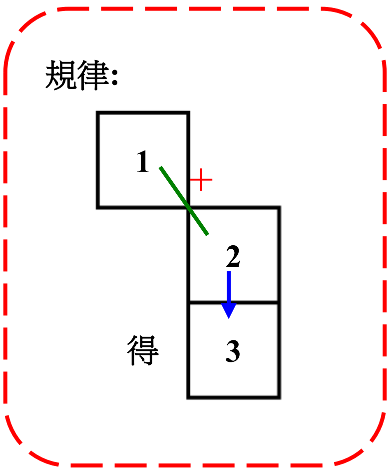
1、a每次的指數都遞減 2 次，從a^n開始遞減到a^0就結束。

2、b則b^0指數每次遞增 1 次，直到有a^0的出現就結束。

3、a、b的次方和從n，$n-1$，$n-2$，.....有規律的每次差 1 次。

4、 正負號的安排: 第一項前加$(-1)^n$，第二項前加$(-1)^{n-1}$，第三項前加$(-1)^{n-2}$ ......依此類推

(七)係數中的數字由高次至低次排列來規則:(如圖四及表四)



▲圖(四)

▼表(四)

$\alpha+\beta$	1	0	0	0			
$\alpha^2+\beta^2$	1	2	0	0			
$\alpha^3+\beta^3$	1	3	0	0			
$\alpha^4+\beta^4$	1	4	2	0			
$\alpha^5+\beta^5$	1	5	5	0			
$\alpha^6+\beta^6$	1	6	9	2			
$\alpha^7+\beta^7$	1	7	14	7	0		
$\alpha^8+\beta^8$	1	8	20	16	2		

(八)、在驗證途中,發現推出了巴斯卡三角形係數及二項式定理,也更加證明了此係數安排是正確的,可稱為完美,所以本組稱它為「完美係數」。

六、評鑑與檢討

從這次研究中，讓本組成長很多，以下依本組各研究階段遇到的問題一一作檢討：

（一）研究動機:

一開始本組找不到適合的題目，看了許多歷屆作品，決定了數學項目。後來發現一元二次方程式的題目，跟數學老師討論過後，終於決定好主題。

（二）擬定正式計畫、研究問題及工作進度表:

在擬定正式計畫及工作進度表時，遇到了排版的問題，因為本組都不是電腦好手，所以遇到了一些瓶頸：像是不知道如何打表格、改變它的樣式和怎樣在word排版較美觀；另外，在撰寫研究紀錄時，本組遇到了有關工作分配與研究進度等編排問題，在經過一番協調後，總算是分配好了工作進度等難題，開始本組的研究，讓我們知道溝通協調及團隊合作的重要。

（三）彙整相關文獻:

因為找到的資料太過於繁複，所以需要修改與刪除，不過不知道該刪掉哪些部分，所以苦惱好一陣子，還好有老師從旁指導，讓我們學到如何刪減及統整資料。

（四）資料分析:

在計算過程中，我們也遇到了不少的難題，還好有老師協助才能完成研究，讓我們知道尋求幫助的重要；計算也花費了不少的時間，這也讓我們知道耐心有多麼的重要；另外，我們需要反覆的做計算和記錄那些結果，而且有一個小差錯也不行，因為這樣可能造成計算結果不準確，所以細心很重要。最後，平常容易書寫的數學算式，卻不知道如何打在電腦上，還好經過老師指導，知道了「方程式編輯器」才完成難題，又讓我們多學到一招。

（五）研究結果與討論:

本組雖然花費了許多心力和力氣來做計算，但在克服難題之後，是有成就感的，對於數學及獨立研究都有進一步的了解跟興趣。

七、參考資料

一、國中數學課本，第三冊(２下) 第四章 一元二次方程式 ， 康軒文教

二、維基百科，巴斯卡三角形係數
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9D%A8%E8%BE%89%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2

三、維基百科，二項式定理
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%8C%E9%A1%B9%E5%BC%8F%E5%AE%9A%E7%90%86