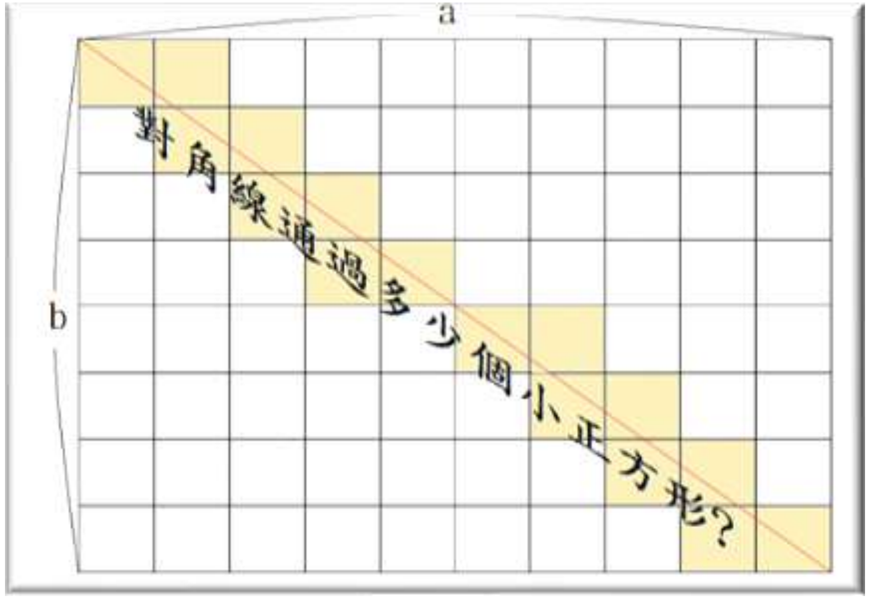
畫龍「點」「經」

利用分點數了解矩形及長方體通過的區域數

研究動機

- 數學課時，老師出一道題目：邊長一單位的正方格組成長方形ABCD，長為144單位，寬為89單位，請問連接$\overline{AC}$會通過幾個格子？



工作進度表

時間 工作	6/22~6/28	6/29~7/5	7/6~7/12	7/13~7/19	7/20~7/26	7/27~8/2	8/3~8/9	8/10~8/16	8/17~8/23	8/24~8/30	8/31~9/6	9/7~9/13
擬定初步的問題												
尋找資源												
擬定正式計畫及研究問題												
彙整相關文獻												
提出研究成果與討論												
評鑑與檢討												
累積進度百分比	5%	12%	19%	29%	39%	49%	59%	66%	73%	86%	93%	100%

研究問題

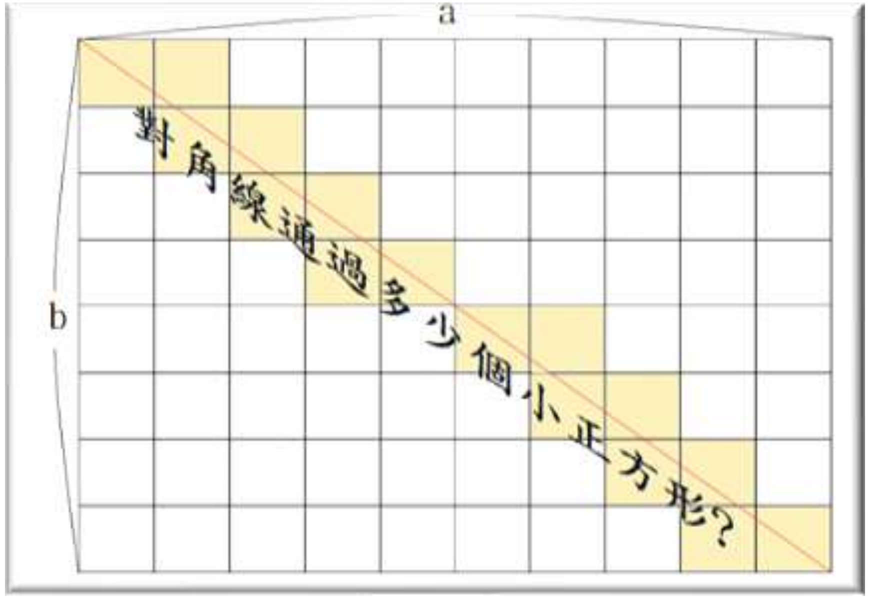
- 研究一、探討平面中，長a單位、寬b單位的長方形，可分成ab個邊長為1單位的小正方形，其對角線共可通過多少個小正方形。

- 研究二、探討空間中，長a單位、寬b單位，高c單位長方體，可分成abc個邊長為1單位的小正方體，其內部對角線(距離最遠的兩點)共可通過多少個小正方體。


PIXTA
pixta.jp - 31491691

研究一

- 探討平面中，長 a單位、寬 b單位的長方形，可分成ab 個邊長為1單位的小正方形，其對角線共可通過多少個小正方形。

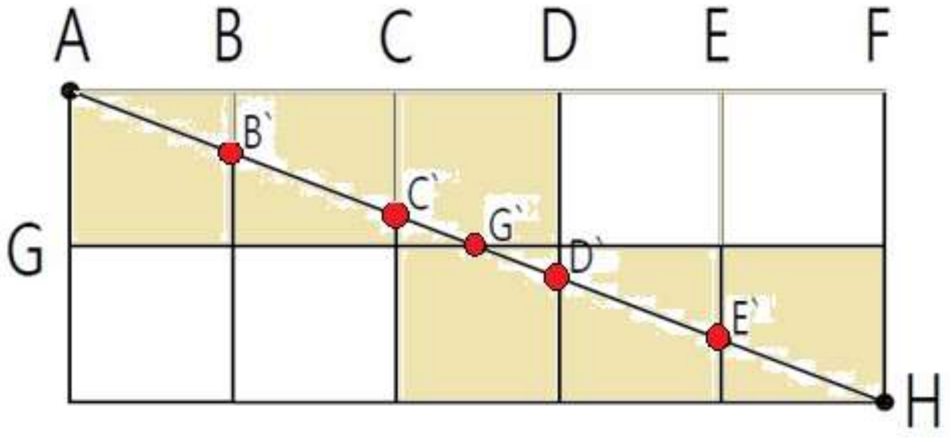


研究一

- 情況一、長、寬互質
- 情況二、 長、寬不互質 **(具共分點)**

情況一： 長、寬互質

- **長、寬互質**:(以長5單位，寬2單位的長方形來探討)



具5個分點 =(5-1)+(2-1)
通過6個小正方形

- 公式推導：(長a單位、寬b單位的長方形)

分點數:$\boxed{(a-1)+(b-1)}$

通過正方形個數:$(a-1)+(b-1)+1$

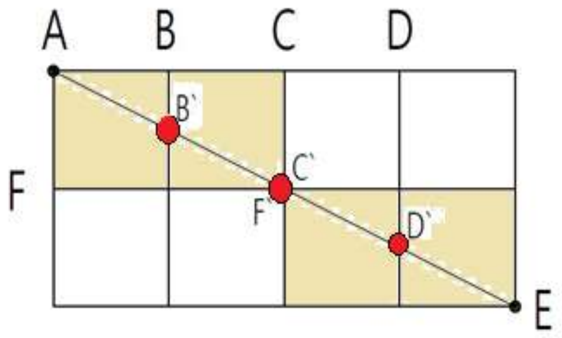
$\boxed{=a+b-1}$

與植樹問題相似：頭尾不種樹，a棵樹，a+1個間隔。

- 驗證: 通過$5+2-1=6$個正方形

情況二、 長、寬不互質（具共分點）

- 長、寬不互質:(以長 4 單位，寬 2 單位的長方形來探討)



具3個分點
並通過4個小正方形

- 公式推導

♥ 分點數: $\boxed{(a-1)+(b-1)-(n-1)}$

n代表與大長方形相似的個數。

(也就是長跟寬的最大公因數，所以最大公因數代表跟原圖相似的個數)

♥ 通過正方形個數: $(a-1)+(b-1)-(n-1)+1$

$\boxed{=a+b-n}$

- 驗證:通過4+2−2=6個正方形(有 2 個小長方形與長方形相似)

研究一　結論
（平面中對角線通過小正方形個數）

- 當長寬互質時，對角線通過的小正方形數
  ⇒長+寬-1
- 當長、寬不互質時，對角線通過的小正方形數
  ⇒長+寬-n（n為長寬最大公因數）

- 公式:長+寬-gcd(長，寬)

研究二

- 探討空間中，長a單位、寬b單位，高c單位長方體，可分成abc個邊長為1單位的小正方體，其對角線(距離最遠的兩點)共可通過多少個小正方體?
- 根據長寬高互質的組合有以下四種情況：
  - 情況一、長寬高兩兩互質的情況
  - 情況二、長寬高其中兩組互質，一組不互質(**具共分點**)
  - 情況三、長寬高其中一組互質，兩組不互質(**具共分點**)
  - 情況四、長寬高皆不互質(**具共分點**)

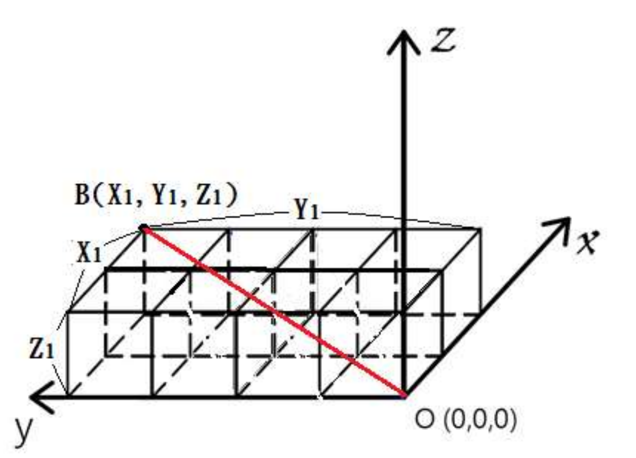
研究二 步驟

（立體空間找出分界面分點的方式）

- **步驟一**、利用兩點式($\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$)求出立體空間中對角線的線性方程式
  - 假設線兩端座標值為(0,0,0)與(x_1,y_1,z_1)帶入方程式

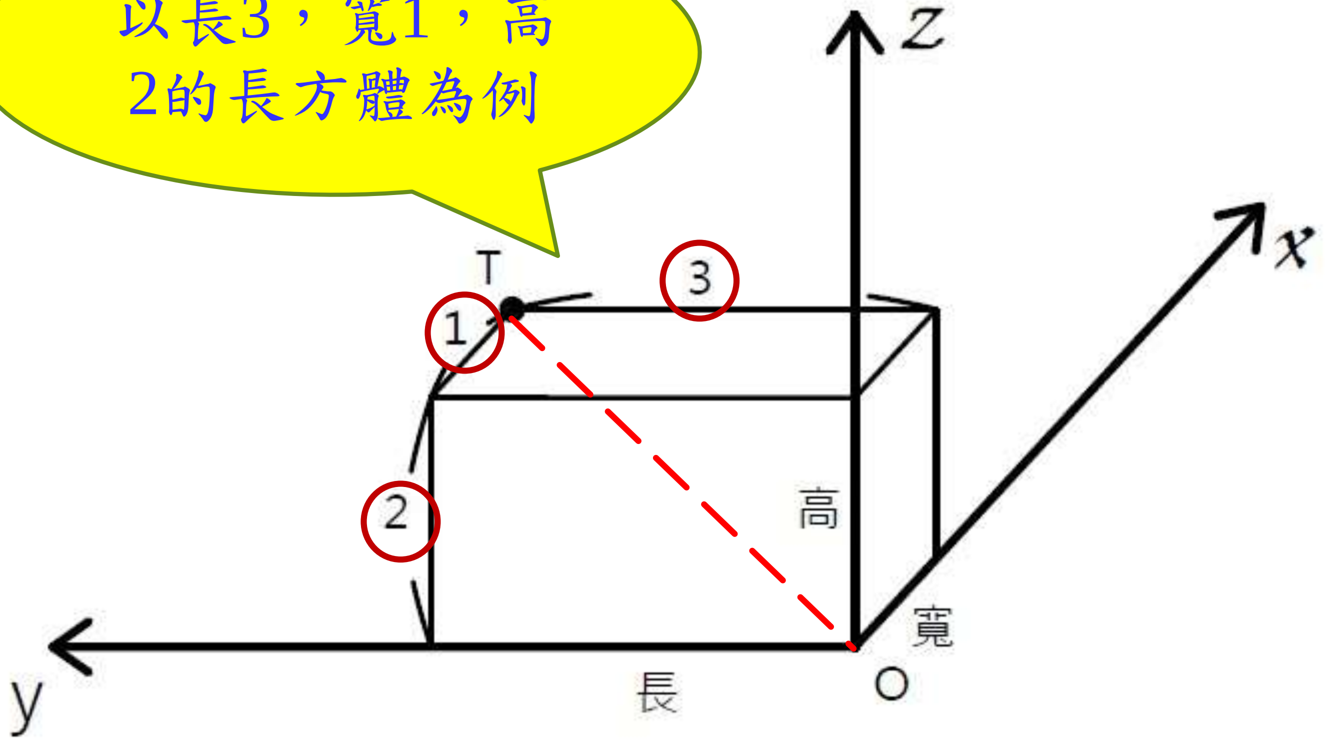
    對角線方程式為 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$

- **步驟二**、將長方體內X 軸、Y 軸、Z 軸上的整數點代入方程式，即可找出分界面上的的分點。
- **步驟三**、比對並計算共分點，即可求出分點數和通過的小正方體個數



情況一、長寬高兩兩互質的情況

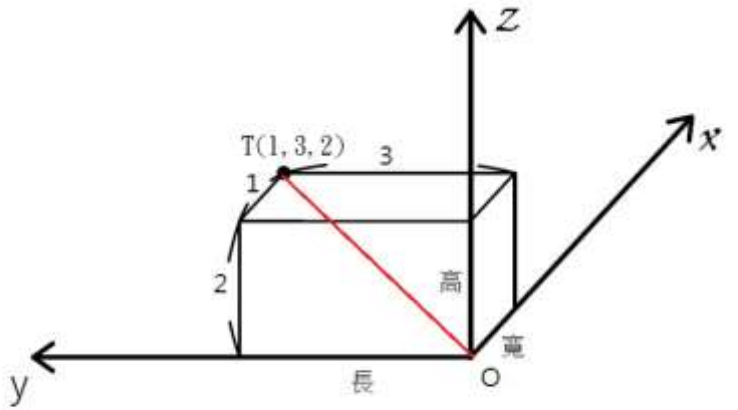
以長3，寬1，高2的長方體為例



- 步驟一、求對角方程式

根據對角線方程式 $\boxed{\dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{z_1}}$ 得知

➡ 對角線$\overleftrightarrow{OT}$方程式：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}$



- 步驟二、求出各分界面上的分點

①x軸：$0\le x\le 1$之間無整數點，

故無法跟$\overleftrightarrow{OT}$產生分界面上的分點

② y 軸：$0 \le y \le 3$ 之間有整數點 $y=1$ 及 $y=2$

- $y=1$ 代入 $\overline{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{z}{2}$

  $\therefore \quad x=\dfrac{1}{3} \quad z=\dfrac{2}{3}$

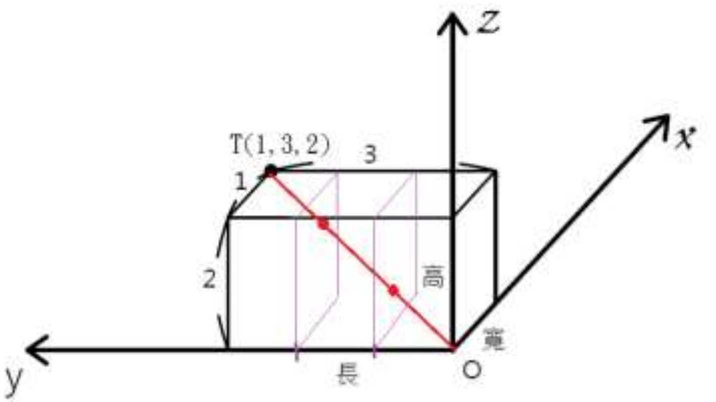
  產生分界面上的分點：$(\dfrac{1}{3},1,\dfrac{2}{3})$

- $y=2$ 代入 $\overline{OT}$ 方程式：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{z}{2}$

  $\therefore \quad x=\dfrac{2}{3} \quad z=\dfrac{4}{3}$

  產生分界面上的分點：$(\dfrac{2}{3},2,\dfrac{4}{3})$

  分點數表示：長 $-1=3-1=2$ 個



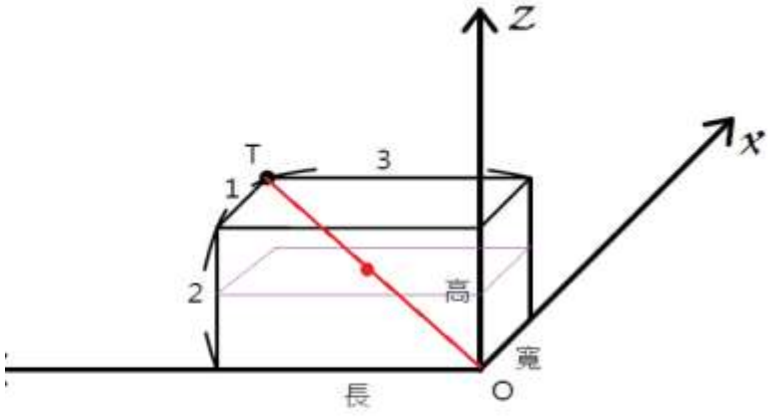
③ z軸：$0\leq z\leq 2$之間有整數點$z=1$

$z=1$代入$\overline{OT}$方程式：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad x=\dfrac{1}{2}\quad y=\dfrac{3}{2}$

產生分界面上的分點：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},1)$

分點數表示：高$-1=2-1=1$個



➢ **步驟三**、x軸、y軸、z軸之間的整數點

共產生3個不同的分點 $(\dfrac{1}{3},1,\dfrac{2}{3})$ $(\dfrac{2}{3},2,\dfrac{4}{3})$ $(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},1)$

小結1：

- 長寬高皆互質公式推導：
  - 分點數：$\boxed{(長-1)+(寬-1)+(高-1)}$
  - 通過小正方體個數：

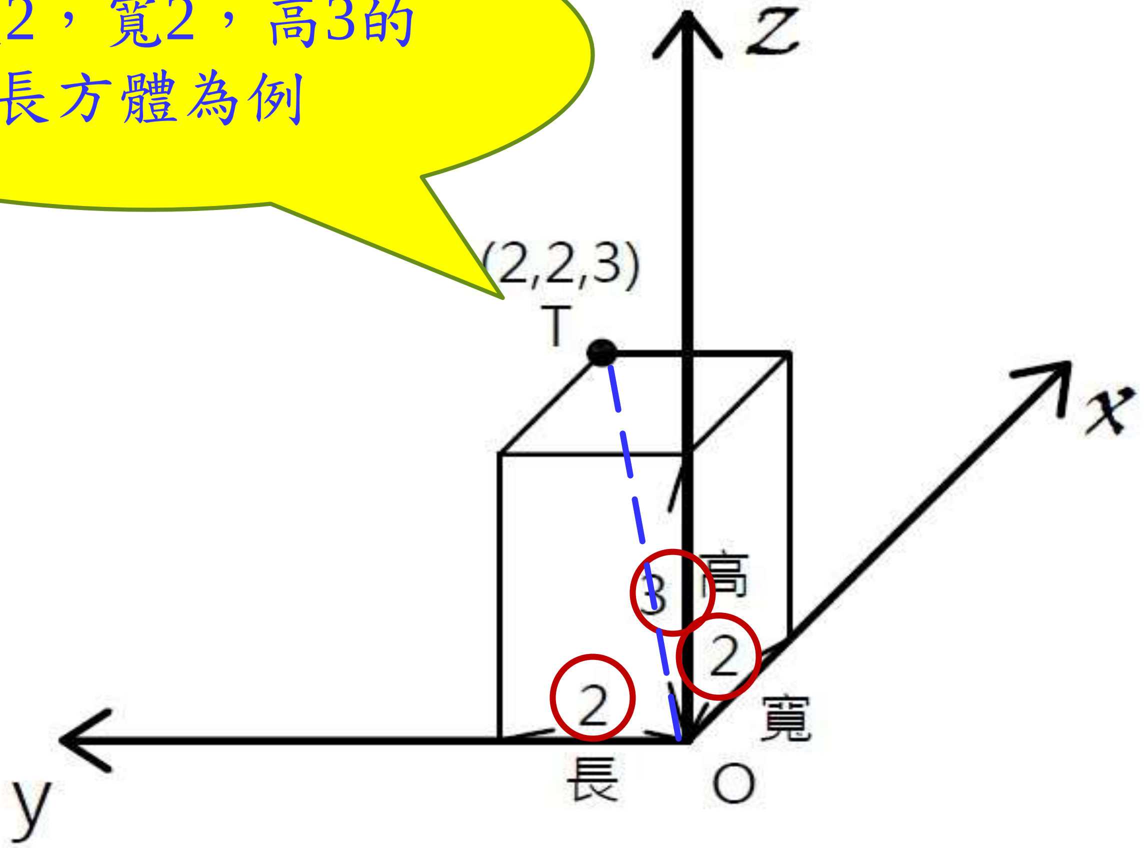
$$(長-1)+(寬-1)+(高-1)+1$$

$$=長+寬+高-2$$

驗證 $=3+1+2-2=4$ 個

情況二：長寬高其中兩組互質，
一組不互質(具共分點)

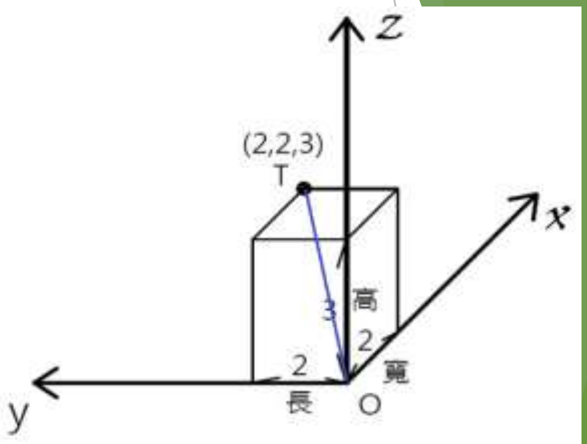
以長2，寬2，高3的
長方體為例



➢ 步驟一、求對角線方程式

根據對角線方程式 $\boxed{\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}}$ 得知

➡對角線 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$



➢ 步驟二、求出各分界面上的分點

① x軸：$0\leq x\leq 2$ 之間有整數點 $x=1$

$x=1$ 代入 $\overleftrightarrow{OT}$ 方程式：$\frac{1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

$\therefore\quad y=1\quad z=\frac{3}{2}$ 　產生分界面上的分點：$(1，1，\frac{3}{2})$

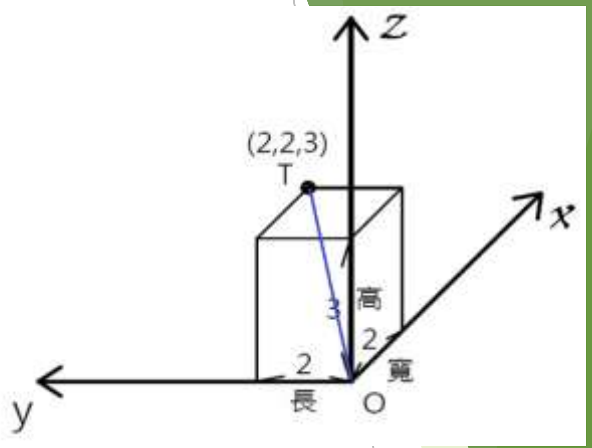
分點數 ：寬 $-1=2-1=1$ 個

② y 軸：$0 \le y \le 2$ 之間有整數點 $y=1$

$y=1$ 代入 $\overline{OT}$ 方程式：$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}=\frac{z}{3}$

$\therefore$ $x=1$ $z=\frac{3}{2}$ 產生分界面上的分點：$(1，1，\frac{3}{2})$

分點數：長 $-1=2-1=1$ 個



③ z 軸：$0 \le z \le 3$ 之間有整數點 $z=1$ 及 $z=2$

- $z=1$ 代入 $\overline{OT}$ 方程式：$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{1}{3}$ $\therefore$ $x=\frac{2}{3}$ $y=\frac{2}{3}$

產生分界面上的分點：$(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1)$

- $z=2$ 代入 $\overline{OT}$ 方程式：$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $x=\frac{4}{3}$ $y=\frac{4}{3}$

產生分界面上的分點：$(\frac{4}{3},\frac{4}{3},2)$

- 分點數：高 $-1=3-1=2$ 個

小結2：

- 由x軸及y軸的分點來看相同的$(1，1，\frac{3}{2})$，因長 2 單位與寬 2 單位不互質，最大公因數(2，2)=2。由研究一得知直線於平面的分點數為 {(長-1)+(寬-1)-[gcd(長，寬)-1]}

因此空間中分點數為 (長-1)+(寬-1)-[gcd(長，寬)-1]+(高-1)

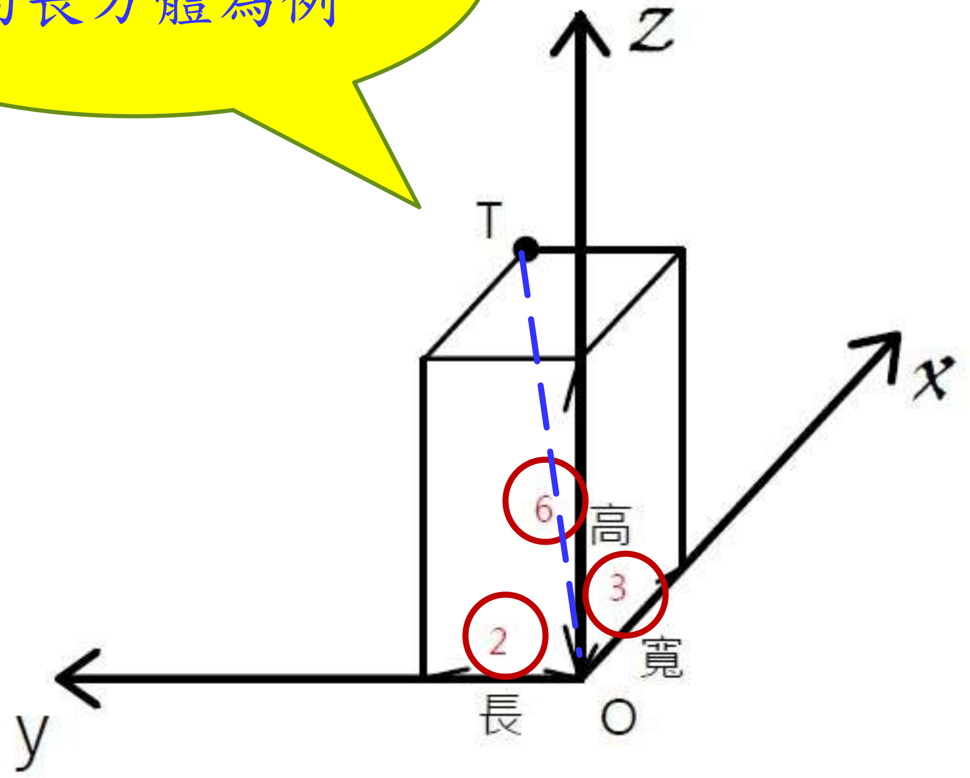
- 公式推導：

分點數： 長+寬+高-gcd(長，寬)-2

通過小正方形個數=分點數+1：長+寬+高-gcd(長，寬)-1

情況三、長寬高其中一組互質，兩組不互質(具共分點)

以長2，寬3，高6的長方體為例



小結3:

算法與前相似，略之。

- 公式推導：藉由情況二相同的步驟得知

長高和寬高兩組不互質 須扣除彼此的共分點

分點數：(長-1)+(寬-1)+(高-1)-[gcd(長，高)-1]-[gcd(寬，高)-1]

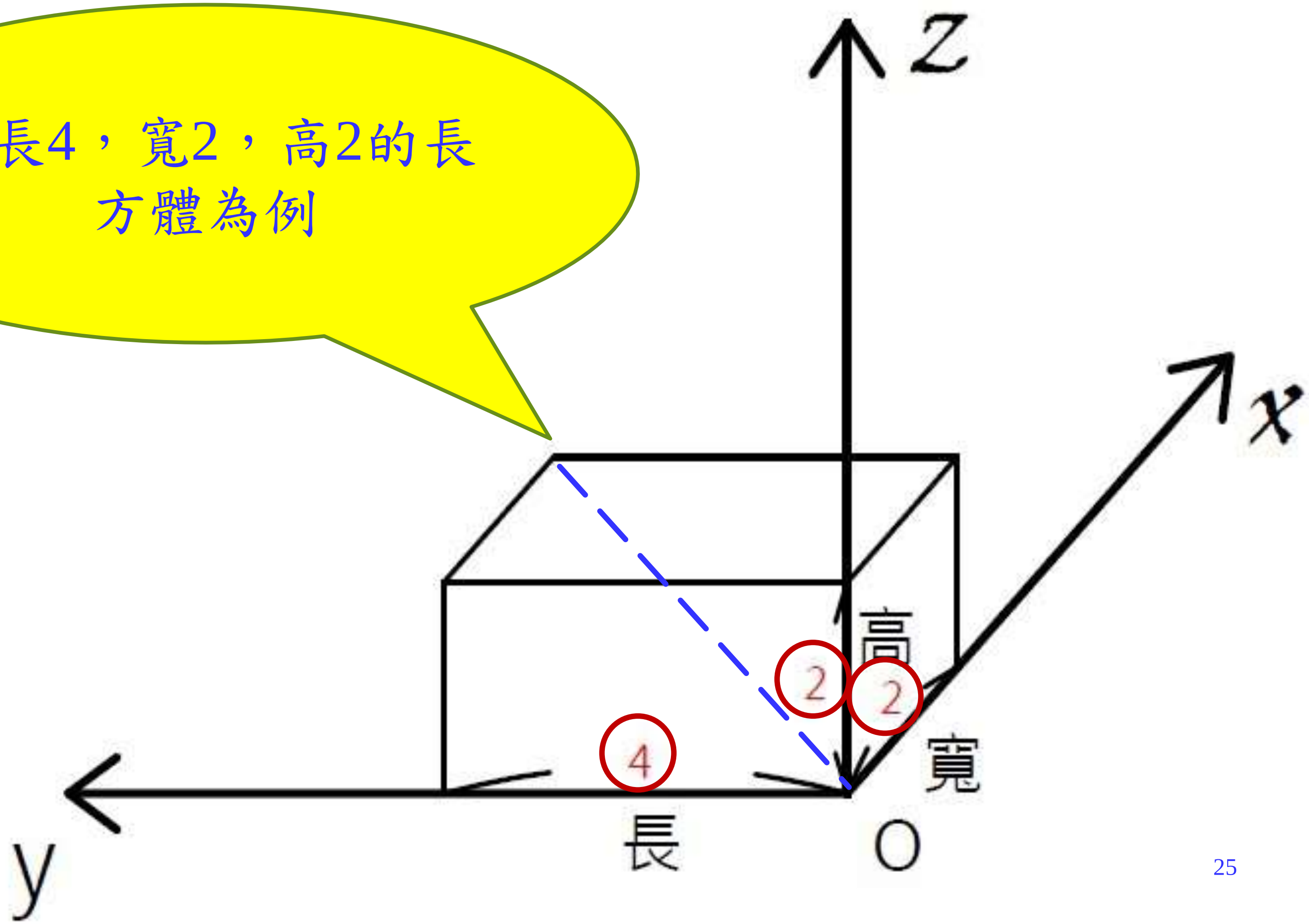
=長+寬+高-gcd(長，高)-gcd(寬，高)-1

通過小正方形個數=分點數+1：長+寬+高-gcd(長，寬)-gcd(寬，高)

情況四、長寬高皆不互質

（具兩軸和三軸共分點）

以長4，寬2，高2的長方體為例



算法與前相似，略之。

小結4

- 公式推導：藉由情況三相同的步驟得知長高、寬高、長寬皆不互質須扣除彼此重複的分點，但仍需考慮三軸共分點

- 分點數：

$$(\text{長}-1)+(\text{寬}-1)+(\text{高}-1)-[\gcd(\text{長},\text{高})-1]-[\gcd(\text{寬},\text{高})-1]-[\gcd(\text{長},\text{寬})-1]+[\gcd(\text{長},\text{寬},\text{高})-1]$$

$$=\text{長}+\text{寬}+\text{高}-\gcd(\text{長},\text{高})-\gcd(\text{寬},\text{高})-\gcd(\text{長},\text{寬})+\gcd(\text{長},\text{寬},\text{高})-1$$

- 通過小正方形個數=分點數+1

$$=\text{長}+\text{寬}+\text{高}-\gcd(\text{長},\text{高})-\gcd(\text{寬},\text{高})-\gcd(\text{長},\text{寬})+\gcd(\text{長},\text{寬},\text{高})$$

研究二 結論

- 平面中，對角線可以通過長＋寬－gcd(長，寬)個區域
- 空間中(立體)，對角線可以通過長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高) －gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)個區域。

總結

- 無論在平面或立體空間中皆可藉由以下公式求得對角線可以通過的區域個數
- 通過的區域個數

=長＋寬＋高－gcd(長，寬)

－gcd(長，高)

－gcd(寬，高)

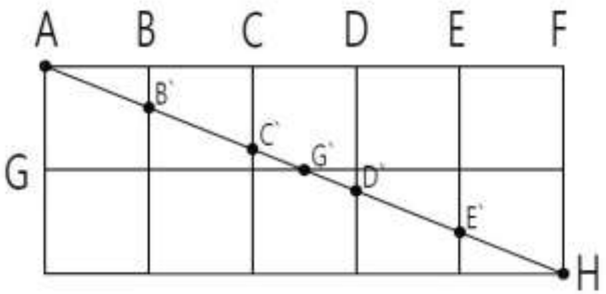
＋gcd(長，寬，高)

感謝教授的聆聽

敬請指導

補充

(一)長、寬互質:(以長 5 單位，寬 2 單位的長方形來探討)



▲圖十七(長 5 單位，寬 2 單位)

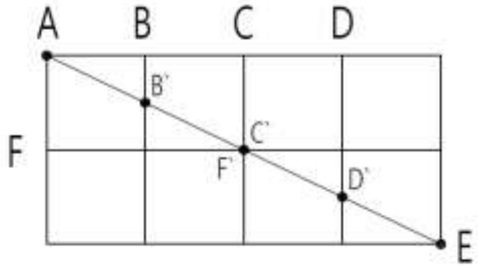
1.從以上發現長方形對角線能通過的小正方形跟長寬能提供的交點有關，這些交點也是對角線的分點，而分點之間就是一個區域。

2.延伸探討：若小格子並非正方形，而是小長方形，是否有相同結果？

答：B、C、D、E、往下延伸跟 $\overline{AH}$ 產生 4 個交點也就是 4 個分點 G 往右與 $\overline{AH}$ 產生 1 個交點也就是 1 的分點。所以共 5 個分點通過 6 個長方形，所以結論與正方形相同，因為主要取決在往下及往右與對角線的交點數，因此只要往右、往下不在同一點，小格子是正方形或長方形並無差別，所通過的格子一樣是 長＋寬－1 。

1 即為長與寬之最大公因數(互質)。

(二)長、寬不互質:(以長 4 單位，寬 2 單位的長方形來探討)



▲圖十八(長 4 單位，寬 2 單位)

1.當長方形長與寬不互質時會有往下、往右共點的問題以致於分點減少通過小正方形個數也會減少，而減少數量也與大長方形的相似數量有關。

結果：當長寬不互質時，對角線通過的小正方形數 $\Rightarrow$ 長＋寬－n

n代表通過圖形中與大長方形相似個數，即為長與寬之最大公因數。

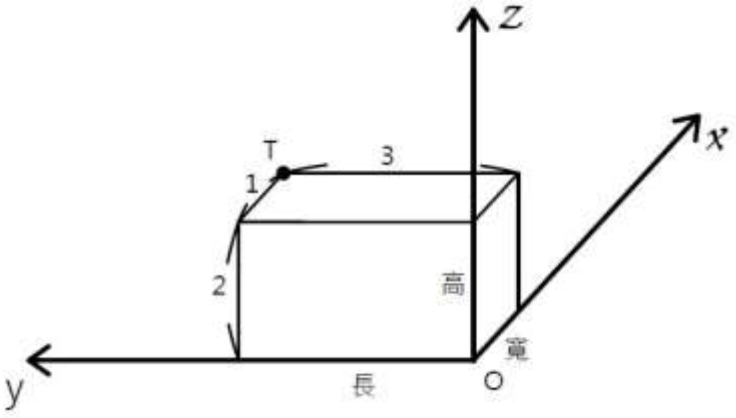
2.n的探討：n代表長與寬之最大公因數。由兩數最大公因數的分析了解，最大公因數可代表兩數比值相同的有幾組。

例如：$\frac{15}{25}$ 如果約掉最大公因數 5，就成最簡分數 $\frac{3}{5}$ 表示 $\frac{3}{5}$ 可擴分，分子、

分母乘以 1、2、3、4、5，回到 $\frac{15}{25}$ ，故最大公因數可代表兩數有多少組相同的比值。

平面中，長a單位、寬b單位的長方形可分成ab個邊長為 1 單位的小正方形，其對角線可通過 $\boxed{長＋寬－\gcd(長，寬)}$ 個小正方形

(一)長、寬、高，兩兩互質之情況：(以長 3，寬 1，高 2 的長方體來探討)



▲圖十九

由研究過程推導出對角線通過小正方體個數：長＋寬＋高－2

分析：長＋寬＋高－2

＝長＋寬＋高－1－1－1＋1

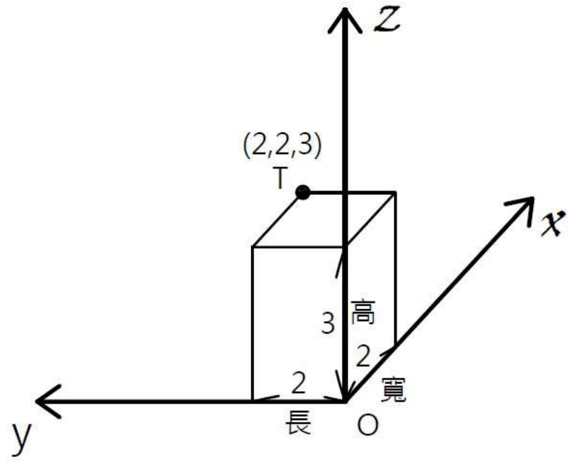
＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高)－gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)

gcd(長，寬)＝1
gcd(長，高)＝1
gcd(寬，高)＝1
gcd(長，寬，高)＝1

驗證：3＋1＋2－(3，1)－(3，2)－(1，2)＋(3，1，2)

＝3＋1＋2－1－1－1＋1＝4……通過 4 個小正方體

(二)長、寬、高，其中兩組互質，一組不互質情況：(以長 2，寬 2，高 3 的長方體來探討)



▲圖二十

由研究過程推導出對角線通過小正方形個數：長＋寬＋高－gcd(長，寬)－1

分析：長＋寬＋高－gcd(長，寬)－1

＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－1－1＋1

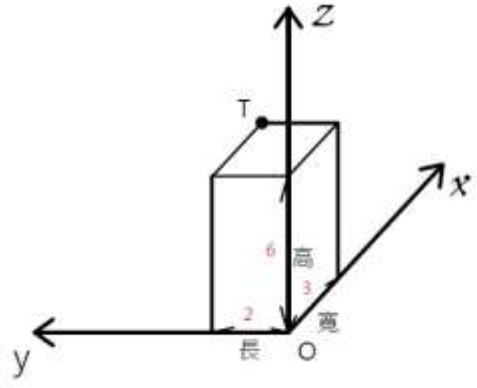
＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高)－gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)

gcd(長，寬)≠1
gcd(長，高)＝1
gcd(寬，高)＝1
gcd(長，寬，高)＝1

驗證：2＋2＋3－(2，2)－(2，3)－(2，3)＋(2，2，3)

＝2＋2＋3－2－1－1＋1＝4……通過 4 個小正方體

(三)**長、寬、高，其中一組互質，兩組不互質**情況：(以長 2，寬 3，高 6 的長方體來探討)



▲圖二十一

由研究過程推導出對角線通過小正方形個數：長＋寬＋高－gcd(長，高)－gcd(寬，高)

分析：長＋寬＋高－gcd(長，高)－gcd(寬，高)

＝長＋寬＋高－gcd(長，高)－gcd(寬，高)－1＋1

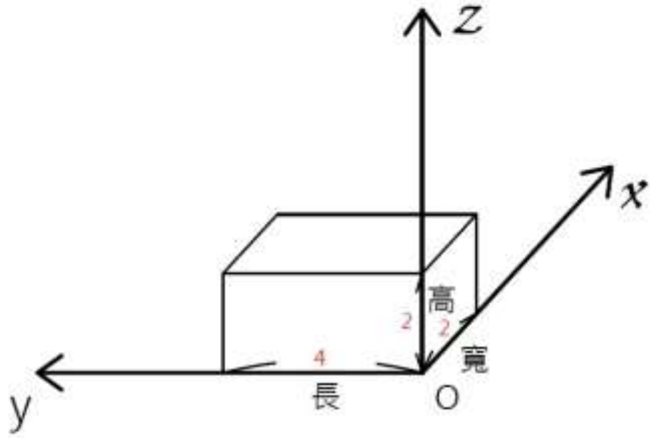
＝長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高)－gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)

gcd(長，寬)＝1
gcd(長，高)≠1
gcd(寬，高)≠1
gcd(長，寬，高)＝1

驗證：$2+3+6-(2,6)-(3,6)-(2,3)+(2,3,6)$

$=2+3+6-2-3-1+1=6$......通過 6 個小正方體

(四)**長、寬、高，皆不互質**情況：(以長 4，寬 2，高 2 的長方體來探討)



▲圖二十二

由研究過程推導出對角線通過小正方形個數：

長＋寬＋高－gcd(長，寬)－gcd(長，高)－gcd(寬，高)＋gcd(長，寬，高)

gcd(長，寬)≠1
gcd(長，高)≠1
gcd(寬，高)≠1
gcd(長，寬，高)≠1

驗證：$2+4+2-(2,4)-(2,2)-(2,4)+(2,4,2)$

$=2+4+2-2-2-2+2=4$......通過 4 個小方體