數位神算

0101010100101010101001010101010011001010100100100101010010101
0100100110100101010100101001010110010101010010101010010101010
0101001010101001010100101010100101000101010100101010101010010

研究動機 1/2

澳洲AMC數學競賽，2012中學初級卷的第30題引發了我們的興趣。原題目內容如下:泰勒發明一種方法來擴展一組數。例如將一組數[1，8]泰勒化，則可造出兩組數[2，9]與[3，10]，它們的每一項都由前組數的每一項各加1而得，再將這三組數依序合併在一起而得另一組數[1，8，2，9，3，10]。

若他由只有一個數[0]的這組數開始，不斷地將它泰勒化，則可得一組數：[0，1，2，1，2，3，2，3，4，1，2，3，2，3，4，3，4，5，2，3，4，…]。請問這組數中的第2012個數是什麼？

研究動機 2/2

這個題目引發了我們的興趣，而老師當時也提出了疑問，若第一個數非零呢?又或是數列非以1為公差呢?或是並非以三為倍數做數列的擴展，為了發現其中的奧秘，於是利用了數制的轉換及電腦的確認，展開了本次的獨立研究。

定義函數1/2

定義函數T({a},p)代表起始數值為a，每次擴展為p組數的泰勒化。

定義函數 $T_n(\{a\},p) = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$ 代表起始值a，每次擴展為p組數的泰勒化，經過n次擴展之後結果為$\{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$。

例：$T_1(\{0\},3)=\{0,1,2\}$為原題目的泰勒化經一次擴展的結果。

我們有$T_n(\{a\},p) = T(T_{n-1}(\{a\},p),p)$

定義函數$T(\{a\},p\overline{m})$代表起始值a，第一次擴展p組數，以後每次擴展m組數的泰勒化。

定義函數2/2

　　定義函數 $T_n(\{a\}, p\bar{m}) = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$ 代表起始值a，第一次擴展p組數，以後每次擴展m組數的泰勒化，經過n次擴展之後結果為$\{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$。

　　定義函數$T(\{a\},\overline{pm})$代表起始值a，依序循環擴展p組數、m組數的泰勒化。

　　定義函數 $T_n(\{a\}, \overline{pm}) = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$ 代表起始值a，依序循環擴展p組、m組數的泰勒化，經過n次擴展之後結果為$\{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$。

若 $T_n(\{a\}, \overline{pm}) = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$，
定義$T_n(\{a\}, \overline{pm}) + \boxed{k} = \{t_1 + k, t_2 + k, t_3 + k, \cdots\}$

研究目的1/2

T({0},3)是否能由三進位轉十進位快速求得第k個數。

$T_n(\{0\},3)$的最大數為何？

T({0},4)是否能由四進位轉十進位快速求得第k個數。

$T_n(\{0\},4)$的最大數為何？

T({0},5)是否能由五進位轉十進位快速求得第k個數。

$T_n(\{0\},5)$的最大數為何？

研究目的2/2

$T(\{a\},3)$是否能由$T(\{0\},3)$快速求得第k個數。

$T_n(\{a\},3)$的最大數為何？

$T(\{0\},p\bar{m})$是否有快速求得第k個數的方法。

$T(\{0\},\overline{pm})$是否有快速求得第k個數的方法。

研究成果

以T({0}, 3)為例

可知從$T_0(\{0\},3) = \{0\}$開始，

可得$T_1(\{0\},3) = \{0,1,2\}$、

$T_2(\{0\},3) = \{0,1,2,1,2,3,2,3,4\}$ 以及

$T_3(\{0\},3)$

$= \{0,1,2,1,2,3,2,3,4,1,2,3,2,3,4,3,4,5,2,3,4,3,4,5,4,5,6\}$

$= \{t_1, t_2, t_3, \cdots t_{27}\}$

(其中$T_3(\{0\},3)$的三個部分可以看成$T_2(\{0\},3)$、$T_2(\{0\},3) + 1$、$T_2(\{0\},3) + 2$)。

由規則可推知$T_n(\{0\},3)$的最大數為$2n$，

且在經過n次擴展後，共有3^n項。

因$3^6 = 729 < 2012 < 2187 = 3^7$，故要求出第2012項要從$T_7(\{0\},3)$開始看起。

由觀察以上規則可以看出，因2012=729+729+554，

故第2012項$t_{2012} = t_{554} + 2$；

而因554=243+243+68，

故第554項$t_{554} = t_{68} + 2$；

再因68=27+27+14，故第68項$t_{68} = t_{14} + 2$；

又因14=9+5，故第14項$t_{14} = t_5 + 1$；

最後因 5=3+2，故第5項$t_5 = t_2 + 1$；

因此可知$t_{2012} = t_{554} + 2$

$$
\begin{aligned}
&= t_{68} + 2 + 2 \\
&= t_{14} + 2 + 2 + 2 \\
&= t_5 + 1 + 2 + 2 + 2 \\
&= t_2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 \\
&= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9
\end{aligned}
$$

由此可知每經過一次泰勒化所得到的一組數之個數是泰勒化前一組數的3倍，故可以考慮三進位制。

將泰勒化後所得到的數依序與三進位制中由小至大的數一一對應後可得下表：

第n項(十進位)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
泰勒化t_n	0	1	2	1	2	3	2	3	4	1
第n項(三進位)	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100

第n項(十進位)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
泰勒化t_n	2	3	2	3	4	3	4	5	2	…
第n項(三進位)	101	102	110	111	112	120	121	122	200	…

可發現泰勒化中的數，即為其所對應的三進位制中的數之數碼和，因此第2012個數即為三進位制中由小至大第2012個數之數碼和。

又此數列第一個數為0，故第2012個數為2011。

2011÷3=670. . . 1

670÷3=223. . . 1

223÷3=74. . . 1

74÷3=24. . . 2

24÷3=8. . . 0

8÷3=2. . . 2

因$2011 = 2202111_3$，

故所求為2+2+0+2+1+1+1=9。

研究成果1/2

(一)可由十位轉三進位快速求得T({0},3)的第k個數。

(二)$T_n(\{0\},3)$的最大數為2n。

(三)可由十進位轉四進位快速求得T({0},4)的第k個數。

(四)$T_n(\{0\},4)$的最大數為3n。

(五)可由十進位轉五進位快速求得T({0},5)的第k個數。

(六)$T_n(\{0\},5)$的最大數為4n。

(七)T({a},3)的第k個數即為T({0},3)的第k個數再加上a。

(八)$T_n(\{a\},3)$的最大數為2n+a。

研究成果2/2

（九）$T(\{0\},p\bar{m})$快速求得第k個數的方法為：

$((k-1)\div p$的餘數$)+(\left[\frac{k-1}{p}\right]\div m$的餘數$)+(\left[\frac{k-1}{pm}\right]\div m$的餘數$)+(\left[\frac{k-1}{pmm}\right]\div m$的餘數$)+\cdots+(\left[\frac{k-1}{pm\cdots m}\right]\div m$的餘數$)$（其中[ ]為高斯符號）

（十）$T(\{0\},\overline{pm})$快速求得第k個數的方法為：

$((k-1)\div p$的餘數$)+(\left[\frac{k-1}{p}\right]\div m$的餘數$)+(\left[\frac{k-1}{pm}\right]\div p$的餘數$)+(\left[\frac{k-1}{p^2m}\right]\div m$的餘數$)+(\left[\frac{k-1}{p^2m^2}\right]\div p$的餘數$)+\cdots$（其中[ ]為高斯符號）

（十一）$T(\{a,b\},3)$可將奇數項視為$T(\{a\},3)$，偶數項視為$T(\{b\},3)$分開討論，即可快速求得第k個數

未來展望

未來可試著研究$T(\{a\},\overline{pm})$快速求得第k個數的方法。

甚至是快速求得$T(\{a\},\overline{pmn})$第k個數的方法。

更進一步可快速求得求出$T(\{a,b\},\overline{pmn})$及$T(\{a,b,c\},\overline{pmn})$等第k個數的方法。

感謝聆聽
敬請指教