循「次」漸進

~ 利用次方導成公式

研究動機

在練習資優班甄選考古題時，有一題數學題如下圖(A)，此題目如果利用繪圖或是一般算法都是非常複雜及高深的，本組想找出只需要利用一些簡易之方法來討論出答案，所以本組就以這個為研究主題。


A-4.空間中7個平面，最多能將此空間分割為幾個區塊。

圖(A)取自台中一中97學年度數理資優鑑定試卷

問題探討

①基本類型的數列求出第n項之規律
②常見的例子並加以推導
③三角形經等分點切割後的個數總和之規律
④空間中以平面分割最多幾個區塊之規律

問題① 基本類型的數列求出第n項之規律

1.從數列各項中取公差，直到取出的公差為0

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6\ \ldots\ldots \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \end{array}$$

⇨ 第一層公差0

1^1+1，2^1+1，3^1+1，4^1+1，$5^1+1\ldots\ldots$

第n項為$n+1$

2.從數列各項中取公差，直到取出的公差為0

0 ， 3 ， 8 ， 15， 24……

3　5　7　9

2　2　2　⇨ 第二層公差0

1^2-1，2^2-1，3^2-1，4^2-1， 5^2-1……

第$\boldsymbol{n}$項為n^2-1

3.從數列各項中取公差，直到取出的公差為0

2 ， 9 ， 28 ， 65 ， 126 ……

7 19 37 61

12 18 24

6 6 ⇨ 第三層公差0

1^3+1, 2^3+1, 3^3+1, 4^3+1, 5^3+1 ……

第$\boldsymbol{n}$項為n^3+1

4.從數列各項中取公差，直到取出的公差為0

1，7，17，31，49，71 ......

6　10　14　18　22

4　4　4　4　⇨第二層公差0

1^2+0，2^2+3，3^2+8，4^2+15，5^2+24，6^2+35 ......

此時發現，並無明顯規律，須把0，3，8，15，24，35...取出再討論

0，3，8，15，24，35......

3　5　7　9　11

2　2　2　2　⇨第二層公差0

1^2-1，2^2-1，3^2-1，4^2-1，5^2-1，6^2-1......

第n項為$2n^2-1$

問題② 常見的例子並加以推導

例題1

數列2，4，6，8，10，12，14，16，18，20……以金字塔方式呈現

2

4　6

8　10　12　　　求第n層第k數的公式?

14　16　18　20

………………

(1)一般的解法：(利用等差觀念)

2，4，6，8，10……成等差數列，且公差為2

第n層第k數共有1+2+3…..+(n-1)+k項

$$=\frac{[1+(n-1)]\times(n-1)}{2}+k=\frac{n^2-n+2k}{2}\text{項}$$

第n層第k數 $2+\left(\frac{n^2-n+2k}{2}-1\right)\times 2=n^2-n+2k$

(2)利用次方的解法

取第n層第一數

2 , 4 , 8 , 14 , 22……

2 4 6 8

2 2 2

1^2+1，2^2+0，3^2-1，4^2-2， 5^2-3 ……

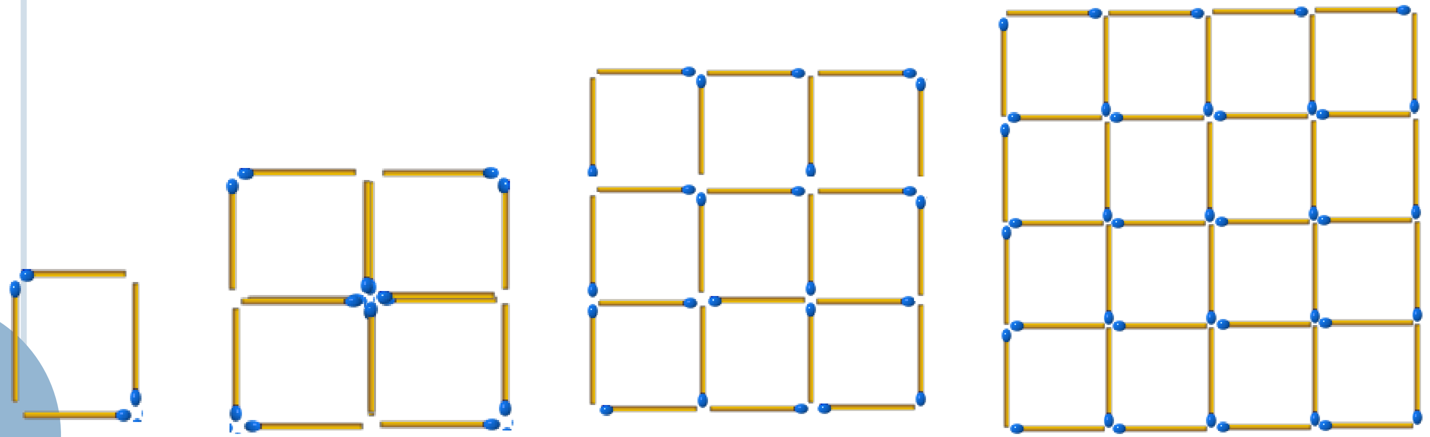
第n層第一數：$n^2+1+(n-1)\times(-1)=n^2-n+2$

第n層第K數：$n^2-n+2+(k-1)\times 2$

$=n^2-n+2k$

例題2

求圖(n)共用了幾根火柴棒？



(圖一)　(圖二)　(圖三)　(圖四)

(1)一般的解法:(利用遞迴關係)

$a_1=4$

$a_2=a_1+8$

$a_3=a_2+12$

$a_4=a_3+16$

$a_n=a_{n-1}+4n$

$a_n=4+8+12\ldots+4n=2n^2+n$

$a_n=\frac{(4+4n)\times n}{2}=(2n+2)\times n$

(2)利用次方的解法

4 ， 12 ， 24 ， 40 ……

8 12 16

4 4

1^2+3，2^2+8， 3^2+15，4^2+24……

此時發現，並無明顯規律，須把3，8，15，24，……取出再討論

3 ， 8 ， 15 ， 24……

5 7 9

2 2

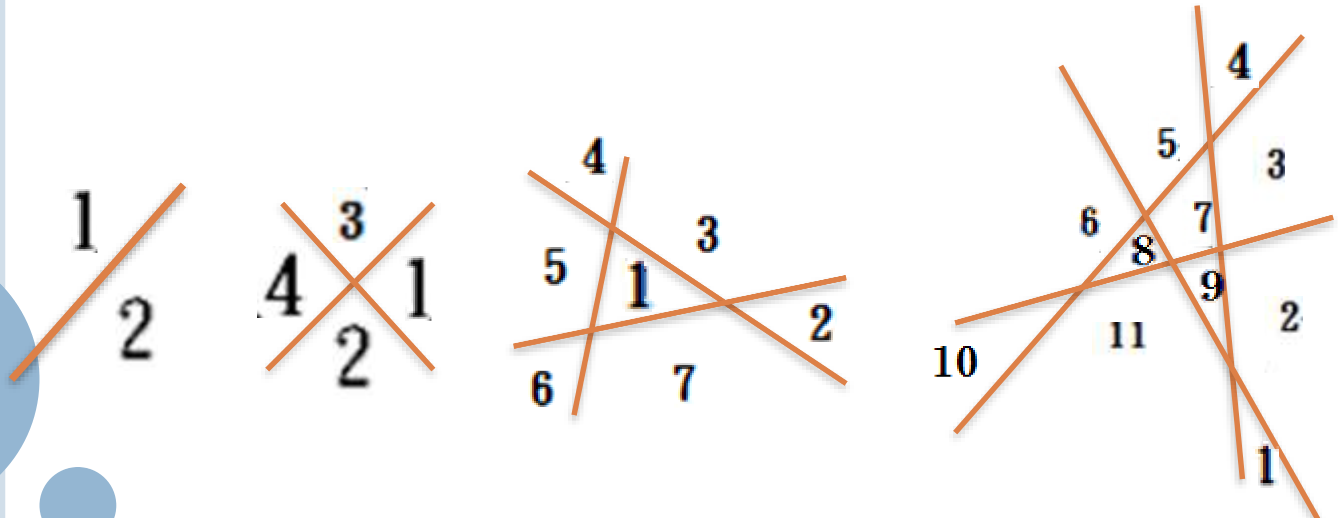
1^2+2，2^2+4，3^2+6， 4^2+8 ……

由上述兩個數列結合可得:

第n項$=2n^2+2+(n-1)\times 2=2n^2+2n$

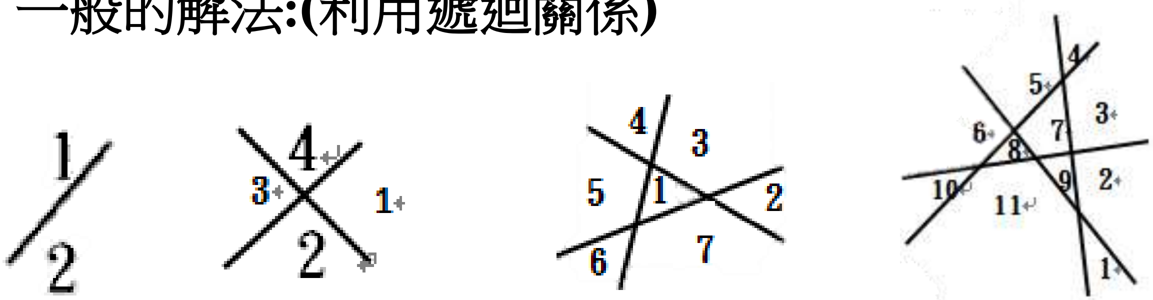
例題三

在平面中， n條線段作多可將平面分割成多少區域？



1條線段 a_1　　2條線段 a_2　　3條線段 a_3　　4條線段 a_4

(1) 一般的解法:(利用遞迴關係)



a_1 a_2 a_3 a_4

$\boldsymbol{a_1}$有2(塊)

$\boldsymbol{a_2}$有$\boldsymbol{a_1 + 2}$

$\boldsymbol{a_3}$有$\boldsymbol{a_2 + 3}$

$\boldsymbol{a_4}$有$\boldsymbol{a_3 + 4}$

……

$$a_n = a_{n-1} + n = (2 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$a_n = 2 + (2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= 2 + \frac{(2+n)(n-1)}{2}$$

$$= 2 + \frac{n^2+n-2}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2}{2}$$

(2)利用次方的解法:

$2 \quad , \quad 4 \quad , \quad 7 \quad , \quad 11$

$1^2+1 \quad 2^2+0 \quad 3^2+(-2) \quad 4^2+(-5)$

$1 \quad 1+(-1) \quad 1+(-1)+(-2) \quad 1+(-1)+(-2)+(-3)$

$$n^2+1+[(-1)+(-2)+\ldots+-(n-1)]=n^2+1$$

$$=\frac{[-1+-(n+1)]\times(n-1)}{2}$$

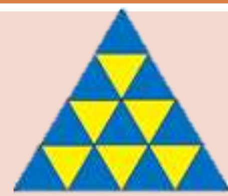
$$=\frac{n^2+n+2}{2}$$

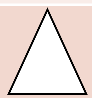
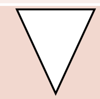
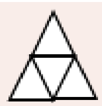
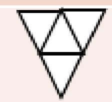
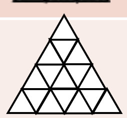
例題四

探討三角形經等分點切割後的個數總和之規律

1. 偶數層

邊長為4等分切割有3個等分點，共4層



正立的三角形	個數	倒立的三角形	個數
單位面積1 	1+2+3+4 =10 個	單位面積1 	1+2+3 =6 個
單位面積4 	1+2+3 ＝6 個	單位面積4 	1個
單位面積9 	1+2 ＝3 個		
單位面積16 	1個		

→此三角形共有$4^2+(1+2+3)+2^2+1=27$個大小不同的三角形。

由上述可推論，偶數層三角形中，大小不同的三角形個數總和為**奇數層疊加至該層數的值，加上偶數層之層數平方相加**。

表(一) 延伸推廣其他偶數層

2層	4層	6層	8層	10層
2^2	4^2	6^2	8^2	10^2
1	1+2+3	1+2+3+4+5	1+2+3+4+…+7	1+2+3+4+…+9
	2^2	4^2	6^2	8^2
	1	1+2+3	1+2+3+4+5	1+2+3+4+…+7
		2^2	4^2	6^2
		1	1+2+3	1+2+3+4+5
			2^2	4^2
			1	1+2+3
				2^2
				1
共5個	**共27個**	**共78個**	**共170個**	**共315個**

因此由上表(一)推導第n個偶數(2n層)共有幾個之通式

(1)一般的解法:(利用∑總和公式)

總和$=[2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2]+1+6+15+\ldots+[1+2+3+\cdots+(2n-1)]$

① $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=2^2(1^2+2^2+\cdots+n^2)$

$$=4\times\sum_{k=1}^{n}k^2$$

② $a_1+a_2\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n}2k^2-k=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$$①+②=6\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}〔2(2n+1)-1〕$$

$$=\frac{4n^3+5n^2+n}{2}$$

(2)利用次方的解法

5，27，78，170，315……

22　51　92　145

29　41　53

12　12

1^3+4，2^3+19，3^3+51，4^3+106，5^3+190……

此時發現，並無明顯規律，把4，19，51，106，190 …取出再討論

4，19，51，106，190……

15　32　55　84

17　23　29

6　6

1^3+3，2^3+11，3^3+24，4^3+42，5^3+65……

此時發現，並無明顯規律，把3，11，24，42，65 …取出再討論

3，11，24，42，65……

8　13　18　23

5　5　5

1^2+2，2^2+7，3^2+15，4^2+26，5^2+30……

此時發現，並無明顯規律，把2，7，15，26，40……取出再討論

2 ， 7 ， 15 ， 26 ， 40

$1^2+\mathbf{1}$ ，$2^2+\mathbf{3}$ ，$3^2+\mathbf{6}$ ，$4^2+\mathbf{10}$ ，$5^2+\mathbf{15}$

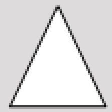
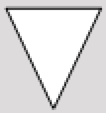
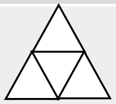
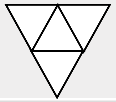
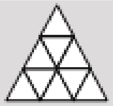
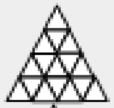
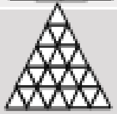
1 ，1+2 ，1+2+3 ，1+2+3+4 ，1+2+3+4+5

第n個偶數(2n層)之公式:

$$2n^3+2n^2+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=2n^3+2n^2+\frac{(1+n)n}{2}=\boldsymbol{\frac{4n^3+5n^2+n}{2}}$$

2.奇數層

2.邊長為5等分切割有4個等分點，共5層					
					
正立的三角形		個數	倒立的三角形		個數
單位面積 1		1+2+3+4+5 ＝15個	單位面積 1		1+2+3+4 ＝10個
單位面積 4		1+2+3+4 ＝10個	單位面積 4		1+2 =3個
單位面積 9		1+2+3 =6個			
單位面積 25		1+2 =3個			
單位面積 36		1個			
此三角形共有$5^2+(1+2+3+4)+3^2+(1+2)+1^2=48$個大小不同的三角形。					

由上述可推論，奇數層三角形中，大小不同的三角形個數總和為**奇數層之層數平方相加，加上偶數層之疊加至該層數的值**。

表(二) 延伸推廣其他奇數層

1層	3層	5層	7層	9層
1^2	3^2	5^2	7^2	9^2
	1+2	1+2+3+4	1+2+3+…+6	1+2+3+…+8
	1^2	3^2	5^2	7^2
		1+2	1+2+3+4	1+2+3+…+6
		1^2	3^2	5^2
			1+2	1+2+3+4
			1^2	3^2
				1+2
				1^2
共1個	共13個	共48個	共118個	共235個

(1) 一般的解法:(利用∑總和公式)

總和=〔$1^2+3^2+5^2\ldots+(2n-1^2)$〕$+3+10+21\ldots\ldots$

① $1^2+3^2\ldots+(2n-1)^2=$〔$1^2+2^2\ldots+(2n-1^2)$〕-〔$2^2+4^2\ldots+(2n-2)^2$〕

$$=\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 - 2^2〔1^2+2^2\ldots+(n-1)^2〕$$

$$=\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 - 4\times\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$a_1+a_2\ldots+a_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$a_1=3$ $a_2=3+7$

② $a_3=3+7+11$ $a_k=3+7+11\ldots+(4k-1)=\frac{(3+4k-1)\times k}{2}=2k^2+k$

$$a_1+a_2\ldots+a_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

①＋②

$$=\sum_{k=1}^{2n-1} k^2-2\sum_{k=1}^{n-1} k^2+\sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-1+1)[2(2n-1)]}{6}-2\times\frac{(n-1)(n-1+1)[2(n-1)+1]}{6}+\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{4n^3-n^2-n}}{\mathbf{2}}$$

(2)利用次方的解法

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 13 & & 48 & & 118 & & 235\ldots\ldots \\ & 12 & & 35 & & 70 & & 117 & \\ & & 23 & & 35 & & 47 & & \\ & & & 12 & & 12 & & & \end{array}$$

$1^3+\mathbf{0}$，$2^3+\mathbf{5}$，$3^3+\mathbf{21}$，$4^3+\mathbf{54}$，$5^3+\mathbf{110}$……

此時發現，並無明顯規律，把0，5，21，54，110 …取出再討論

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 5 & & 21 & & 54 & & 110\ldots\ldots \\ & 5 & & 16 & & 33 & & 56 & \\ & & 11 & & 17 & & 23 & & \\ & & & 6 & & 6 & & & \end{array}$$

1^3-1，2^3-3，3^3-6，4^3-10，5^3-15……

第n個奇數($2n-1$層)之公式：$2n^3-(1+2+\ldots+n)=2n^3-\frac{(1+n)n}{2}$

$=\frac{4n^3-n^2-n}{2}$

(四)探討空間中以平面分割最多區塊之規律

1.一般的解法

刀數	1	2	3	4
平面中	2	4	7	11
立體中	2	4	8	15

平面中	立體中
$a_1=2$	$a_1=2$
$a_2=a_1+2$	$a_2=a_1+\frac{1^2+1+2}{2}$
$a_3=a_2+3$	$a_3=a_2+\frac{2^2+2+2}{2}$
$a_4=a_3+4$	$a_4=a_3+\frac{3^2+3+2}{2}$
$a_n=a_{n-1}+n$	$a_n=a_{n-1}+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}$
$a_n=2+(2+3\ldots+n)$	$a_n=2+\frac{[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]}{2}+\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{2}+\frac{(n-1)\times 2}{2}$
$=2+\frac{(2+n)(n-1)}{2}=2+\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$	$=\frac{n^3+5n+6}{6}$

2.利用次方的解法:

平面數	0	1	2	3	4	5	6	7
區塊數	1	2	4	8	15	26	42	64

1 ， 2 ， 4 ， 8 ， 15 ， 26 ， 42 ， 64……

1 2 4 7 11 16 22

1 2 3 4 5 6

1 1 1 1 1 第三層公差0

0^3+1，1^3+1，2^3-4，3^3-19，4^3-49，5^3-99，6^3-174，7^3-279 ……

此時發現，並無明顯規律，把1，1，-4，-19，-49，-99，-174，-279…取出再討論

1 ， 1 ， −4 ， −19 ， −49 ， −99 ， −174 ， −279……

0 −5 −15 −30 −50 −75 −105

(-5)×**0**，(-5)×**1**，(-5)×**3**，(-5)×**6**，(-5)×**10**，(-5)×**15**，(-5)×**21**

0 1 1+2 1+2+3 1+2+3+4 1+2+3+4+5 1+2+3+4+5+6

利用遞迴關係可得

$a_1=1+(-5)\times\mathbf{0}$　　$a_2=a_1+(-5)\times\mathbf{1}$

$a_3=a_2+(-5)\times(\mathbf{1+2})$　　$a_4=a_3+(-5)\times(\mathbf{1+2+3})$

…….

$a_n=a_{n-1}+(-5)\times[\mathbf{1+2+3+\ldots+(n-1)}]$

$$a_n=1+(-5)\times\sum_{k=1}^{n-1}(1+2+3+\cdots+k)$$

$$=1+(-5)\times\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=1+(-5)\times\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

$$=\frac{-5n^3+5n+6}{6}$$

總結上述可的n個平面數最多可切割的區域:

$$n^3+\frac{-5n^3+5n+6}{6}=\frac{\mathbf{n^3+5n+6}}{\mathbf{6}}$$


Thank You
感謝教授的聆聽
敬請指教

研究進度表

時間 工作	8/20~ 9/3	9/4~ 9/17	9/18~ 10/1	10/2~ 10/15	10/16~ 11/9	11/10~ 11/25	11/26~ 12/10
擬定正式計畫及研究問題							
尋找資源							
彙整相關文獻							
資料分析							
提出研究成果							
評鑑與檢討							
累積進度百分比	15%	30%	45%	50%	60%	80%	100%